УДК 517.9

О СОПРЯЖЕННОЙ ЗАДАЧЕ РИМАНА-ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ СИСТЕМЫ МОИСИЛА-ТЕОДОРЕСКУ [4)]

В.А. Полунин, А.П. Солдатов

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: soldatov48@bsu.edu.ru

Аннотация. В работе исследована фредгольмова разрешимость задачи Римана-Гильберта для системы Моисила-Теодореску в конечной области.

Ключевые слова: задача Римана-Гильберта, система Моисила-Теодореску, условие дополнительности, граничная задача.

Пусть конечная область $D \subseteq \mathbb{R}^3$ ограничена гладкой поверхностью S и задана 2×4 – матрица $B \in C(S)$. Рассмотрим в этой области задачу Римана-Гильберта

$$Lu = F\,, \qquad Bu\big|_S = f \tag{1}$$

для оператора $L = M(\partial/\partial x)$ Моисила-Теодореску, определяемого матрицей

$$M(\zeta) = \begin{pmatrix} 0 & \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \\ \zeta_1 & 0 & -\zeta_3 & \zeta_2 \\ \zeta_2 & \zeta_3 & 0 & -\zeta_1 \\ \zeta_3 & -\zeta_2 & \zeta_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Относительно матрицы B естественно предполагать, что ее строки как элементы $\mathbb{R}^4$ линейно независимы в каждой точке поверхности S, т.е. ранг $\operatorname{rang} B = 2$ всюду на S. Ясно, что на краевое условие в (1) можно действовать слева обратимыми 2×2 матрицами $\Delta \in C(S)$. Поэтому всегда можно добиться того, чтобы строки матрицы B в каждой точке $a \in S$ образовывали пару ортогональных единичных векторов.

С вопросом разрешимости задачи (1) тесно связано так называемое условие дополнительности (Шапиро-Лопатинского) [1, 2], которому должна удовлетворять матрица B. Это условие состоит в следующем.

Пусть $a \in S$ и $n = (n_1, n_2, n_3)$ означает единичный вектор внешней нормали на поверхности S в точке a. Для любого единичного вектора $\xi \in \mathbb{R}^3$, ортогонального n, многочлен четвертой степени $\chi(z) = \det M(\xi + zn)$ не имеет вещественных корней. Обозначим через $\chi_+(z)$ – произведение сомножителей $z - \nu$, где ν пробегает множество всех корней многочлена χ в верхней полуплоскости (взятых с учетом кратности). Пусть еще

[4]Работа выполнена в рамках ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 годы (госконтракты № П19 от 18.03.2010, № 02.740.11.0613 от 29.03.2010, № П693 от 20.05.2010.)

$M^*(\zeta) = [\det M(\zeta)]M^{-1}(\zeta)$ означает матрицу, присоединенную к M. Тогда по определению условие дополнительности выполнено в точке a, если для любых $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ и любого единичного вектора $\xi \in \mathbb{R}^3$, ортогонального n, из соотношений

$$\lambda_1[BM^*(\xi + zn)]_{1j} + \lambda_2[BM^*(\xi + zn)]_{2j} = \chi_+(z)p_j(z)\,, \quad 1 \leqslant j \leqslant 4\,,$$

с некоторыми многочленами p_j следует $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Поскольку

$$\det M(\zeta) = -(\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2)^2, \quad M^{-1}(\zeta) = (\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2)^{-1}M^\top(\zeta)$$

и для $\zeta = \xi + zn$ сумма $\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2 = 1 + z^2$, то $\chi(z) = (z^2+1)^2$, $\chi_+(z) = (z-i)^2$ и

$$M^*(\xi + zn) = -(z^2+1)M^\top(\xi + zn)\,.$$

Поэтому условие дополнительности сводится к тому, что

$$\mathrm{rang}\,[B(a)M^\top(\xi + in)] = 2 \tag{2}$$

в каждой точке $a \in S$. Заметим, что хотя ранг матрицы B равен двум, её произведение на вырожденную матрицу $M^\top(\xi + in)$ не обязательно обладает тем же свойством.

Классический результат общей теории эллиптических уравнений [3, 4] гарантирует фредгольмовость задачи (1) в классах Гельдера при выполнении условия дополнительности.

Теорема 1. *Пусть $S \in C^{1,\mu}$ и $B \in C^{1,\mu}(S)$, так что оператор задачи (1) ограничен $C^{1,\mu}(\overline{D}) \to C^{1,\mu}(S) \times C^\mu(\overline{D})$. Тогда фредгольмовость этого оператора равносильна тому, что матрица $B \in C^{1,\mu}(S)$ удовлетворяет условию дополнительности.*

При определенных условиях с задачей (1) можно связать сопряженную задачу этого же типа. Рассмотрим сопряженный по Лагранжу оператор $L^* = -M^\top(\partial/\partial x)$, который вместе с L можно записать в форме

$$L = \sum_{k=1}^3 M_k \frac{\partial}{\partial x_k}\,, \qquad L^* = -\sum_{k=1}^3 M_k^\top \frac{\partial}{\partial x_k}$$

с соответствующими матрицами $M_k \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Тогда для любых вектор- функций $u, v \in C^1(\overline{D})$ имеем соотношение

$$(Lu)v - u(L^*v) = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k}[(M_k u)v] = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k}\left[u(M_k^\top v)\right]\,,$$

где выражения в квадратных скобках означают обычное скалярное произведение двух четырехкомпонентных векторов. Следовательно, по формуле Грина справедливо тождество

$$(Lu, v)_D - (u, L^*v)_D = (u, M^\top(n)v)_S\,. \tag{3}$$

где $(\cdot\,,\cdot)_S$ означают скалярные произведения, соответственно, в пространствах вектор – функций $L^2(D)$ и $L^2(S)$. Это соотношение позволяет определить слабое решение $u \in L^2(D)$ уравнения $Lu = F$ с правой частью $F \in L^2(D)$, которое должно удовлетворять тождеству $(u, L^*v)_D = (F, v)_D$ для любой функции $v \in V$, обращающейся в нуль на S. Хорошо известно [1, 3], что в случае $F \in C^\mu(\overline{D})$ любое слабое решение u является классическим и принадлежит классу $C^{1,\mu}(K)$ на каждом компакте $K \subseteq D$.

Определение слабого решения задачи (1) связано с понятием однородной сопряженной задачи к задаче (1), постановка которой зависит от возможности выбора такой $2 \times 4-$ матрицы $B^* \in C^\mu(S)$, что квадратная матрица

$$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{14} \\ B_{21} & \cdots & B_{24} \\ B^*_{11} & \cdots & B^*_{14} \\ B^*_{21} & \cdots & B^*_{24} \end{pmatrix} \tag{4}$$

ортогональна. Тогда для скалярного произведения векторов $p, q \in \mathbb{R}^4$ можно записать

$$p\,q = (\widetilde{B}p)(\widetilde{B}q) = (Bp)(Bq) + (B^*p)(B^*q)\,.$$

Применительно к векторам $p = u$ и $q = M^\top(n)v$ в правой части (3) это приводит к соотношению

$$(Lu, v)_D - (u, L^*v)_D = (Bu, BM^\top(n)v)_S + (B^*u, B^*M^\top(n)v)_S\,.$$

В соответствии с этим говорим, что функция $u \in L^2(D)$ есть слабое решение задачи (1), если

$$(F, v)_D - (u, L^*v)_D = (f, BM^\top(n)v)_S \tag{5}$$

для любой функции $v \in C^1(\overline{D})$, удовлетворяющей краевому условию

$$B^*M^\top(n)(v\big|_S) = 0\,. \tag{6}$$

К сожалению, в общем случае произвольной поверхности S дополнить B до ортогональной матрицы (4) не всегда удается. Следующая лемма показывает, что это построение можно всегда осуществить локально (с сохранением гладкости матрицы B).

Лемма 1. *Пусть E есть множество всех матриц $B \in \mathbb{R}^{2\times 4}$, строки которых образуют пару ортонормальных векторов. Пусть E_{ij}, $1 \leqslant i < j \leqslant 4$, состоит из матриц $B \in E$, у которых $i-$ый и $j-$ый столбцы линейно независимы. Тогда существует такое гладкое отображение $h:\ E_{ij} \to E$, что для $B \in E_{ij}$ матрица (4) с $B^* = hB$ ортогональна.*

□ Доказательство достаточно провести в ситуации, когда под E понимается множество $2 \times 4-$матриц, строки которых отличны от нуля и ортогональны. Не ограничивая общности можно также считать, что $j \leqslant 3$. Тогда первую строку матрицы B^* определим, полагая $B^*_{14} = 0$ и в качестве $(B^*_{11}, B^*_{12}, B^*_{13})$ выбирая векторное произведение векторов (B_{i1}, B_{i2}, B_{i3}), $i = 1, 2,$. В результате получим тройку взаимно ортогональных векторов $B_i = (B_{i1}, B_{i2}, B_{i3}, B_{i4})$, $i = 1, 2$, и B_1^*. С точностью до ненулевого множителя оставшийся вектор B_2^* определится однозначно. В качестве него можно взять алгебраические дополнения последней строки 4×4 – матрицы, первые три строки которой составлены из B_1, B_2 и B_1^*. ■

Из леммы следует, что каждая точка поверхности S обладает такой её открытой окрестностью $G \subseteq S$, что существует матрица $B^* \in C(G)$, для которой матрица (4) ортогональна в каждой точке $y \in G$. При этом если $B \in C^\mu(G)$ или $B \in C^{1,\mu}(G)$, то и B^* принадлежит соответствующему классу. В соответствии с этим понятие слабого решения $u \in L^2(D)$, принимающего краевое условие только на G, естественно ввести с помощью тождества (5), где функция $v \in C^1(\overline{D})$ обращается в нуль на $S \setminus G$, а на G удовлетворяет краевому условию (6), т.е.

$$B^* M^\top(n) v\big|_G = 0, \qquad v\big|_{S \setminus G} = 0\,. \tag{7}$$

При этом справедлив следующий результат о локальной гладкости вплоть до границы [1, 3].

Теорема 2. *Пусть $S \in C^{1,\mu}$, $B \in C^\mu(S)$ и выполнено условие дополнительности. Пусть множество $G \subseteq S$ открыто и матрица $B^* \in C^\mu(G)$ такова, что матрица (4) ортогональна на G. Тогда любое слабое решение $u \in L^2(D)$, принимающее на G краевое условие $Bu\big|_G = g$ с правой частью $g \in C^\mu(G)$, принадлежит $C^\mu(K)$ на любом компакте $K \subseteq \overline{D}$, для которого $K \cap S \subseteq G$. Если дополнительно $B \in C^{1,\mu}(S)$ и $g \in C^{1,\mu}(G)$, то и $u \in C^{1,\mu}(K)$.*

□ В соответствии с леммой 1 покроем поверхность S конечным числом открытых множеств $G_1, \ldots, G_n$ так, чтобы для любого i существовала матрица $B_i^* \in C(G_i)$, дополняющая B до ортогональной матрицы $\widetilde{B}_i$ на всем G_i. С помощью этого покрытия можем ввести понятие слабого решения, принимающего краевое условие (1) на всей границе. С этой целью рассмотрим класс функций $v \in C(\overline{D})$, удовлетворяющих краевому условию

$$B_i^* M^\top(n) v\big|_{G_i} = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n\,. \tag{8}$$

На пересечении $G_i \cap G_j$ имеем соотношение $B_i^* = \Delta B_j^*$ с некоторой ортогональной $2 \times 2-$ матрицей Δ, поэтому данное краевое условие определено корректно.

Утверждается, что если $u, v \in C^1(\overline{D})$ и вектор-функция v удовлетворяет (8), то

$$(Lu, v)_D - (u, L^* v)_D = (Bu, BM^\top(n) v)_S\,. \tag{9}$$

Для доказательства выберем замкнутые подмножества $S_i \subseteq G_i$ так, чтобы их обьединение совпадало с S, а попарные пересечении $S_i \cap S_j$ имели поверхностную меру нуль. Тогда для четырехкомпонентных векторов $p, q \in C(S)$ можем записать

$$(p, q)_S = \sum_{j=1}^{n} \left[\int_{S_j} (Bp)(Bq) dy + \int_{S_j} (B_j^* p)(B_j^* q) dy \right]\,.$$

Применительно к $p = u$ и $q = M^\top(n) v$ с учетом (8) отсюда следует (9). ■

В результате приходим к естественному определению слабого решения задачи (1) как к тождеству (5) по всем $v \in C^1(\overline{D})$, удовлетворяющим условию (8). Заметим, что (8) является следствием (7), поэтому $i-$ое краевое условие в (8) можно рассматривать для слабого решения отдельно так, как указано выше. Кроме того, условие (8) можно рассматривать и для функций $v \in C(\overline{D}) \cap C^1(D)$, которые являются решением сопряженного уравнения Моисила-Теодореску $L^* v = 0$.

Таким образом, теорема 2 приводит к следующему результату.

Теорема 3. *Пусть $S \in C^{1,\mu}$, $B \in C^{\mu}(S)$, выполнено условие дополнительности (2) и аналогичное условие* $\operatorname{rang}[B_j^* M(\xi + in)] = 2$ *всюду на* G_j, $1 \leqslant j \leqslant n$. *Тогда любое слабое решение $u \in L^2(D)$ задачи (1) с правыми частями $F \in C^{\mu}(\overline{D})$, $f \in C^{\mu}(S)$ и любое решение $v \in C(\overline{D}) \cap C^1(D)$ однородной сопряженной задачи*

$$L^* v = 0, \qquad B_i^* M^{\top}(n) v\big|_{G_i} = 0\,, \quad 1 \leqslant i \leqslant n\,. \tag{10}$$

принадлежат классу $C^{\mu}(\overline{D})$. Если дополнительно $B, f \in C^{1,\mu}(S)$, то и $u, v \in C^{1,\mu}(\overline{D})$.

□ Доказательство почти очевидно. Существует столь малое $r > 0$, что любой компакт $K \subseteq \overline{D}$ диаметра меньше r либо целиком лежит в D, либо $K \cap S \subseteq G_i$ для некоторого i. В первом случае, очевидно, функции $u, v \in C^{1,\mu}(K)$. Во втором случае функция u принимает краевое условие (1) на S_i в слабом смысле и это же верно по отношению к $i-$ому краевому условию (9) для v. Поэтому остается воспользоваться теоремой 2. ■

Является весьма вероятным, что условие на B_j^* в теореме излишне и является следствием (2). Было бы желательно дать прямое доказательства этого факта.

Применительно к слабым решениям теорема 1 допускает следующий аналог[3, 4].

Теорема 4. *В условиях теоремы 3 однородная задача (1) и однородная сопряженная задача (10) имеют конечное число линейно независимых решений, соответственно, $u_1, \dots u_k \in C^{\mu}(\overline{D})$ и $v_1, \dots v_{k'} \in C^{\mu}(\overline{D})$. Неоднородная задача (1) разрешима тогда и только тогда, когда выполнены условия ортогональности*

$$(F, v)_D - (f, BM^{\top}(n) v_j)_S = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant k'.$$

При этом разность $k - k'$ совпадает с индексом оператора теоремы 1.

Литература

1. Agmon, S., Douglis, A., Nirenberg, L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. II. Comm. Pure Appl. Math., 1964, 17, 35-92.

2. Янушаускас А. Методы теории потенциала в теории эллиптических уравнений / А. Янушаускас. – Вильнюс: Мокслас, 1990. – 264с.

3. Назаров С.А, Пламеневский Б.А., Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей, М., Наука, 1991, 356с.

4. Ройтберг Я.А., Шефтель Э.Г., Теорема о гомеоморфизмах для эллиптических систем и ее приложения // Матем. сборник.–1969. Т.78, №3.–с. 446–472.

ABOUT AN ADJOINT RIEMANN-GILBERT PROBLEM FOR THE MOISIL-THEODORESCU SYSTEM

Polunin V.A., Soldatov A.P.

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: soldatov48@mail.ru

Abstract. The Fredholm solvability of Riemann-Hilbert problem for the Moisil-Teodorescu system in a finite domian is studied.

Key words: Riemann-Gilbert problem, Moisil-Theodorescu system, complementarity condition, boundary value problem.