КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 621.396.01

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СИГНАЛОВ ПО ДИСКРЕТНЫМ ОТСЧЕТАМ НА ОСНОВЕ ЧАСТОТНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Е.Г. ЖИЛЯКОВ
А.А. ЧЕРНОМОРЕЦ
Н.С. ПАБОЛКОВА

Белгородский государственный университет

e-mail: Zhilyakov@bsu.edu.ru

e-mail: chernomorets@bsu.edu.ru

Разработан метод вычисления по дискретным значениям сигналов оценок производных их компонент, которые обусловлены частями энергий, попадающими в заданные частотные интервалы. Метод обобщается на случай вычисления на фоне флуктуационных шумов оценок производных сигналов, подавляющие доли энергий которых сосредоточены в частотных интервалах ограниченных размеров.

Ключевые слова: сигнал, дискретные значения, оценка производной, доли энергии, частотные интервалы, флуктуационный шум.

Проблема вычисления значений производных сигналов $u(t)$, $t \in [0,T]$ на основании зарегистрированных дискретных (по времени) отсчётов $u_k=u(t_k)$, $k=0,\dots,N$; $t_0=0$; $t_N=T$ возникает при решении различных задач управления и принятия решений. Сложность получения оценок обусловлена некорректностью задачи, так как производная определяется скоростью изменений функции, которая может быть очень большой, например, вследствие воздействий флуктуационных погрешностей регистрации данных. В силу этого классические [1, 2] методы вычислений приближенных значений производных оказываются малопригодными, так как они изначально ориентированы на класс гладких функций.

Это свойство (чувствительности к резким изменениям сигнала) производных породило достаточно большое количество методов их оценивания, в той или иной мере осуществляющие регуляризацию, позволяющую получать оценки, устойчивые к воздействиям погрешностей регистрации данных. В основе указанных подходов так или иначе используется вычислительные соотношения, определяющие оценки производных нелокально, то есть через много отсчётов, а не только через отсчёты из ближайшей окрестности к заданному значению аргумента. В основе вывода конкретных вычислительных соотношений используются различные принципы, отражающие требования устойчивости получаемых оценок.

В работах [3, 4] показано, что в качестве класса аппроксимирующих производные функций целесообразно использовать функции с финитными областями определения трансформант Фурье. При этом отбор конкретной аппроксимации (оценки производной) осуществляется на основе вариационного принципа минимизации евклидовой нормы:

$$\| f \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt = \int_{\omega\in\Omega} |F(\omega)|^2 \, d\omega / 2\pi = \min, \tag{1}$$

при выполнении интерполяционных условий

$$\hat{u}(t_k) = u_0 + \int_0^{t_k} f(t)dt = u_k, k = 1,.., N. \tag{2}$$

Здесь символ f означает оценку производной, областью определения которой служит вся числовая ось, представимая через трансформанту Фурье:

$$f(t) = \int_{\omega\in\Omega} \frac{F(\omega)\exp(j\omega t)d\omega}{2\pi} \tag{3}$$

с финитной областью определения $\Omega = [-\Omega_2, -\Omega_1) \cup [\Omega_1, \Omega_2)$.

Там же показано, что достаточным условием выполнения интерполяционных равенств (2) является неравенство $T*(\Omega_2 - \Omega_1) \ge 2\pi$, которое является своеобразным выражением принципа неопределенности, связывающим длительность анализируемого сигнала с шириной области определения (полосы частот) трансформанты Фурье, получаемой оценки производной.

Возникает проблема обоснования выбора этой полосы частот. Ясно, что он должен основываться на анализе информации, которая имеется в отсчетах исходной функции.

Рассмотрим для простоты случай эквидистантной дискретизации, которая имеет наибольшее распространение в задачах обработки сигналов. При этом выполняются условия $t_k = k*\Delta t, k = 0,.., N$, так что имеет место равенство

$$T = N*\Delta t.$$

Согласно теории дискретизации Найквиста [5] трансформанта Фурье дискретных отсчётов

$$U_d(\omega) = \sum_{k=0}^{N} u_k \exp(-jk\Delta t\omega)$$

является периодической с периодом $\frac{2\pi}{\Delta t}$ функцией частоты, причем справедливо равенство Найквиста

$$\sum_{r=1}^{R} P_r = \sum_{k=0}^{N} u_k^2,$$

где P_r – часть энергии,

$$P_r = \int_{v\in V_r} \frac{|U_d(v/\Delta t)|^2 \, dv}{2\pi}, \tag{4}$$

попадающая в соответствующий частотный интервал

$$V_r = [-V_{2r}, -V_{1r}) \cup [V_{1r}, V_{2r}), V_{2R} = \pi.$$

В дальнейшем полагаем, что частотные интервалы также имеют одинаковую ширину, равную

$$\Delta V_r = [V_{2r} - V_{1r}) = \frac{\pi}{R}.$$

Ясно, что всегда можно отобрать минимальное количество $R_m < R$ частотных интервалов, удовлетворяющих условию

$$\sum_{\kappa \in K_b} P_r \geq m * \sum_{k=0}^{N} u_k^2 , \qquad (5)$$

то есть содержащих заданную долю энергии $m < 1$.

При этом объединение соответствующих частотных интервалов $V_S = \bigcup_{r \in R_m} V_r$ и определяет в общем случае составной частотный интервал

$$\Omega_S = \bigcup_{r \in R_m} \Omega_r , \qquad (6)$$

который должен фигурировать в представлении (3). Здесь важно учесть соотношение между соответствующими переменными (границами интервалов) $V_{ir} = \Delta t * \Omega_{ir}, i = 1,2; v = \Delta t * \omega$.

Для вычисления интегралов вида (4) следует использовать соотношения [6]

$$P_r = \vec{u}^T A_r \vec{u}, \vec{u} = (u_0, .., u_N)^T .$$

Здесь символ T означает операцию транспонирования векторов, а матрица имеет элементы

$$a_{ik}^r = \frac{\sin(V_{2r}(i-k)) - \sin(V_{1r}(i-k))}{\pi(i-k)}, i, k = 0, .., N .$$

В данной статье показывается, что описанная процедура определения частотных интервалов, в которых сосредоточена заданная доля энергии, открывает новые возможности для построения устойчивых вычислений оценок производных. Это направление представляется естественным именовать субполосным, имея в виду вычисление оценок для компоненты сигнала, обусловленных его энергией в заданной частотной полосе.

В самом деле, исходный непрерывный отрезок неизвестного кроме выборочных значений сигнала можно представить в виде

$$u(t) = x_S(t) + y(t); t \in [0, T] , \qquad (7)$$

где

$$x_S(t) = \int_{\omega \in \Omega_S} \frac{U_T(\omega) \exp(j\omega t) d\omega}{2\pi} . \qquad (8)$$

Здесь подынтегральная функция является трансформантой Фурье:

$$U_T(\omega) = \int_0^T u(t) \exp(-j\omega t) dt . \qquad (9)$$

Ясно, что искомая производная также представима в виде суммы

$$\frac{du(t)}{dt} = \frac{dx_S(t)}{dt} + \frac{dy(t)}{dt}; t \in (0, T) .$$

Если в определении (5) доля энергии m будет достаточно близкой к единице, то для регуляризации можно ограничиться оцениванием только производных первого из слагаемых в правой части последнего соотношения, полагая вторую компоненту обусловленной флуктуационными шумами. Таким образом, принцип регуляризации имеет вид

$$du(t)/dt \cong \frac{dx_S(t)}{dt}, t \in (0, T) .$$

Из определения (8), имея в виду представления (9) и (6), в котором объединяются непересекающиеся частотные интервалы, нетрудно получить следующее выражение для искомой компоненты:

$$x_S(t) = \int_0^T A_S(t-\tau)u(\tau)d\tau\,, \tag{10}$$

где

$$A_S(t) = \sum_{r\in R_m} A_r(t)\,;$$

$$A_r(t) = \int_{\omega\in\Omega_r} \frac{\exp(j\omega t)d\omega}{2\pi}\,.$$

После интегрирования получаем окончательное выражение

$$A_r(t) = \frac{\sin(\Omega_{2r}t) - \sin(\Omega_{1r}t)}{\pi t}\,. \tag{11}$$

Ясно, что подстановка выражения (11) в представление (4) позволяет получить следующее соотношение для производной

$$\frac{dx_S(t)}{dt} = \int_0^T B_S(t-\tau) * u(\tau)d\tau\,. \tag{12}$$

Здесь

$$B_S(t) = \frac{dA_S(t)}{dt} = \sum_{r\in R_m} \frac{t*(\Omega_{2r}\cos(\Omega_{2r}t) - \Omega_{1r}\cos(\Omega_{1r}t)) - \sin(\Omega_{2r}t) + \sin(\Omega_{1r}t)}{\pi t^2}\,.$$

Очевидно, что при наличии только отсчётов сигнала интеграл в (12) следует заменить интегральной суммой, положив

$$\frac{dx_S(t)}{dt} \approx \sum_{k=0}^{N} d_k * B(t-k\Delta t) * u_k\,,$$

где коэффициенты d_k, k=0,…,N определяются видом избранной квадратурной формулы.

Таким образом, правая часть последнего соотношения позволяет вычислить оценку производной сигнала, отражающего его свойства в некотором частотном интервале.

Легко понять, что представление (10) позволяет получить вычислительные формулы и для оценок производных высших порядков.

Литература

1. Бахвалов, Н.С.Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – М.: Бином, 2004.

2. Колесников, Е.Г. Введение в численный анализ / Е.Г. Колесников. – М.: Из-во РУДН, 2002.

3. Жиляков, Е.Г. Вариационный метод оценивания производных эмпирических функций / Е.Г. Жиляков, Ю.А. Фокин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2002. – Т.42. – № 8.

4. Жиляков, Е.Г. Вариационный метод дифференцирования и интерполяции дискретных сигналов / Е.Г. Жиляков, С.М. Чудинов, Т.Н. Созонова // Вопросы радиоэлектроники. Сер. РЛТ, – 2006. – Вып.1.

5. Рабинер, Л. Теория и применение цифровой обработки сигналов / Л. Рабинер, Б. Голд. – М.: Мир, 1978.

6. Жиляков, Е.Г. Вариационные методы анализа сигналов на основе частотных представлений / Е.Г. Жиляков, С.П. Белов, А.А. Черноморец // Вопросы радиоэлектроники. Сер. ЭВТ. – 2010. – Вып. 1. – С. 10-25.

DIFFERENTIATION OF SIGNALS ON DISCRETE READOUT ON THE BASIS OF FREQUENCY REPRESENTATIONS

E.G. ZHILYAKOV
A.A. CHERNOMORETS
N.S. PABOLKOVA

Belgorod State University

e-mail: Zhilyakov@bsu.edu.ru
e-mail: chernomorets@bsu.edu.ru

We propose a method for computing derivatives of components of signals localized in certain frequency intervals based on discrete samples of the signal. It is generalized for computations of derivatives of signals that contain fluctuating noise when energy of the signal is concentrated in limited frequency intervals.

Key words: signal, discrete samples, estimation of derivative, energy, frequency intervals, fluctuation noise.