УДК 517.958:531.72, 517.958:539.3(4)

МОДЕЛИРОВАНИЕ БЫСТРОПРОТЕКАЮЩИХ ПРОЦЕССОВ ФИЛЬТРАЦИИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ УСРЕДНЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУР: ОДНОСКОРОСТНОЙ КОНТИНУУМ[3)]

И.В. Некрасова

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: Nekrasova_i@bsu.edu.ru

Аннотация. В работе рассматривается линейная система дифференциальных уравнений, описывающая совместное движение упругого пористого тела и вязкой несжимаемой жидкости, заполняющей поры. В предположении периодичности структуры порового пространства и малости характерного времени процесса предлагается строгий вывод усредненных уравнений, которыми являются анизотропные уравнения Стокса для односкоростного континуума. Доказательство основано на методе Нгуетсенга двухмасштабной сходимости усреднения периодических структур.

Ключевые слова: уравнения Стокса, гидравлический разрыв, двухмасштабная сходимость, усреднение периодических структур.

1. Введение

В настоящей статье рассматривается задача о совместном движении деформируемого упругого тела, перфорированного системой каналов (пор), заполненных жидкостью. Такие среды называются упругими пористыми средами и являются достаточно хорошим приближением реальных консолидированных грунтов. Твёрдая компонента такой среды называется скелетом грунта, а область занятая жидкостью – поровым пространством. В безразмерных (не отмеченных штрихами) переменных

$$\boldsymbol{x}' = L\boldsymbol{x}, \quad t' = \tau t, \quad \boldsymbol{w}' = \frac{L^2}{g\tau^2}\boldsymbol{w}, \quad \rho'_s = \rho_0\rho_s, \quad \rho'_f = \rho_0\rho_f, \quad \boldsymbol{F}' = g\boldsymbol{F}\,,$$

дифференциальные уравнения модели для безразмерного вектора перемещений $\boldsymbol{w}$ в области $\Omega \in \mathbf{R}^3$ имеют вид:

$$\bar{\rho}\,\frac{\partial^2\boldsymbol{w}}{\partial t^2} = \mathrm{div}\mathbb{P} + \bar{\rho}\boldsymbol{F}\,, \tag{1}$$

$$\mathbb{P} = \bar{\chi}\alpha_\mu\mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t}\Big) + (1-\bar{\chi})\alpha_\lambda\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}) - p\,\mathbb{I}\,, \tag{2}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{w} = 0\,, \tag{3}$$

[3]Работа поддержана РФФИ (грант 03-01-11111).

$$p = \bar{\chi} p_f + (1 - \bar{\chi}) p_s \,. \tag{4}$$

Здесь и далее мы будем обозначать

$$\mathbb{D}(x, \boldsymbol{u}) = (1/2)\left(\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^T\right), \quad \bar{\rho} = \bar{\chi}\rho_f + (1 - \bar{\chi})\rho_s,$$

$\mathbb{I}$ – единичный тензор, p_f – давление жидкости, p_s – давление в твердом скелете, L – характерный макроскопический размер (размер рассматриваемой области), τ – характерное время процесса, ρ_f и ρ_s – средние безразмерные плотности жидкой и твердой фаз (отнесенные плотности воды ρ_0) соответственно, g – величина ускорения силы тяжести. Характеристическая функция порового пространства $\bar{\chi}(\boldsymbol{x})$ и вектор удельных массовых сил $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t)$ считаются известными.

Заметим, что предположение о несжимаемости жидкости автоматически влечет несжимаемость твёрдого скелета, поскольку скорость звука в твёрдой среде в несколько раз больше скорости звука в жидкости. А как известно, мерой несжимаемости (сжимаемости) является скорость звука – менее сжимаемая среда обладает большей скоростью звука. В силу этого уравнения неразрывности для жидкой и твердой компонент среды можно записать в виде одного уравнения (1.3), справедливого всюду в области Ω.

Дифференциальные уравнения (1)–(4) означают, что скорость $\boldsymbol{v} = \partial \boldsymbol{w}/\partial t$ удовлетворяет уравнениям Стокса в поровом пространстве Ω_f, а вектор перемещений $\boldsymbol{w}$ удовлетворяет уравнениям Ламэ в твёрдом скелете Ω_s.

На границе Γ "твёрдый скелет – поровое пространство" вектор перемещений $\boldsymbol{w}$ и давление жидкости p_f удовлетворяют условиям непрерывности перемещений

$$[\boldsymbol{w}](\boldsymbol{x}_0, t) = 0\,, \quad \boldsymbol{x}_0 \in \Gamma, \ t \geq 0 \tag{5}$$

и нормальных напряжений

$$[\mathbb{P} \cdot \mathbf{n}](\boldsymbol{x}_0, t) = 0, \quad \boldsymbol{x}_0 \in \Gamma, \ t \geq 0, \tag{6}$$

где $\mathbf{n}(\boldsymbol{x}_0)$ – вектор единичной нормали к границе в точке $\boldsymbol{x}_0 \in \Gamma$ и

$$[\varphi](\boldsymbol{x}_0, t) = \varphi_{(s)}(\boldsymbol{x}_0, t) - \varphi_{(f)}(\boldsymbol{x}_0, t),$$

$$\varphi_{(s)}(\boldsymbol{x}_0, t) = \lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{x} \in \Omega_s}} \varphi(\boldsymbol{x}, t), \quad \varphi_{(f)}(\boldsymbol{x}_0, t) = \lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{x} \in \Omega_f}} \varphi(\boldsymbol{x}, t).$$

Для простоты изложения считаем, что область Ω есть единичный куб $(0,1) \times (0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^3$.

Задача замыкается однородными начальными и граничными условиями

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, 0) = 0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}(\boldsymbol{x}, 0) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{7}$$

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, t) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in S_1, \tag{8}$$

$$(\mathbb{P} \cdot \mathbf{n})(\boldsymbol{x}, t) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in S_2, \tag{9}$$

где

$$S_2 = \{0 < x_1 < 1,\ 0 < x_2 < 1,\ x_3 = 1\},$$

$$\bar{S}_1 \bigcup \bar{S}_2 = S = \partial\Omega.$$

Безразмерные постоянные α_μ и α_λ определяются формулами

$$\alpha_\mu = \frac{2\mu\tau}{L^2\rho_0}, \quad \alpha_\lambda = \frac{2\lambda\tau^2}{L^2\rho_0},$$

где μ – вязкость жидкости, λ – упругая постоянная Ламэ.

Математическая модель (1)–(9) общепринята и содержит естественный малый параметр ε, которым является отношение среднего размера пор l к характерному размеру L рассматриваемой области:

$$\varepsilon = \frac{l}{L}.$$

Пусть выполнено следующее

Предположение 1.1. *Область $\Omega = (0,1)^3$ есть периодическое повторение элементарной ячейки $Y^\varepsilon = \varepsilon Y$, где $Y = (0,1)^3$ и величина $1/\varepsilon$ есть целое число так, что Ω всегда содержит целое число элементарных ячеек Y^ε. Пусть Y_s есть "твёрдая" часть Y, и ее "жидкая" часть Y_f есть открытое дополнение Y_s в Y и граница $\gamma = \partial Y_f \bigcap \partial Y_s$ между "жидкой" и "твёрдой" компонентами есть липшицева поверхность.*

Поровое пространство Ω_f^ε есть периодическое повторение элементарной ячейки εY_f, твёрдый скелет Ω_s^ε есть периодическое повторение элементарной ячейки εY_s а граница $\Gamma^\varepsilon = \partial\Omega_s^\varepsilon \bigcap \partial\Omega_f^\varepsilon$ есть периодическое повторение в Ω границы $\varepsilon\gamma$. Твёрдый скелет Ω_s^ε и "поровое пространство" Ω_f^ε являются связными множествами.

$$\bar{\chi}(\boldsymbol{x}) = \chi^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \chi(\boldsymbol{x}/\varepsilon),$$

$$\bar{\rho} = \rho^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \chi^\varepsilon(\boldsymbol{x})\rho_f + (1 - \chi^\varepsilon(\boldsymbol{x}))\rho_s,$$

где $\chi(\boldsymbol{y})$ – характеристическая функция Y_f в Y.

Нашей целью является нахождение предельного режима (усредненных уравнений) точной модели (1.1)-(1.9) при $\varepsilon \searrow 0$ в случае, когда

$$0 < \mu_0 < \infty, \quad \lambda_0 = 0, \quad \lambda_1 = \infty,$$

где

$$\mu_0 = \lim_{\varepsilon\searrow 0} \alpha_\mu(\varepsilon), \quad \lambda_0 = \lim_{\varepsilon\searrow 0} \alpha_\lambda(\varepsilon), \quad \lambda_1 = \lim_{\varepsilon\searrow 0} \frac{\alpha_\lambda}{\varepsilon^2}.$$

Отметим, что данный случай возникает при описании быстро протекающих физических процессов таких, например, как гидро-разрыв нефтяного пласта, когда длительность процесса исчисляется долями секунд. Случай условий Дирихле был рассмотрен в [1]. Там же можно найти соответствующую библиографию.

2. Формулировка основных результатов

Существуют различные эквивалентные в смысле теории распределений формы записи уравнений (1) в каждой из областей Ω_f^ε и Ω_s^ε и краевых условий (5)–(6) на границе Γ^ε между поровым пространством Ω_f^ε и твёрдым скелетом Ω_s^ε. Для нас будет удобной запись в виде интегральных тождеств.

Назовём функции $(\boldsymbol{w}^\varepsilon,\, p^\varepsilon)$ обобщённым решением задачи (1)–(9), если они удовлетворяют условиям регулярности

$$\boldsymbol{w}^\varepsilon,\ \mathbb{D}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}^\varepsilon),\ p^\varepsilon \in L^2(\Omega_T) \tag{10}$$

в области $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$, граничному условию (8), уравнению неразрывности

$$\operatorname{div} \boldsymbol{w}^\varepsilon = 0 \tag{11}$$

почти всюду в области Ω_T, интегральному тождеству

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_T}\Big(\rho^\varepsilon \boldsymbol{w}^\varepsilon\cdot\frac{\partial^2\boldsymbol{\varphi}}{\partial t^2} - \chi^\varepsilon\alpha_\mu\mathbb{D}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}^\varepsilon):\mathbb{D}(\boldsymbol{x},\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}) - \rho^\varepsilon\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\varphi}\, +\\ +\Big((1-\chi^\varepsilon)\alpha_\lambda\mathbb{D}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}^\varepsilon) - p^\varepsilon\mathbb{I}\Big):\mathbb{D}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varphi})\Big)d\boldsymbol{x}dt = 0\,,\end{aligned} \tag{12}$$

для всех гладких вектор-функций $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t)$ таких, что

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t) = 0,\ \boldsymbol{x}\in S_1,\ t>0;\quad \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},T) = \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}(\boldsymbol{x},T) = 0,\ \boldsymbol{x}\in\Omega\,.$$

Очевидно, что давление p^ε определяется с точностью до аддитивной постоянной. Фиксируем эту постоянную условием

$$\int_\Omega p^\varepsilon\, d\boldsymbol{x} = 0\,. \tag{13}$$

В (12) через $A:B$ обозначена свертка двух тензоров второго ранга по обоим индексам, т.е. $A:B = \operatorname{tr}(B^*\circ A) = \sum_{i,j=1}^3 A_{ij}B_{ji}$.

Теорема 1. *Пусть функции $\boldsymbol{F}$, $\partial\boldsymbol{F}/\partial t$ ограничены в $L^2(\Omega_T)$:*

$$\int_{\Omega_T}\left(|\boldsymbol{F}|^2 + \left|\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial t}\right|^2\right)d\boldsymbol{x}dt \le F^2\,.$$

Тогда при всех $\varepsilon>0$ на произвольном интервале времени $[0,T]$ существует единственное обобщенное решение задачи (1)–(9) и справедливы оценки

$$\sqrt{\alpha_\mu}\,\left\|\chi^\varepsilon\mathbb{D}\left(\boldsymbol{x},\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}(t)\right)\right\|_{2,\Omega} + \sqrt{\alpha_\lambda}\,\left\|(1-\chi^\varepsilon)\mathbb{D}\left(\boldsymbol{x},\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}(t)\right)\right\|_{2,\Omega} \le C_0F^2\,, \tag{14}$$

$$\sqrt{\alpha_\mu}\,\left\|\chi^\varepsilon \mathbb{D}\left(\boldsymbol{x}, \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right)\right\|_{2,\Omega_T} + \left\|\frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right\|_{2,\Omega} + \|p^\varepsilon(t)\|_{2,\Omega} \leq C_0 F^2, \qquad (15)$$

где C_0 не зависит от малого параметра ε и $t \in [0,T]$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы теоремы 1. Тогда:*

1) для функций $\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon/\partial t$ существует продолжение $\boldsymbol{v}^\varepsilon$ из $\Omega_f^\varepsilon \times (0,T)$ в Ω_T и

$$\|\boldsymbol{v}^\varepsilon(t)\|_{2,\Omega} \leq C_0 \left\|\chi^\varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{2,\Omega}, \quad \left\|\frac{\partial \boldsymbol{v}^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{2,\Omega} \leq C_0 \left\|\chi^\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right\|_{2,\Omega},$$

$$\int_\Omega |\mathbb{D}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}^\varepsilon)|^2\, dx \leq C_0 \int_\Omega \chi^\varepsilon \left|\mathbb{D}\left(\boldsymbol{x}, \frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\right)\right|^2 dx,$$

$$\int_{\Omega_T} \left|\mathbb{D}\left(\boldsymbol{x}, \frac{\partial \boldsymbol{v}^\varepsilon}{\partial t}\right)\right|^2 dxdt \leq C_0 \int_{\Omega_T} \chi^\varepsilon \left|\mathbb{D}\left(\boldsymbol{x}, \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2}\right)\right|^2 dxdt,$$

где C_0 не зависит от малого параметра ε и $t \in [0,T]$;

2)существует подпоследовательность из $\{\varepsilon > 0\}$ и 1 – периодические по переменной $\boldsymbol{y}$ функции $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t)$ и $P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t)$, такие что последовательности $\{\boldsymbol{v}^\varepsilon\}$ и $\{\partial \boldsymbol{v}^\varepsilon/\partial t\}$ сходятся сильно в $L^2(\Omega_T)$ и слабо в $L^2((0,T); W_2^1(\Omega))$ к функциям $\boldsymbol{v}$ и $\partial \boldsymbol{v}/\partial t$ соответственно, а последовательности $\{\mathbb{D}(x, \boldsymbol{v}^\varepsilon)\}$ и $\{\mathbb{D}(x, \partial \boldsymbol{v}^\varepsilon/\partial t)\}$ сходятся двухмасштабно в $L^2(\Omega_T)$ к функциям $\mathbb{D}(x, \boldsymbol{v}) + \mathbb{D}(y, \boldsymbol{U})$ и $\mathbb{D}(x, \partial \boldsymbol{v}/\partial t) + \mathbb{D}(y, \partial \boldsymbol{U}/\partial t)$ соответственно;

3)последовательности $\{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon/\partial t\}$ и $\{\partial^2 \boldsymbol{w}^\varepsilon/\partial t^2\}$ сходятся двухмасштабно в $L^2(\Omega_T)$ к функциям $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ и $\partial \boldsymbol{v}/\partial t(\boldsymbol{x}, t)$ соответственно;

4) последовательности $\{p^\varepsilon\}$ $\{\chi^\varepsilon p^\varepsilon\}$ и $\{(1-\chi^\varepsilon)p^\varepsilon\}$ сходятся слабо в $L^2(\Omega_T)$ к функциям $p = p_f + p_s$, p_f и p_s соответственно и двухмасштабно в $L^2(\Omega_T)$ к функциям P, $\chi(\boldsymbol{y})P$ и $(1/(1-m)\big(1-\chi(\boldsymbol{y})\big)p_s(\boldsymbol{x}, t)$ соответственно;

5) функция $\boldsymbol{v}$ обращается в ноль на части S_1 границы S, то есть

$$\int_0^T \int_{S_1} |\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x} + \delta \boldsymbol{n}, t)|\, d\sigma dt \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to 0,$$

где $\boldsymbol{n}$ – вектор единичной нормали к границе S_1 в точке $\boldsymbol{x}$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда слабые и сильные пределы p_f, p_s и $\boldsymbol{v}$ удовлетворяют в Ω_T начально-краевой задаче*

$$\hat{\rho} \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \operatorname{div} \tilde{\mathbb{P}} + \hat{\rho}\, \boldsymbol{F}, \qquad (16)$$

$$\tilde{\mathbb{P}} = \mu_0 \mathbb{A}_0^f : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{v}) - p\,\mathbb{I}, \qquad (17)$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \qquad (18)$$

где $\hat{\rho} = m\rho_f + (1-m)\rho_s$, $m = \int_Y \chi dy$ – пористость среды.

Симметричный строго положительно определенный постоянный тензор четвертого ранга $\mathbb{A}_0^f$ дается ниже формулой (45).

Дифференциальные уравнения (16) замыкаются однородными краевыми и начальными условиями

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},0)=0, \quad \boldsymbol{x}\in\Omega;$$

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)=0, \quad \boldsymbol{x}\in S_1\,, \quad (\tilde{\mathbb{P}}\cdot\mathbf{n})(\boldsymbol{x},t)=0, \quad \boldsymbol{x}\in S_2\,, \quad t>0. \tag{19}$$

3. Доказательство теоремы 1

Оценки (14) и (15) для перемещений следуют из энергетического тождества в форме

$$\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega \rho^\varepsilon\left(\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2}\right)^2 dx \; + \alpha_\lambda\int_\Omega (1-\chi^\varepsilon)\mathbb{D}\left(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\right):\mathbb{D}\left(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\right)dx\right)$$

$$+\,\alpha_\mu\int_\Omega \chi^\varepsilon\mathbb{D}\left(x,\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2}\right):\mathbb{D}\left(x,\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2}\right)dx=\int_\Omega\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2}\,dx\,. \tag{20}$$

Последнее получается после дифференцирования уравнения для $\boldsymbol{w}^\varepsilon$ по времени, умножения на $\partial^2\boldsymbol{w}^\varepsilon/\partial t^2$ и интегрирования по частям. Заметим, что все слагаемые не границе Γ^ε «твёрдый скелет – поровое пространство» исчезают, благодаря граничным условиям (5)–(6). Используя неравенства Гёльдера и Гронуолла в (20), получаем требуемые оценки (14) и (15) для перемещений. Эти же оценки гарантирует существование и единственность обобщенного решения задачи (1)–(9). Для этого достаточно воспользоваться методом Галеркина, рассмотрев в качестве базового пространство соленоидальных функций из $W_2^1(\Omega)$, удовлетворяющих условию (8), а в качестве базиса – любой базис, ортонормированный в скалярном произведении пространства $L^2(\Omega)$.

Для оценки давлений мы используем интегральное тождество (12) в форме

$$\int_\Omega p^\varepsilon \operatorname{div}\boldsymbol{\psi}dx=$$

$$\int_\Omega\left(\rho^\varepsilon\left(\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2}-\boldsymbol{F}\right)\cdot\boldsymbol{\psi}\;+\;\left(\chi^\varepsilon\alpha_\mu\mathbb{D}\left(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\right)+(1-\chi^\varepsilon)\alpha_\lambda\mathbb{D}\left(x,\boldsymbol{w}^\varepsilon\right)\right):\mathbb{D}(x,\boldsymbol{\psi})\right)dx\,,$$

Рассматривая давление p^ε как линейный функционал на пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, мы получаем

$$\left|\int_\Omega p^\varepsilon \operatorname{div}\boldsymbol{\psi}dx\right|\le C_0\max_{0\le t\le T}\|\boldsymbol{\psi}(t)\|_{W_2^1(\Omega)}\,,$$

где C_0 не зависит от малого параметра ε.

Выбирая функцию $\boldsymbol{\psi}$ такой, что $\operatorname{div}\boldsymbol{\psi}=p^\varepsilon$, мы получаем

$$\max_{0\le t\le T}\|\operatorname{div}\boldsymbol{\psi}(t)\|_\Omega^2=\max_{0\le t\le T}\|p^\varepsilon(t)\|_\Omega^2\;\le\;C_0\max_{0\le t\le T}\|\boldsymbol{\psi}(t)\|_{W_2^1(\Omega)}\,. \tag{21}$$

Такой выбор $\boldsymbol{\psi}$ всегда возможен (см. [2]), если положить

$$\boldsymbol{\psi} = \nabla\varphi + \boldsymbol{\psi_0}\,,$$

где

$$\triangle\varphi = p^{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega\,, \quad \varphi = 0, \quad \boldsymbol{x} \in S\,, \tag{22}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{\psi}_0 = 0\,, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega\,, \quad \boldsymbol{\psi_0} = -\nabla\varphi\,, \quad \boldsymbol{x} \in S. \tag{23}$$

Продолжая решение φ задачи (22) как нечетную функцию на границе S мы получаем

$$\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^2\,(\Omega) \quad \text{и} \quad \max_{0\leq t\leq T} \|\nabla\varphi(t)\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C \max_{0\leq t\leq T} \|p^{\varepsilon}(t)\|_{\Omega}\,.$$

Далее, рассматриваем решение $\boldsymbol{\psi}_0$ задачи (23) как решение системы Стокса:

$$\triangle\boldsymbol{\psi}_0 + \nabla q = 0,\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{\psi_0} = 0,\ \boldsymbol{x} \in \Omega$$

с неоднородным граничным условием

$$\boldsymbol{\psi_0} = -\nabla\varphi,\ \boldsymbol{x} \in S.$$

Задача имеет единственное решение, такое что

$$\max_{0\leq t\leq T} \|\boldsymbol{\psi}_0(t)\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C \max_{0\leq t\leq T} \|\nabla\varphi(t)\|_{W_2^1(\Omega)}\,,$$

тогда и только тогда, когда

$$\int_{\Omega} \mathrm{div}(\nabla\varphi)dx \equiv \int_{\Omega} \Delta\varphi dx = \int_{\Omega} p^{\varepsilon} dx = 0.$$

Справедливость последнего следует из условия (13). Используя все оценки, мы получим желаемые ограничения для давления p^{ε}. В итоге, благодаря тому, что произведение двух функций p^{ε} и $(1-\chi^{\varepsilon})p^{\varepsilon}$ равно нулю, приходим к ограниченности каждого из давлений.

4. Доказательство теоремы 2

Первое утверждение теоремы есть результат работы [3].

Оценки (14) и (15) Теоремы 1 и теорема Нгуетсенга [4] доказывают второе утверждение теоремы.

Третье утверждение теоремы вытекает из следующей леммы.

Лемма 4.1. *Слабые и двухмасштабные пределы последовательностей* $\{\boldsymbol{v}^{\varepsilon}\}$ *и* $\{\partial\boldsymbol{w}^{\varepsilon}/\partial t\}$ *совпадают.*

□ Пусть $\Psi(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$ – произвольная гладкая функция периодическая по $\boldsymbol{y}$. Последовательность $\{\sigma_{ij}^{\varepsilon}\}$, где

$$\sigma_{ij}^{\varepsilon} = \int_{\Omega} \sqrt{\alpha_\lambda}\,\frac{\partial^2 w_i^{\varepsilon}}{\partial x_j \partial t}(\boldsymbol{x},t)\,\Psi(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{x}/\varepsilon)dx, \quad \boldsymbol{w}^{\varepsilon} = (w_1^{\varepsilon}, w_2^{\varepsilon}, w_3^{\varepsilon})$$

равномерно ограничена по ε. Следовательно,

$$\int_\Omega \varepsilon \frac{\partial^2 w_i^\varepsilon}{\partial x_j \partial t}(\boldsymbol{x},t)\,\Psi(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{x}/\varepsilon)dx = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\alpha_\lambda}}\sigma_{ij}^\varepsilon \to 0$$

при $\varepsilon \searrow 0$, что эквивалентно следующему:

$$\int_\Omega\int_Y \frac{\partial W_i}{\partial t}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})\,\frac{\partial \Psi}{\partial y_j}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})dxdy = 0\,, \quad \boldsymbol{W} = (W_1,W_2,W_3),$$

или

$$\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}) = \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t)\,.$$

Переходя к двухмасштабному пределу при $\varepsilon \searrow 0$ в равенстве

$$\chi^\varepsilon\left(\boldsymbol{v}^\varepsilon - \frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\right) = 0$$

мы приходим к утверждению леммы. ■

Пятое утверждение теоремы есть следствие леммы:

Лемма 4.2. *Пусть функции*

$$\boldsymbol{v}^\varepsilon \in L^2(0,T;W_2^1(\Omega))$$

и $\boldsymbol{v}^\varepsilon = 0$ *в части* $\sigma^\varepsilon = S_0 \cap S_f^\varepsilon \subset S_f^\varepsilon = \partial\Omega_f^\varepsilon \cap \partial\Omega$ *границы* $S = \partial\Omega$, *последовательность* $\{\boldsymbol{v}^\varepsilon\}$ *сходится слабо в* $L^2(0,T;\mathring{W}_2^1(\Omega))$ *к функции* $\boldsymbol{v}$.

Тогда $\boldsymbol{v} = 0$ *в части* S_0 *границы* S, *то есть*

$$\int_0^T\int_{S_0} |\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{n},t)|\,d\sigma dt \to 0 \quad \textit{при} \quad \delta \to 0\,,$$

где $\boldsymbol{n}$ *– вектор единичной нормали к границе* S *в точке* $\boldsymbol{x}$.

□ В качестве упрощающего допущения примем $S_0 = S \cap \{x_3 = 0\}$. Пусть $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}',t) = \boldsymbol{\varphi}(x_1,x_2,t)$ – гладкая финитная в S_0 вектор-функция. Утверждение леммы эквивалентно тождеству

$$\int_0^T\int_\Omega \boldsymbol{\varphi}\left(\boldsymbol{v}\frac{d\psi}{dx_3} + \psi\frac{d\boldsymbol{v}}{dx_3}\right)dxdt = 0 \tag{24}$$

для некоторой гладкой функции $\psi = \psi(x_3)$, такой что

$$\psi \equiv 1 \quad \text{при} \quad x_3 = 0 \quad \text{и} \quad \psi \equiv 0 \quad \text{при} \quad x_3 = 1.$$

Это следует из очевидного тождества

$$\int_0^T\int_\Omega \boldsymbol{\varphi}\left(\boldsymbol{v}^\varepsilon\frac{d\psi}{dx_3} + \psi\frac{d\boldsymbol{v}^\varepsilon}{dx_3}\right)dxdt = -\int_0^T\int_{S_0} \boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{v}^\varepsilon\,d\sigma dt \equiv J^\varepsilon,$$

если мы покажем, что

$$J^{\varepsilon} \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Для этого рассмотрим все подобласти $\Omega^{\varepsilon}_{(k)} = \varepsilon Y + \boldsymbol{x}^{(k)}$, прилегающие к границе S_0. Пусть

$$\tilde{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{y},t) = \boldsymbol{v}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t), \quad \text{где} \quad \boldsymbol{x} = \varepsilon \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}^{(k)}.$$

По условию леммы существует прямоугольник

$$\sigma_0 = \{\boldsymbol{y}' : \alpha_1 < y_1 < \beta_1,\ \alpha_2 < y_2 < \beta_2\},$$

такой что $\tilde{\boldsymbol{v}} = 0$ на σ_0. Пусть

$$Q = \{\boldsymbol{y} : \alpha_1 < y_1 < \beta_1,\ \alpha_2 < y_2 < \beta_2\,, 0 < y_3 < 1\}.$$

Тогда действует неравенство Пуанкаре-Фридрихса

$$\int_Q |\tilde{\boldsymbol{v}}|^2\, d\boldsymbol{y} \leq \int_Q |\nabla_y \tilde{\boldsymbol{v}}|^2\, d\boldsymbol{y}. \tag{25}$$

Далее мы рассматриваем параллелепипед

$$G = \{\boldsymbol{y} : \alpha_1 < y_1 < \beta_1,\ 0 < y_2 < 1,\ 0 < y_3 < 1\}\,.$$

Интегрируя равенство

$$|\tilde{\boldsymbol{v}}|^2(\boldsymbol{y}) = |\tilde{\boldsymbol{v}}|^2(y_1,\xi,y_3) + 2\int_{y_2}^{\xi} \tilde{\boldsymbol{v}}(y_1,s,y_3)\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{v}}}{\partial y_2}(y_1,s,y_3)\, ds$$

по переменной ξ в интервале (α_2,β_2), затем по переменной y_1 в интервале (α_1,β_1), затем по переменным y_2 и y_3 в интервале $(0,1)$ и оценивая правую часть с использованием неравенства Гёльдера и (25) получим

$$\int_G |\tilde{\boldsymbol{v}}|^2\, d\boldsymbol{y} \leq C\int_G |\nabla_y \tilde{\boldsymbol{v}}|^2\, d\boldsymbol{y}.$$

Повторяя последнюю процедуру еще раз для переменной y_1, получим

$$\int_Y |\tilde{\boldsymbol{v}}|^2\, d\boldsymbol{y} \leq C\int_Y |\nabla_y \tilde{\boldsymbol{v}}|^2\, d\boldsymbol{y}\,. \tag{26}$$

Возвращаясь к исходным переменным, имеем

$$\int_{\Omega^{\varepsilon}_{(k)}} |\boldsymbol{v}|^2\, d\boldsymbol{x} \leq C\varepsilon^2\int_{\Omega^{\varepsilon}_{(k)}} |\nabla_x \boldsymbol{v}|^2\, d\boldsymbol{x}\,. \tag{27}$$

Пусть Q^{ε} – объединение всех $\Omega^{\varepsilon}_{(k)}$, прилегающих к границе S_0. Тогда

$$\int_{Q^{\varepsilon}} |\boldsymbol{v}|^2\, d\boldsymbol{x} \leq C\varepsilon^2\int_{Q^{\varepsilon}} |\nabla_x \boldsymbol{v}|^2\, d\boldsymbol{x}\,. \tag{28}$$

Как и в предыдущем случае, рассматривая представление

$$|\boldsymbol{v}^\varepsilon|^2(\boldsymbol{x}',0) = |\boldsymbol{v}^\varepsilon|^2(\boldsymbol{x}',x_3) + 2\int_0^{x_3} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}',s)\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}',s)\,ds\,,$$

покажем, что

$$\varepsilon\int_{S_0}|\boldsymbol{v}^\varepsilon|^2\,d\boldsymbol{x}' \leq \int_{Q^\varepsilon}|\boldsymbol{v}^\varepsilon|^2\,d\boldsymbol{x} + 2\varepsilon\left(\int_{Q^\varepsilon}|\boldsymbol{v}^\varepsilon|^2\,d\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{Q^\varepsilon}|\nabla_x\boldsymbol{v}^\varepsilon|^2\,d\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

или, учитывая (28),

$$\int_{S_0}|\boldsymbol{v}^\varepsilon|^2\,d\boldsymbol{x} \leq C\varepsilon\int_{Q^\varepsilon}|\nabla_x\boldsymbol{v}^\varepsilon|^2\,d\boldsymbol{x}\,.$$

Следовательно

$$|J^\varepsilon| \leq \left(\int_0^T\int_{S_0}|\boldsymbol{v}^\varepsilon|^2\,d\boldsymbol{x}dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T\int_{S_0}|\boldsymbol{\varphi}|^2\,d\boldsymbol{x}dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\left(\varepsilon\int_0^T\int_{Q^\varepsilon}|\nabla_x\boldsymbol{v}^\varepsilon|^2\,d\boldsymbol{x}dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

и

$$J^\varepsilon \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0\,.$$

Далее покажем, что тождество (24) заключает в себе утверждение леммы. Полагаем

$$u(x_3) = \int_0^T\int_{S_0}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}',t)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)\,d\boldsymbol{x}'dt\,.$$

Тогда имеем

$$\int_0^1\left(u(s)\frac{d\psi}{ds}(s) \;+\; \psi\frac{du}{ds}(s)\right)\,ds = 0\,. \tag{29}$$

Заметим, что функция u непрерывна. Следовательно, выбирая в качестве ψ кусочно-линейную функцию, такую что $\psi(s) = 1$ при $0 < s < x_3$, и $\psi(s) = 0$ при $s > x_3 + \delta$, переходя к пределу при $\delta \to 0$, получаем следующее равенство

$$u(x_3) = \int_0^{x_3}\frac{du}{ds}(s)\,ds\,,$$

или

$$\int_0^T\int_{S_0}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}',t)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)\,d\boldsymbol{x}'dt = \int_0^T\int_0^{x_3}\int_{S_0}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}')\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial s}(\boldsymbol{x}',s,t)\,d\boldsymbol{x}dt\,. \tag{30}$$

Далее, для фиксированного x_3 принимаем $\boldsymbol{\varphi} = \operatorname{sgn}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$. Тогда

$$\int_0^T\int_{S_0}|\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}',x_3,t)|\,d\boldsymbol{x}'dt \leq Cx_3\,. \quad \blacksquare$$

Наконец, четвертое утверждение теоремы доказывается, наряду с другими утверждениями в нижеследующей лемме.

Лемма 4.3 *Для почти всех* $(\boldsymbol{x}, t) \in \Omega_T$ *и* $\boldsymbol{y} \in Y$ *слабые и двухмасштабные пределы последовательностей* $\{\chi^\varepsilon p^\varepsilon\}$, $\{(1-\chi^\varepsilon)p^\varepsilon\}$, $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon\}$ *и* $\{\boldsymbol{v}^\varepsilon\}$ *удовлетворяют соотношениям*

$$P_s = p_s \frac{(1-\chi)}{(1-m)}, \quad P_f = \chi P_f, \tag{31}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \tag{32}$$

$$\chi \operatorname{div}_y \boldsymbol{V} = 0. \tag{33}$$

□ Для доказательства (31), в интегральное тождество (12) подставим пробную функцию вида $\boldsymbol{\psi}^\varepsilon = \varepsilon \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{x}/\varepsilon)$, где $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$ – произвольная 1-периодическая, финитная в области Y_s функция от $\boldsymbol{y}$. Переходя к пределу при $\varepsilon \searrow 0$, мы получим

$$\nabla_y P_s(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) = 0, \quad \boldsymbol{y} \in Y_s. \tag{34}$$

Далее, осуществляя двухмасштабный предельный переход в равенстве

$$\chi^\varepsilon \left((1-\chi^\varepsilon)p^\varepsilon\right) = 0,$$

получим

$$\chi P_s = 0,$$

что вместе с (34) доказывает (31).

Для доказательства (32) достаточно рассмотреть уравнение неразрывности в виде

$$\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t} \cdot \nabla \varphi(\boldsymbol{x}, t) dx dt = 0,$$

справедливое для всякой гладкой финитной в Ω_T функции φ, и перейти к пределу при $\varepsilon \searrow 0$. Для доказательства (33), достаточно рассмотреть двухмасштабный предел в уравнении (11) при $\varepsilon \searrow 0$ с пробными функциями вида $\varepsilon \psi(\boldsymbol{x}/\varepsilon)\, h(\boldsymbol{x}, t)$, где ψ и h – произвольные гладкие функции и учесть (32). ■

5. Доказательство теоремы 3

Доказательство теоремы разобьем на ряд независимых утверждений.

Лемма 4.4. *Для всех* $(\boldsymbol{x}, t) \in \Omega_T$ *выполняется соотношение*

$$\operatorname{div}_y \left(\mu_0 \chi (\mathbb{D}(y, \boldsymbol{V}) + \mathbb{D}(x, \boldsymbol{v})) - \left(P_f + \frac{(1-\chi)}{(1-m)} p_s \right), \mathbb{I} \right) = 0. \tag{35}$$

□ Подставляя пробную функцию вида $\boldsymbol{\psi}^\varepsilon = \varepsilon \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{x}/\varepsilon)$, где $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$ – произвольная 1-периодическая в $\boldsymbol{y}$ функция, исчезающая на границе S_1, в интегральное тождество

(12), и переходя к пределу при $\varepsilon \searrow 0$, получим уравнение (35), которое можно также переписать в виде

$$\operatorname{div}_y \left(\chi \left(\mu_0(\mathbb{D}(y, \boldsymbol{V}) + \mathbb{D}(x, \boldsymbol{v})) - \left(P_f - \frac{1}{(1-m)} p_s \right) \mathbb{I} \right) \right) = 0 . \quad \blacksquare \tag{36}$$

Лемма 4.5. *Пусть $\hat{\rho} = m\rho_f + (1-m)\rho_s$. Тогда функции $\boldsymbol{v}$ и p удовлетворяют в Ω_T системе макроскопических уравнений*

$$\hat{\rho}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} - \hat{\rho}\boldsymbol{F} = \operatorname{div}\left\{\mu_0(m\mathbb{D}(x, \boldsymbol{v}) + \langle\, \mathbb{D}(y, \boldsymbol{V})\,\rangle_{Y_f}) - p \cdot \mathbb{I}\right\}, \tag{37}$$

и однородному начальному условию

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, 0) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega. \tag{38}$$

$\square$ Уравнения (37) и начальное условие (38) есть результат предельного перехода в тождестве (12) с пробными функциями, не зависящими от ε в Ω_T. $\blacksquare$

Лемма 4.6. *Слабые пределы $\boldsymbol{v}$, p_f и p_s удовлетворяют в Ω_T начально-краевой задаче*

$$\hat{\rho}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = div\tilde{\mathbb{P}} + \hat{\rho}\boldsymbol{F}, \tag{39}$$

$$\tilde{\mathbb{P}} = \mu_0 \mathbb{A}^f_0 : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{v}) - p\,\mathbb{I}, \tag{40}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \tag{41}$$

где симметричный строго положительно определенный тензор четвертого ранга $\mathbb{A}^f_0$ определён ниже формулой (45).

Дифференциальные уравнения (39) дополняются однородными начальными и краевыми условиями

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, 0) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega;$$
$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in S_1, \quad (\tilde{\mathbb{P}} \cdot \mathbf{n})(\boldsymbol{x}, t) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in S_2, \quad t > 0. \tag{42}$$

$\square$ Усредненные уравнения (39) следуют из макроскопических уравнений (36), после подстановки в них выражения

$$\mu_0\langle \mathbb{D}(y, \boldsymbol{V})\rangle_{Y_f} = \mu_0 \mathbb{A}^f_1 : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{v}).$$

В свою очередь, последняя формула есть результат решения уравнений (33) и (36) на элементарной ячейке Y_f.

Действительно, полагая

$$\boldsymbol{V} = \sum_{i,j=1}^{3} \boldsymbol{V}^{(ij)}(\boldsymbol{y}) D_{ij},$$

$$\left(P_f - \frac{1}{(1-m)}p_s\right)\mathbb{I} = \mu_0 \sum_{i,j=1}^{3} P^{ij}(\boldsymbol{y})D_{ij}\,,$$

где

$$D_{ij}(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x},t) + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{x},t)\right)\,,$$

получим следующую периодическую краевую задачу в Y:

$$\operatorname{div}_y\,\left(\chi\left(\mathbb{D}(y,\boldsymbol{V}^{(ij)}) - P^{(ij)}\mathbb{I} + \mathbb{J}^{ij}\right)\right) = 0\,, \tag{43}$$

$$\chi\operatorname{div}_y \boldsymbol{V}^{(ij)} = 0\,. \tag{44}$$

Как следует из предположения о геометрии "жидкой" части ячейки Y_f, задача (43)–(44) имеет единственное решение, с точностью до постоянного вектора. С целью исключения произвола потребуем, чтобы

$$\langle \boldsymbol{V}^{(ij)}\rangle_{Y_f} = 0\,.$$

Таким образом

$$\mathbb{A}_0^f = m\,\mathbb{J}\;+\;\mathbb{A}_1^f\,,\quad \mathbb{A}_1^f = \sum_{i,j=1}^{3}\langle\,\mathbb{D}(y,\boldsymbol{V}^{(ij)})\,\rangle_{Y_f}\otimes\mathbb{J}^{ij}\,, \tag{45}$$

Симметричность тензора $\mathbb{A}_0^f$ следует из симметричности тензора $\mathbb{A}_1^f$. Симметричность последнего следует из равенства

$$\langle\,\mathbb{D}(y,\boldsymbol{V}^{(ij)})\,\rangle_{Y_f} : \mathbb{J}^{kl} = -\langle\,\mathbb{D}(y,\boldsymbol{V}^{(ij)}) : \mathbb{D}(y,\boldsymbol{V}^{(kl)})\,\rangle_{Y_f} \tag{46}$$

которое, в свою очередь, является результатом умножения уравнения (43) для функции $\boldsymbol{V}^{(ij)}$ на $\boldsymbol{V}^{(kl)}$ и интегрирования по частям.

Это же равенство доставляет нам положительную определенность тензора $\mathbb{A}_0^f$. Действительно, пусть $\mathbb{Z} = (Z_{ij})$ есть произвольная симметричная матрица. Полагая

$$\mathbf{Z} = \sum_{i,j=1}^{3}\boldsymbol{V}^{(ij)}Z_{ij}$$

и учитывая (46) получаем

$$\langle\,\mathbb{D}(y,\mathbf{Z})\,\rangle_{Y_f} : \mathbb{Z} = -\langle\,\mathbb{D}(y,\mathbf{Z}) : \mathbb{D}(y,\mathbf{Z})\,\rangle_{Y_f}\,.$$

Последнее равенство и определение тензора $\mathbb{A}_0^f$ дают

$$(\mathbb{A}_0^f : \mathbb{Z}) : \mathbb{Z} = \langle(\mathbb{D}(y,\mathbf{Z}) + \mathbb{Z}) : (\mathbb{D}(y,\mathbf{Z}) + \mathbb{Z})\rangle_{Y_f}\,.$$

Строгая положительная определенность тензора $\mathbb{A}_0^f$ следует теперь из вышеприведенного равенства и геометрии элементарной ячейки Y_f. А именно, положим $(\mathbb{A}_0^s : \mathbb{Z}) : \mathbb{Z} = 0$ для некоторой матрицы $\mathbb{Z}$, такой что $\mathbb{Z} : \mathbb{Z} = 1$. Тогда $(\mathbb{D}(y, \mathbf{Z}) + \mathbb{Z}) = 0$, что возможно если, и только если $\mathbf{Z}$ – линейная функция переменной $\boldsymbol{y}$. С другой стороны, все линейные периодические функции в Y_f исчерпываются постоянными. Наконец, нормировка $\langle \boldsymbol{V}^{(ij)} \rangle_{Y_f} = 0$ влечет равенство $\mathbf{Z} = 0$. Последнее невозможно, поскольку функции $\boldsymbol{V}^{(ij)}$ линейно независимы. ■

Литература

1. Meirmanov A. Homogenized models for a short-time filtration in elastic porous media // EJDE. – 2007. – 18. – P.481-496.
2. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О.А. Ладыженская. – М.: Наука,1970.
3. Conca C. On the application of the homogenization theory to a class of problems arising in fluid mechanics // J. math. pures et appl. – 1985. – 64. – P.31-75.
4. Nguetseng G. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization // SIAM J. Math. Anal. – 1989. – 20. – P.608-623.

MATHEMATICAL MODELING OF SHORT-TIME FILTRATION OF IMCOMPRESSIBLE FLUID. THE AVERAGE OF PERIODIC STRUCTURES AND THE ONE-VELOCITY CONTINUUM

I.V. Nekrasova

Belgorod State University,

Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: Nekrasova_i@bsu.edu.ru

Abstract. The linear system of differential equations describing the joint motion of elastic porous body and the viscous imcompressible fluid that occupies its porous space. We suppose that the porous space is periodical and the characteristic time of process is small enough. It is proposed the deduction of averaged equations which are non-isotropic Stokes equations in the one-velocity continuum. Our proof is based on Nguetseng's two-scale convergence method at the average in periodic structures.

Key words: Stokes equations, hydraulic discontinuity, two-scale convergence, homogenization of periodic structures.