УДК 303.732.4

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ МОДЕЛИ ФИНАНСОВЫХ НАКОПИТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

М. Ф. ТУБОЛЬЦЕВ

Белгородский государственный университет

e-mail: Tuboltsev@bsu.edu.ru

Рассматриваются вопросы моделирования нестационарных финансовых процессов накопительного типа. Отличительной особенностью постановки рассматриваемой здесь задачи оптимизации является то, что оптимизация осуществляется в условиях изменчивости процентных ставок и мощности источника финансирования.

Такая модель создания накопительных фондов более адекватно отражает реальную ситуацию, чем в стационарном случае, поскольку появляется возможность учесть временное прекращение финансирования и т.п.

Ключевые слова: финансовые потоки, оптимизация, накопительные фонды, моделирование, компьютерное моделирование.

Введение

Накопительные фонды являются хорошей альтернативой заимствованиям в качестве инструмента финансирования инвестиционных проектов [1]. Теория оптимизации накопительного процесса является проработанной в стационарном случае [2, 3, 4]. Однако ряд ограничений, связанных со стационарностью, в условиях экономического кризиса являются не вполне адекватными и затрудняют практическое использование методов оптимизации накопительных фондов. Ограничение на постоянство источника финансирования накопительных фондов, в частности, не позволяет моделировать временное прекращение финансирования. В настоящее время мощность источников финансирования уменьшилась по сравнению с докризисным периодом, но по мере преодоления кризиса, она снова будет увеличиваться. Трудно сколько-нибудь точно предсказать возможные изменения в уровне процентных ставок и мощности источника финансирования накопительных фондов, но в целях прогнозирования допустимо использовать экспертные оценки. В этом случае и процентные ставки, и мощность источника финансирования можно считать кусочно-постоянными функциями времени.

Нестационарная математическая модель процесса формирования накопительных фондов имеет вид:

$$
\begin{aligned}
& Z \to \min, \\
& \dot{x}_i(t) = p_i(t)x_i(t) + u_i(t), \\
& \mathrm{x_i(t_н) = 0,\ x_i(t_к) = S_i}, \\
& \mathrm{u_i(t) \ge 0}, \\
& \sum_{i=1}^{N} u_i(t) \le \mathrm{U(t)}, \\
& \mathrm{U(t) \ge 0.}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Здесь функция времени $x_i(t)$, i=1,2,…N, представляет собой размер фонда с номером i в момент времени t, общее число фондов N, точкой обозначен оператор дифференцирования по времени, $p_i(t)=\ln(1+r_i(t))$, а $r_i(t)$ – процентная ставка, начисляемая на средства соответствующего фонда. В начальный момент времени $t_н$, когда фонды только начинают создаваться, их размеры равны 0; а к некоторому моменту времени $t_к$ все фонды должны иметь фиксированные заранее заданные размеры $S_i>0$.

Вложения в накопительные фонды $u_i(t)$ не могут быть отрицательными, а их сумма не может превышать мощности источника финансирования. Сам источник финансирования не постоянен, а его мощность $U(t)$ есть некоторая измеримая интегрируемая на отрезке $[t_н,t_к]$ функция, при этом на практике можно считать, что $U(t)$ – кусочно-постоянная функция.

В задачах оптимизации процессов создания накопительных фондов критерии качества процесса их формирования задаются в виде целевых функций. С теоретической и практической точек зрения наиболее важными являются задачи скорейшего накопления фондов и минимального вложения средств. Их целевые функции имеют следующий вид:

$$Z = \begin{cases} \int\limits_{t_н}^{t_к} 1dt = t_к - t_н, & \text{для задачи быстродействия,} \\ \int\limits_{t_н}^{t_к} \sum\limits_{i=1}^{N} u_i(t)dt, & \text{для задачи минимизации вложений.} \end{cases} \qquad (2)$$

В условиях стационарности обе задачи имеют простые алгоритмы решения [2,3], которые легко могут быть реализованы с использованием электронных таблиц или математических пакетов.

В нестационарном случае требуется создание компьютерных систем для моделирования процессов накопления фондов с использованием современных средств разработки, распараллеливанием вычислительных процессов и применением мощных вычислительных платформ [4].

Теоретический анализ

Принцип максимума Понтрягина позволяет дать эффективное решение рассматриваемой оптимизационной задачи (1) [5,6]. Введем обозначение:

$$P_i(t) = \int\limits_{t_н}^{t} p_i(s)ds, \qquad (3)$$

т.е. $P_i(t)$ есть одна из первообразных для силы роста $p_i(t)$ фонда с номером i. Тогда имеет место равенство:

$$x_i(t) = \int\limits_{t_н}^{t} e^{P_i(t)-P_i(s)} u_i(s)ds. \qquad (4)$$

Полученные решения можно считать полностью определенными, только когда известны управления $u_i(t)$, а они полностью зависят от $y=(y_1,y_2,...y_N)$ – вектора решений сопряженной системы уравнений:

$$\dot{y}_i(t) = -p_i(t)y_i(t). \qquad (5)$$

Система сопряженных уравнений (5) имеет очевидные решения

$$y_i(t) = C_i e^{-P_i(t)}. \qquad (6)$$

В стационарном случае, когда $U(t)=U$, а $P_i(t)=p_i t$, решения сопряженной системы уравнений могут пересекаться самое большее в одной точке. Поэтому управления устроены очень просто:

$$u_i(t) = \begin{cases} U, t \in (t_{i-1}, t_i) \\ 0, t \notin (t_{i-1}, t_i) \end{cases} \qquad (7)$$

Здесь $t_0=t_н$, а t_i – момент окончания активного накопительного периода для фонда с номером i (предполагается, что фонды нумеруются в порядке убывания процентных ставок). Для задачи быстродействия $t_n=t_к$, а для задачи минимизации вложений $t_n \le t_к$, поскольку может существовать для всех фондов период пассивного (только за счет капитализации) накопления.

Искомое решение для $x_i(t)$, $i=1,2,\ldots N$ тогда имеет вид:

$$x_i(t)=\begin{cases} 0, t<t_{i-1}, \\ \dfrac{U}{p_i}[e^{p_i(t-t_{i-1})}-1], t_{i-1}\le t<t_i, \\ \dfrac{U}{p_i}e^{p_i(t-t_i)}[e^{p_i(t_i-t_{i-1})}-1], t_i\le t\le t_\kappa. \end{cases} \qquad (8)$$

В общем случае определение решения по формуле (4) значительно усложняется, поскольку сложно найти функции управления $u_i(t)$. Дело в том, что решения сопряженной системы, найденные по формуле (6), могут иметь не одну точку пересечения. Как следствие, для накопительных фондов периоды активного и пассивного накопления чередуются сложным образом, согласно поведению решений сопряженной системы. В стационарном случае решения сопряженной системы легко было определить, исходя из требования последовательного мажорирования [2]. В нестационарном случае подобных требований сформулировать нельзя, и нужно решать задачу Коши. Поскольку начальные условия для сопряженной системы уравнений отсутствуют, нужно их выбрать на единичном шаре n – мерного пространства таким образом, чтобы соответствующее управление было оптимальным. Очевидно, что для получения приемлемого для практических целей решения, должны использоваться технологии параллельных вычислений на мощной вычислительной платформе.

Следует отметить, что в своей максимальной общности нестационарная задача оптимизации встречается на практике не часто. В условиях сильной изменчивости источника финансирования вместо детерминированных моделей часто удобнее использовать стохастические модели [7]. Многие интересные с практической точки зрения задачи имеют постановку, в которой стационарность присутствует хотя бы частично. Например, процентные ставки постоянны, а нестационарным является только источник финансирования. Или, источник финансирования постоянен, а непостоянные процентные ставки мажорируют одна другую.

Задача (1) в таких квазистационарных постановках решается значительно проще, чем в общем случае. Рассмотрим наиболее интересную для практики задачу с нестационарным источником: задачу минимального вложения средств.

Принцип максимума Понтрягина дает следующее условие для определения оптимального управления:

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i(t)-1)u_i(t)=U(t)\max\{(y_i(t)-1),0\}, \qquad (9)$$

из которого следует, что функции управления $u_i(t)$ задаются формулой (7), поскольку процентные ставки постоянны. То, что источник финансирования не является постоянным, не меняет оптимального управления, поскольку решения сопряженного уравнения такие же, как в стационарном случае. Поэтому, как и в стационарном случае, для каждого фонда существует только один период активного накопления. Эти периоды последовательно сменяются в порядке убывания процентных ставок, и все заканчивается последним общим для всех фондов периодом пассивного накопления. Теперь оптимальное решение можно найти по формуле:

$$x(t)=\int_{t_{i-1}}^{t_i}\exp(p_i(t-s))U(s)ds. \qquad (10)$$

По сравнению со стационарным случаем, решение требует вычисления интеграла, а не использования формулы (8). Но подынтегральная функция в формуле (10) является кусочно-непрерывной, и интеграл легко вычисляется одним из стандартных методом.

Методика применения

Применим изложенную методику к решению задачи оптимального накопления при временном прекращении финансирования. При рассмотрении задачи временного прекращения финансирования можно ограничиться случаем, когда U(t) имеет вид кусочно-постоянной функции:

$$U(t)=\begin{cases} U, & t_н<t<t_* \\ 0, & t_*\le t<t^* \\ U, & t^*<t<t_к \end{cases}. \tag{11}$$

Здесь t_*, t^* – моменты прекращения финансирования и его возобновления.

Поскольку на интервале (t_*, t^*) очевидным образом все управления равны 0, и их переключение невозможно, то интервал (t_*, t^*) целиком принадлежит некоторому интервалу (t_{m-1}, t_m). Используя граничное условие при $t=t_k$, получаем соотношения для определения моментов переключения режимов накопления t_i:

$$S_i=\begin{cases} \dfrac{U}{p_i}\left(e^{p_i(t_к-t_{i-1})}-e^{p_i(t_к-t_i)}\right), & i\ne m \\ \dfrac{U}{p_i}\left(e^{p_i(t_к-t_{i-1})}-e^{p_i(t_к-t_*)}+e^{p_i(t_к-t^*)}-e^{p_i(t_к-t_i)}\right), & i=m \end{cases}, \tag{12}$$

где $t_o=t_н$. При $t=t_n$ наступает последний интервал – пассивного накопления фондов, и если $t_n>t_к$, то решения задачи не существует. В этом случае необходимо, или увеличить период накопления, или – мощность источника финансирования. Итерационная процедура последовательного определения моментов переключения управления, включает в себя определение номера интервала, на котором происходит прекращение финансирования. Сначала находится t_1 по первой из формул (12) и если $t_1 < t_*$, то находится t_2. Так продолжается до тех пор, пока для некоторого номера i не будет выполнено условие $t_i > t_*$. Это означает, что i=m. Тогда следует вернуться к вычислению t_i по второй из формул (12). Затем вычисления снова проводятся по первой из формул.

Помимо полного прекращения финансирования, на некотором периоде времени может произойти частичное сокращение, тогда вторая из формул (12) потребует некоторой модификации. Частичное сокращение финансирования или его полное прекращение могут происходить на нескольких не смежных периодах. В любом случае требуемая для конкретных вычислений формула может быть получена из формулы (10). Необходимо только соответствующий интеграл вычислить по формуле Ньютона-Лейбница.

Помимо задач связанных с сокращением финансирования по схожей методике решаются задачи с увеличением финансирования. Если такое изменение мощности источника финансирования можно запланировать заранее, то основой решения, как и ранее, является формула (10). В тех случаях, когда приходится корректировать первоначальный оптимальный план накопления, то независимо от характера реструктуризации, при неизменных процентных ставках последовательность активных периодов накопления в создаваемых фондах не меняется и формула (10) остается основой для вычислений.

Таким образом, нестационарные модели накопительных процессов во многих случаях могут быть реализованы с использованием относительно простых вычислительных средств, без использования дорогостоящих платформ.

Литература

1. Тубольцев М.Ф. Методы оптимального накопления фондов в бюджете развития муниципального образования // «Научная мысль Кавказа», Ростов-на-Дону, Изд-во Северо-Кавказкого научного центра высшей школы, 2005, №8. – с. 82-91.

2. Тубольцев М.Ф. Оптимальные по быстродействию стратегии создания накопительных фондов. // «Научные ведомости», серия «Информатика, Прикладная математика, Управление», том 1 выпуск 1(19).- Белгород: Изд-во БелГУ, 2004.- стр.65-70.
3. Тубольцев М.Ф. Оптимальные по критерию минимума вложения средств стратегии создания накопительных фондов. // «Научные ведомости», серия «Информатика, Прикладная математика, Управление», № 1 (21) выпуск 2.- Белгород: Изд-во БелГУ, 2006.- стр.50-55.
4. Тубольцев М.Ф. Математическое моделирование систем накопительных фондов//«Научные ведомости», серия «История, Политология, Экономика, Информатика», №1 (56) выпуск 9/1.- Белгород: Изд-во БелГУ, 2009.- стр.45-51.
5. Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Понтрягин Л.С. К теории оптимальных процессов, ДАН СССР, 110, №1 (1956), стр.7-10.
6. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – 4-е изд. – М.: «Наука»,1983.-392 с.
7. Тубольцев М.Ф., Михелев В.М. Математическое моделирование финансовых процессов в условиях неопределенности // «Научные ведомости», серия «История, Политология, Экономика, Информатика», №15 (70) выпуск 12/1.- Белгород: Изд-во БелГУ, 2009.- с. 177-180.

NON-STATIONARY MODELS OF FINANCIAL MEMORY PROCESSES

M. F. TUBOLTSEV

Belgorod State University

e-mail: Tuboltsev @bsu.edu.ru

Questions of modeling of non-stationary financial processes of memory type are considered. Distinctive feature of statement of a problem of optimization considered here is that optimization is carried out in the conditions of variability of interest rates and capacity of a source of financing. Such model of creation of memory funds reflects a real situation, than in a stationary case as there is a possibility to consider the time termination of financing, etc. more adequately.

Key words: financial streams, optimization, memory funds, modeling, computer modeling.