УДК 531.1

ПОСТРОЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СЛУЧАЙНЫХ МНОЖЕСТВ. I. АДДИТИВНЫЕ МЕРЫ НА БУЛЕВСКОЙ РЕШЕТКЕ

Ю.П. Вирченко, О.Л. Шпилинская

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru
Институт монокристаллов НАНУ,
пр. Ленина, 60, Харьков, Украина, e-mail: spilolga@isc.kharkov.ua

Аннотация. Предлагается общая конструкция распределения вероятностей для случайных множеств $\tilde{X}$ на минимальной σ-алгебре, порождаемой бесконечной системой случайных событий $\Gamma(A) = \{A \subset \tilde{X}\}$, $|A| < \infty$. События образуют решетку с максимальным элементом, частичный порядок в которой определяется отношением включения, и при этом каждая упорядоченная пара элементов соединяется конечной цепью. В первой части работы строятся аадитивные меры на булевском кольце, порождаемом решеткой случайных событий.

Ключевые слова: система множеств, решетка, полукольцо, σ-алгебра, мера.

1. Введение. Построение вероятностного пространства $\langle \Omega, \mathfrak{B}, \mathsf{P} \rangle$ со структурой измеримости, определяемой σ-алгеброй $\mathfrak{B}$ и мерой P, обычно состоит в выделении некоторой системы $\mathfrak{A}$ случайных событий Γ из Ω, которая считается достаточной для вероятностного описания моделируемой содержательной (физической) ситуации, и определении σ-аддитивной функции на минимальной σ-алгебре $\mathfrak{B}$, порождаемой этой системой. При этом возникают две проблемы. Первая состоит в том, чтобы иметь эффективный способ установления того, является ли заданная функция на Ω измеримой или, что то же самое, являются ли измеримыми наперед заданные подмножества Γ из Ω. Вторая состоит в том, чтобы установить, когда априорно заданные вероятности $\Pr\{\Gamma\}$ событий Γ из системы $\mathfrak{A}$ являются значениями единственной σ-аддитивной меры Q на $\mathfrak{B}$, которая является единственным продолжением функции P, первоначально заданной на $\mathfrak{A}$, на всю σ-алгебру.

На сегодняшний день общепринято, что первая задача может эффективно решаться на основе так называемых систем Дынкина [1], которые первоначально были предназначены именно для упрощения проверки измеримости заданной функции относительно некоторой σ-алгебры. Вторая же задача, как правило, решается посредством определения аддитивной меры на булевском полукольце множеств. Определенная таким образом мера, при наличии свойства σ-полуаддитивности на полукольце, допускает единственное продолжение до σ-аддитивной меры на минимальной σ-алгебре, содержащей это полукольцо (см., например, [2]). Считается, что построение полукольца, содержащего заданную систему $\mathfrak{A}$ множеств и задание аддитивной функции P на полукольце, представляет собой более простую задачу. Например, в теории случайных процессов такое полукольцо возникает естественным образом, когда мы интересуемся случайными событиями, связанными с прохождением траекторий случайного процесса фиксированных областей значений в фиксированные моменты времени. Наличие аддитивности меры P для этого полукольца означает существование соотношений согласованности для набора частных распределений вероятностей [3]. Решение задачи о задании меры P сводится, таким образом, к заданию бесконечного набора функций, удовлетворяющих этим соотношениям. Однако, мыслимы случаи, когда построение полукольца и определение на нем аддитивной меры может представлять собой некоторую самостоятельную задачу, как это имеет место для частных распределений вероятностей случайных множеств [4]. Кроме того, проверка свойства σ-полуаддитивности для уже определенной функции P тоже требует аккуратных оценок (см., например, [3]).

Нашей целью в этом сообщении является построение σ-аддитивной меры на минимальной σ-алгебре, порождаемой системой $\mathfrak{A}$ случайных событий $\Gamma(A) = \{A \subset \tilde{X}\}$, $|A| < \infty$, связанных со случайными реализациями $\tilde{X}$ множеств из некоторого пространства погружения Σ так, что элементарные события составляют степенное множество над этим пространством, $\Omega = \mathcal{P}(\Sigma)$. Эта система событий представляет собой решетку с максимальным элементом Ω, частичный порядок на которой задается отношением включения, и она обладает рядом дополнительных свойств. В частности, каждая упорядоченная пара элементов решетки соединена конечной цепью. Оказывается, что, в рассмотренном нами случае, для конструкции меры достаточно задать монотонную функцию $\mathsf{P}(\cdot)$ такую, что $\mathsf{P}(A) \geqslant \mathsf{P}(B)$ при $B \supset A$, где множества A и B из пространства погружения Σ конечны, и эта функция должна удовлетворять некоторому специальному свойству положительной определенности. Этому свойству, как правило, легко удовлетворить в каждом конкретном случае и при этом не возникает никаких дополнительных соотношений согласованности. Тогда распределение вероятностей случайных множеств $\tilde{X}$ строится на основе такой функции, если положить $\mathsf{P}(A) = \Pr\{A \subset \tilde{X}\}$.

2. Построение полукольца. Пусть имеется бесконечное множество Σ [2] и система событий $\Gamma(x) = \{x \in \tilde{X}\} \subset \Omega$, $x \in \Sigma$. (Далее, всюду по тексту множества подмножеств из Σ мы называем событиями, несмотря на то, что еще не введена структура измеримости и факт измеримости этих множеств относительно этой структуры не установлен.) Тогда система $\mathfrak{A}$, элементами которой являются события $\Gamma(A) \subset \Omega$,

$$\Gamma(A) = \bigcap_{x \in A} \Gamma(x)\,, \quad A \in \mathcal{P}_0(\Sigma) \tag{1}$$

частично упорядочена так, что $\Gamma(B)$ следует за $\Gamma(A)$, если $B \supset A$. Здесь и далее $\mathcal{P}_0(\Sigma) = \{A : A \subset \Sigma, |A| < \infty\}$.

Очевидно, что введенная таким образом структура решетки обладает максимальным элементом $\Omega = \Gamma(\varnothing)$ и если два ее элемента $\Gamma(A)$ и $\Gamma(B)$ с конечными A и B связаны отношением порядка, то между можно вставить не более чем конечный набор элементов $\Gamma(C)$, а именно таких, у которых $A \subset C \subset B$. Построим на основе указанной системы событий полукольцо с единицей.

[2] В случае, когда множество Σ конечно, предлагаемая конструкция тривиальна.

Ведем события $\bar{\Gamma}(x) = \complement\Gamma(x)$, $x \in \Sigma$, где $\complement\Gamma \equiv \Omega \setminus \Gamma$, и, соответственно, –

$$\Gamma(A) = \bigcap_{x\in A} \bar{\Gamma}(x)\,, \quad A \in \mathcal{P}_0(\Sigma)\,.$$

Определим для каждой пары A, B конечных подмножеств из Σ событие

$$\Gamma(A,B) = \Big(\bigcap_{x\in A}\Gamma(x)\Big) \cap \Big(\bigcap_{y\in B}\bar{\Gamma}(y)\Big)\,. \tag{2}$$

Класс всех таких событий обозначим посредством $\mathfrak{S}$. В этом классе содержатся события $\Gamma(A,\varnothing) = \Gamma(A)$, $A \subset \Sigma$ и, в частности, $\Omega \equiv \Gamma(\varnothing,\varnothing)$, а также невозможное событие в том случае, когда $A \cap B \neq \varnothing$, так как $\Gamma(x) \cap \bar{\Gamma}(x) = \varnothing$ для любого $x \in \Sigma$.

Для событий класса $\mathfrak{S}$ справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. *Имеет место тождество*

$$\Gamma(A_1,B_1) \cap \Gamma(A_2,B_2) = \Gamma(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \tag{3}$$

для любых конечных подмножеств A_1, A_2, B_1, B_2 *из* Σ.

□ Это непосредственно следует из определения (2). ■

Лемма 2. *Для конечных подмножеств* A, B, D *из* Σ *в том случае, когда* $D \cap A = \varnothing$, $D \cap B = \varnothing$, *имеет место тождество*

$$\Gamma(A,B) = \bigcup_{C\subset D} \Gamma(A \cup C, B \cup (D \setminus C))\,. \tag{4}$$

Это разложение дизъюнктивно.

□ Доказательство строится индукцией по $|D|$. При $|D| = 1$, $D = \{z\}$, $z \in \Sigma$ имеем

$$\Gamma(A, B \cup \{z\}) \cup \Gamma(A \cup \{z\}, B) = \big(\Gamma(A,B) \cap \complement\Gamma(z)\big) \cup (\Gamma(A,B) \cap \Gamma(z)) =$$

$$= \Gamma(A,B) \cap \big(\complement\Gamma(z) \cup \Gamma(z)\big) = \Gamma(A,B) \cap \Omega = \Gamma(A,B)\,.$$

Индукционный шаг от произвольного множества D с мощностью $|D|$ к множеству $D \cup \{z\}$ с мощностью $(|D|+1)$, $z \notin D$ получается следующим разбиением оператора объединения

$$\bigcup_{C\subset D\cup\{z\}} \ldots = \Big(\bigcup_{C\subset D} \ldots\Big) \cup \Big(\bigcup_{C\,:\,z\in C\subset D\cup\{z\}} \ldots\Big)\,.$$

Объединение, полученное применением первого оператора в правой части, по предположению индукции, равно

$$\bigcup_{C\subset D} \Gamma(A \cup C, B \cup (D \cup \{z\} \setminus C)) = \Gamma(A, B \cup \{z\})\,.$$

Объединение же, полученное применением второго оператора в этом случае преобразуется следующим образом:

$$\bigcup_{C\,:z\in C\subset D\cup\{z\}} \Gamma(A\cup C, B\cup(D\cup\{z\}\setminus C)) = \bigcup_{C\subset D} \Gamma(A\cup\{z\}\cup C, B\cup(D\setminus C)) = \Gamma(A\cup\{z\}, B)\,.$$

В результате,

$$\bigcup_{C\subset D\cup\{z\}} \Gamma(A\cup C, B\cup(D\cup\{z\}\setminus C)) = \Gamma(A\cup\{z\}, B)\cup\Gamma(A, B\cup\{z\}) = \Gamma(A,B)\,,$$

ввиду разобранного выше случая с $|D|=1$.

Дизъюнктивность разложения (4) следует из того, что для двух компонент объединения при $C_1\subset D$ и $C_2\subset D$, $C_1\neq C_2$, обязательно, согласно (3), имеет место

$$\Gamma(A\cup C_1, B\cup(D\setminus C_1))\cap\Gamma(A\cup C_2, B\cup(D\setminus C_2)) = \Gamma(A\cup C_1\cup C_2, B\cup(D\setminus(C_1\cap C_2))) = \varnothing\,,$$

так как

$$(A\cup C_1\cup C_2)\cap(B\cup(D\setminus(C_1\cap C_2)))\supset(C_1\cup C_2)\cap(D\setminus(C_1\cap C_2))\neq\varnothing\,. \quad \blacksquare$$

Лемма 3. *Для того чтобы имело место $\Gamma(A,B)=\varnothing$ необходимо и достаточно, чтобы $A\cap B\neq\varnothing$.*

$\square$ Если событие $\Gamma(A,B)=\{\tilde X\supset A, \tilde X\cap B=\varnothing\}$ не содержит ни одной реализации $\tilde X\subset\Sigma$, то условия $\tilde X\supset A$, $\tilde X\cap B=\varnothing$ не могут одновременно выполняться ни для одного множества $\tilde X$. Это возможно только в случае, когда $A\cap B\neq\varnothing$.

Обратно, если имеет место $A\cap B\neq\varnothing$, то условия, определяющие событие $\Gamma(A,B)$ противоречат друг другу. $\blacksquare$

Лемма 4. *Пусть A, A', B, B' – конечные подмножества из Σ такие, что $A\cap B = A'\cap B'=\varnothing$. Для того чтобы имело место $\Gamma(A,B)\cap\Gamma(A',B')=\varnothing$ необходимо и достаточно, чтобы $A\cap B'\neq\varnothing$ либо $A'\cap B\neq\varnothing$.*

$\square$ Из (3) следует, что равенство в условии леммы эквивалентно $\Gamma(A\cup A', B\cup B')=\varnothing$. Тогда из Леммы 3 следует, что для этого необходимо и достаточно чтобы

$$\varnothing\neq(A\cup A')\cap(B\cup B') = (A\cap B')\cup(A'\cap B)\,. \qquad \blacksquare$$

Лемма 5. *Для конечных подмножеств A, A', B, B' из Σ таких, что $A\cap B = A'\cap B' = \varnothing$, включение $\Gamma(A,B)\supset\Gamma(A',B')$ имеет место тогда и только тогда, когда $A\subset A'$, $B\subset B'$.*

$\square$ Если $A\subset A'$ и $B\subset B'$, то из (3) следует

$$\Gamma(A',B') = \Gamma(A,B)\cap\Gamma(A'\setminus A, B'\setminus B)\subset\Gamma(A,B)\,.$$

Обратно, пусть имеет место $\Gamma(A,B) \supset \Gamma(A',B')$,

$$\{\tilde{X} \supset A, \tilde{X} \cap B = \varnothing\} = \Gamma(A,B) \supset \Gamma(A',B') = \{\tilde{X} \supset A', \tilde{X} \cap B' = \varnothing\}.$$

В условиях теоремы для множеств A, A', B, B' события $\Gamma(A,B)$ и $\Gamma(A',B')$ не пусты. Выберем $\tilde{X} = A'$, которое удовлетворяет условиям события $\Gamma(A',B')$ в правой части включения. Тогда такая реализация должна принадлежать событию в левой части включения. Следовательно, должно, в частности, выполняться $A' \supset A$ в силу условий для реализаций, принадлежащих событию $\Gamma(A',B')$. Точно также рассуждая, положив $\tilde{X} = \complement B'$, получим, что должно выполняться $B \cap \complement B' = \varnothing$, так как выбранная случайная реализация удовлетворяет условиям события $\Gamma(A,B)$. Из полученного равенства $B \cap \complement B' = \varnothing$ следует $B' \cup \complement B = \Sigma$, то есть $\complement B \supset \complement B'$, $B \subset B'$. ■

Следствием доказанной леммы является то, что включение $\Gamma(A') \subset \Gamma(A)$ возможно только в том случае, когда $A' \supset A$.

Теорема 1. *Класс событий $\mathfrak{S}$ является булевским полукольцом с единицей.*[3)]

□ Класс $\mathfrak{S}$ содержит невозможное событие. Из Леммы 1 следует замкнутость класса $\mathfrak{S}$ относительно пересечений. Рассмотрим произвольную пару событий $\Gamma(A,B), \Gamma(A',B')$ из Ω, для которых имеет место включение $\Gamma(A,B) \supset \Gamma(A',B')$ и $\Gamma(A',B')$ не пусто, то есть имеют место включения $A \subset A'$ и $B \subset B'$. Применим формулу (4)

$$\Gamma(A,B) = \bigcup_{C \subset D} \Gamma(A \cup C, B \cup (D \setminus C)),$$

в которой положим $D = (A' \setminus A) \cup (B' \setminus B)$, где компоненты объединения не пересекаются. Тогда разложение в правой части дизъюнктивно и одна из компонент этого разложения, а именно, при $C = A' \setminus A$, совпадает с $\Gamma(A,B)$. Это доказывает, что рассматриваемый класс $\mathfrak{S}$ является полукольцом. ■

Булевское полукольцо $\mathfrak{S}$ порождается системой $\mathfrak{A}$ случайных событий в том смысле, что оно находится в пересечении всех полуколец, содержащих эту систему.

Мы будем говорить, что функция $\mathsf{P}(\cdot)$ монотонно не возрастает на решетке $\mathfrak{A} = \{\Gamma(A) : A \subset \Sigma : |A| < \infty\}$ с минимальным элементом $\varnothing$, в которой отношение порядка определяется отношением включения, если для любых A и B из $\mathfrak{A}$, для которых имеет место $A \subset B$, выполняется $\mathsf{P}(A) \geqslant \mathsf{P}(B)$.

Считается, что построение меры нужно начинать с ее определения на подходящем полукольце, в нашем случае, на минимальном полукольце $\mathfrak{S}$, содержащем систему $\mathfrak{A}$. Затем построенная на полукольце мера однозначно продолжается по аддитивности на минимальное кольцо, содержащее полукольцо. После чего находятся условия, при выполнении которых мера на полукольце является σ-аддитивной. В этом случае появляется возможность применить лебегово продолжение положительной меры с полукольца $\mathfrak{S}$ с единицей Ω на σ-алгебру *измеримых* случайных событий.

Построение σ-аддитивной меры на минимальной σ-алгебре вероятностного пространства случайных множеств на основе заданных ее значений $\mathsf{P}(\cdot)$ на решетке $\mathfrak{A} = \{\Gamma(A) :$

---

3) Определение см. в [2].

$A \subset \Sigma, |A| < \infty\}$ обладает двумя особенностями. Во-первых, при определении аддитивной функции $\mathsf{Q}(\cdot)$ на полукольце $\mathfrak{S}$ такой, что ее сужение на систему $\mathfrak{A}$ совпадает с функцией P, оказывается, что функция Q, в общем случае, не является положительной, то есть она представляет собой заряд. При этом возникает естественное ограничение (свойство положительной определенности) на функцию P, при выполнении которого заряд Q является положительной мерой, и только после этого появляется возможность рассматривать функцию Q как распределение вероятностей случайных множеств. Во-вторых, оказывается удобным строить аддитивную функцию не на полукольце $\mathfrak{S}$, а сразу на минимальном кольце $\mathfrak{R}$, вследствие сложности внутреннего описания типичных элементов полукольца и, наоборот, бо́льшей прозрачности строения кольца $\mathfrak{R}$, которое дается нижеследующими утверждениями.

Теорема 2. *Для любого $D \in \mathcal{P}_0(\Sigma)$ система событий*

$$\mathfrak{R}(D) = \{\Gamma : \Gamma = \bigcup_{C \in \mathcal{K}} \Gamma(C, D \setminus C)\,, \qquad \mathcal{K} \subset \mathcal{P}(D)\}$$

является кольцом с единицей Ω. [4]

□ Необходимо проверить замкнутость системы $\mathfrak{R}(D)$ относительно операций $\cap$, $\triangle$. Пусть Γ_1 и Γ_2 – произвольные элементы из $\mathfrak{R}(D)$, определяемые, соответственно, классами $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ подмножеств из D,

$$\Gamma_i = \bigcup_{C \in \mathcal{K}_i} \Gamma(C, D \setminus C)\,, \qquad i = 1, 2\,.$$

Тогда, в силу попарной несовместимости событий $\Gamma(C, D \setminus C)$, $C \in \mathcal{P}(D)$, имеем

$$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \bigcup_{C \in \mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2} \Gamma(C, D \setminus C) \ \in \ \mathfrak{R}(D)\,,$$

$$\Gamma_1 \setminus \Gamma_2 = \bigcup_{C \in \mathcal{K}_1 \setminus \mathcal{K}_2} \Gamma(C, D \setminus C) \ \in \ \mathfrak{R}(D)\,,$$

$$\Gamma_2 \setminus \Gamma_1 = \bigcup_{C \in \mathcal{K}_2 \setminus \mathcal{K}_1} \Gamma(C, D \setminus C) \ \in \ \mathfrak{R}(D)\,,$$

и, следовательно,

$$\Gamma_1 \triangle \Gamma_2 = (\Gamma_1 \setminus \Gamma_2) \cup (\Gamma_2 \setminus \Gamma_1) = \bigcup_{C \in \mathcal{K}_1 \triangle \mathcal{K}_2} \Gamma(C, D \setminus C) \ \in \ \mathfrak{R}(D)\,. \quad \blacksquare$$

Теорема 3. *Если $D \subset D'$ при $D, D' \in \mathcal{P}_0(\Sigma)$, то $\mathfrak{R}(D) \subset \mathfrak{R}(D')$.*

[4] Здесь и далее в аналогичных случаях мы используем стандартное обозначение степенного множества $\mathcal{P}(D)$ для класса всех подмножеств конечного множества D, вместо $\mathcal{P}_0(D)$, что не должно вызывать недоразумений, так как все такие подножества конечны.

□ Пусть $\Gamma \in \mathfrak{R}(D)$,

$$\Gamma = \bigcup_{C \in \mathcal{K}} \Gamma(C, D \setminus C)\,, \quad \mathcal{K} \subset \mathcal{P}(D)\,.$$

Определим класс

$$\mathcal{K}' = \{C' = C \cup C'' \,:\, C \in \mathcal{K}, C'' \in \mathcal{P}(D \setminus D')\}\,,$$

в котором множества $C' = C \cup C'' \subset D'$, и поэтому $\mathcal{K}' \subset \mathcal{P}(D')$. Для любого $C \subset D$, ввиду $C \cap (D' \setminus D) = \varnothing$, $(D \setminus C) \cap (D' \setminus D) = \varnothing$, согласно Лемме 2, имеет место дизъюнктивное разложение

$$\Gamma(C, D \setminus C) = \bigcup_{C'' \subset D' \setminus D} \Gamma(C \cup C'', (D \setminus C) \cup [(D' \setminus D) \setminus C''])\,. \tag{5}$$

Рассмотрим дизъюнктивное объединение

$$\bigcup_{C' \in \mathcal{K}'} \Gamma(C', D' \setminus C') = \bigcup_{C \in \mathcal{K}} \quad \bigcup_{C'' \in \mathcal{P}(D' \setminus D)} \Gamma(C'' \cup C, D' \setminus (C'' \cup C))\,,$$

которое, ввиду $(D \setminus C) \cup [(D' \setminus D) \setminus C''] = D' \setminus (C \cap C'')$, согласно (5), преобразуется в следующее

$$\bigcup_{C' \in \mathcal{K}'} \Gamma(C', D' \setminus C') = \bigcup_{C \in \mathcal{K}} \Gamma(C, D \setminus C)\,.$$

Следовательно, $\Gamma \in \mathfrak{R}(D')$. ■

Теорема 4. *Система событий*

$$\mathfrak{R} = \bigcup_{D \in \mathcal{P}_0(\Sigma)} \mathfrak{R}(D)$$

является кольцом с единицей Ω. *Она состоит из тех и только тех событий* Γ, *которые представимы в виде дизъюнктивных объединений*

$$\Gamma = \bigcup_{j=1}^{n} \Gamma(A_j, B_j)\,; \quad A_k \cap B_k = \varnothing\,,\ A_k, B_k \in \mathcal{P}_0(\Sigma)\,. \tag{6}$$

□ Для любого $D \in \mathcal{P}_0(\Sigma)$, каждый элемент $\Gamma \in \mathfrak{R}(D)$, который, согласно определению кольца $\mathfrak{R}(D)$, определяется разложением

$$\Gamma = \bigcup_{C \in \mathcal{K}} \Gamma(C, D \setminus C)\,, \quad \mathcal{K} \subset \mathcal{P}(D)\,,$$

представим в виде (6). Это означает, что разложение (6) имеет место для любого $\Gamma \in \mathfrak{R}$.

Обратно, пусть имеется событие Γ, представленное в виде разложения (6). Для соответствующего ему дизъюнктивного набора $\Gamma(A_j, B_j)$, $j = 1 \div n$ определим множество $D = \bigcup_{j=1}^{n}(A_j \cup B_j)$ и классы $\mathcal{K}_j = \{C = A_j \cup C' : C' \subset D \setminus (A_j \cup B_j)\}$, $j = 1 \div n$. Тогда, воспользовавшись Леммой 2, запишем следующее дизъюнктивное разложение

$$\Gamma(A_j, B_j) = \bigcup_{C' \subset D \setminus (A_j \cup B_j)} \Gamma(A_j \cup C', B_j \cup [(D \setminus (A_j \cup B_j)) \setminus C']) \,, \tag{7}$$

которое возможно ввиду непересекаемости множества $(D \setminus (A_j \cup B_j))$ с A_j и B_j, $j = 1 \div n$. Разложение (7) представим в виде

$$\Gamma(A_j, B_j) = \bigcup_{C \in \mathcal{K}_j} \Gamma(C, D \setminus C) \,, \quad j = 1 \div n \,,$$

так как, ввиду $A_j \cap B_j = \varnothing$, выполняется $B_j \cup [(D \setminus (A_j \cup B_j)) \setminus C'] = D \setminus C$, $j = 1 \div n$.

Заметим, теперь, что ввиду попарной несовместимости совокупности событий $\Gamma(A_j, B_j)$, $j = 1 \div n$, соответствующие им классы $\mathcal{K}_j$, $j = 1 \div n$ также попарно несовместимы. Тогда

$$\bigcup_{j=1}^{n} \Gamma(A_j, B_j) = \bigcup_{j=1}^{n} \bigcup_{C \in \mathcal{K}_j} \Gamma(C, D \setminus C) = \bigcup_{C \in \mathcal{K}} \Gamma(C, D \setminus C) \,,$$

где $\mathcal{K} = \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{K}_j$. Откуда следует, что $\Gamma \in \mathfrak{R}(D)$.

Наконец, система $\mathfrak{R}$ является кольцом, так как для любой пары событий $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathfrak{R}$, принадлежащих соответственно кольцам $\mathfrak{R}(D_1)$ и $\mathfrak{R}(D_2)$, которые, согласно Теорема 3, содержатся в кольце $\mathfrak{R}(D_1 \cup D_2)$, их пересечение и симметрическая разность принадлежат кольцу $\mathfrak{R}$. ■

Очевидно, что кольцо $\mathfrak{R}$ минимальное среди всех колец, содержащих полукольцо $\mathfrak{S}$.

В дальнейшем нам понадобятся еще два вспомогательных утверждения о свойствах событий $\Gamma(A, B)$, $A, B \in \mathcal{P}_0(\Sigma)$.

Лемма 6. *Пусть $\Gamma(A, B) \in \mathfrak{R}(D)$, $A \cap B = \varnothing$, $A \cup B \subset D$ и событие $\Gamma \in \mathfrak{R}(D)$ таково, что $\Gamma \supset \Gamma(A, B)$. Тогда*

$$\Gamma \supset \bigcup_{\substack{C \subset D: \\ A \subset C, B \subset D \setminus C}} \Gamma(C, D \setminus C) \,.$$

□ На основании Теоремы 2, каждый элемент Γ из $\mathfrak{R}(D)$ представим в виде дизъюнктивного разложения

$$\Gamma = \bigcup_{C \in \mathcal{K}} \Gamma(C, D \setminus C) \,, \quad \mathcal{K} \subset \mathcal{P}(D) \,. \tag{8}$$

По условию леммы $\Gamma(A,B)\cap\Gamma=\Gamma(A,B)$. Тогда, используя Лемму 1,

$$\Gamma(A,B)=\bigcup_{C\in\mathcal{K}}\Gamma(A\cup C, B\cup D\setminus C)\,. \tag{9}$$

При этом, ввиду дизъюнктивности последнего разложения, для любого множества C из $\mathcal{K}$, соответствующего непустому событию $\Gamma(A\cup C, B\cup D\setminus C)$, должно выполняться $(A\cup C)\cap(B\cup D\setminus C)=\varnothing$. Это, приводит к двум условиям на все те множества C из $\mathcal{K}$, которые обязаны присутствовать в полученном разложении, $B\cap C=A\cap(D\setminus C)=\varnothing$. Пустота первого выписанных пересечений эквивалентна включению $B\subset D\setminus C$, а второго – $A\subset C$. Следовательно класс $\mathcal{K}$ должен содержать все множества C, удовлетворяющие этим двум условиям. ■

Лемма 7. *Если $\Gamma\in\mathfrak{R}(D)$ и событие $\Gamma(A,B)$, $A,B\in\mathcal{P}_0(\Sigma)$, $A\cap B=\varnothing$, у которого $(A\cup B)\cap D=\varnothing$ таково, что $\Gamma\cap\Gamma(A,B)=\Gamma(A,B)$, то $\Gamma=\Omega$.*

□ Так как событие Γ представимо в виде разложения (8) и его пересечение с $\Gamma(A,B)$ – в виде (9), то сравнивая его с (4), получаем, что $\mathcal{K}=\mathcal{P}(D)$. ■

Теперь мы приступим к построению аддитивной функции $\mathsf{Q}(\cdot)$ на кольце $\mathfrak{R}$. Оно основано на следующем утверждении.

Теорема 5. *Если для каждого множества $D\subset\mathcal{P}_0(\Sigma)$ определена функция $\mathsf{Q}_D(\cdot)$, аддитивная на кольце $\mathfrak{R}(D)$, и при этом весь класс функций $\{\mathsf{Q}_D(\cdot); D\subset\mathcal{P}_0(\Sigma)\}$ обладает свойством согласованности $\mathsf{Q}_{D'}|_{\mathfrak{R}(D)}=\mathsf{Q}_D$, $D'\supset D$, то существует единственная аддитивная на кольце $\mathfrak{R}$ функция Q такая, что*

$$\mathsf{Q}|_{\mathfrak{R}(D)}=\mathsf{Q}_D\,,\qquad D\in\mathcal{P}_0(\Sigma)\,. \tag{8}$$

□ Пусть $\Gamma\in\mathfrak{R}$ и для этого события имеет место дизъюнктивное разложение

$$\Gamma=\bigcup_{j=1}^{n}\Gamma_j\,,\qquad \Gamma_k\in\mathfrak{R},\ k=1\div n\,.$$

Тогда для каждого Γ_j найдется такое $D_j\in\mathcal{P}_0(\Sigma)$, что $\Gamma_j\in\mathfrak{R}(D_j)$, $j=1\div n$. Определим $D=\bigcup_{j=1}^{n}D_j$. Тогда, согласно Теореме 3, $\mathfrak{R}(D_j)\subset\mathfrak{R}(D)$, $j=1\div n$, и поэтому все составляющие Γ_j, $j=1\div n$ дизъюнктивного разложения принадлежат $\mathfrak{R}(D)$. Следовательно, $\Gamma\in\mathfrak{R}(D)$.

Если имеется класс $\mathfrak{C}$ согласованных между собой аддитивных функций $\mathsf{Q}_D(\cdot); D\in\mathcal{P}_0(\Sigma)$, выберем в качестве множества, определяющего конкретную из них, введенное выше множество D и положим $\mathsf{Q}(\Gamma)=\mathsf{Q}_D(\Gamma)$ согласно (8). Это определение однозначно, так как, вследствие свойства согласованности функций класса $\mathfrak{C}$, для любого множества $D'\supset D$ из $\mathcal{P}_0(\Sigma)$ имеет место $\mathsf{Q}_{D'}(\Gamma)=\mathsf{Q}_D(\Gamma)$. Кроме того, воспользовавшись аддитивностью выбранной функции $\mathsf{Q}_D(\cdot)$, устанавливается аддитивность функции $\mathsf{Q}(\cdot)$,

$$\mathsf{Q}(\Gamma)=\mathsf{Q}_D(\Gamma)=\sum_{j=1}^{n}\mathsf{Q}_D(\Gamma_j)=\sum_{j=1}^{n}\mathsf{Q}(\Gamma_j)\,.\qquad ■$$

Принцип построения аддитивных функций на кольце $\mathfrak{R}$ на основе формулы (8) сводит задачу о нахождении конкретной аддитивной функции на кольце $\mathfrak{R}$, удовлетворяющей «краевому» условию $\mathsf{Q}(\Gamma(D)) = \mathsf{P}(D)$, $D \subset \mathcal{P}_0(\Sigma)$ на системе $\mathfrak{A}$, к построению аддитивных функций $\mathsf{Q}_D(\cdot)$ класса $\mathfrak{C}$, которые удовлетворяют условию $\mathsf{Q}_D(\Gamma(D)) = \mathsf{P}(D)$ для D. Это позволяет доказать следующее утверждение.

Теорема 6. *Для любой монотонно убывающей функции $\mathsf{P}(\cdot)$ на решетке $\mathfrak{A} = \{\Gamma(A) : A \subset \Sigma, |A| < \infty\}$ существует единственная аддитивная функция $\mathsf{Q}(\cdot)$ на кольце $\mathfrak{R}$, которая удовлетворяет условию $\mathsf{Q}(\Gamma(D)) = \mathsf{P}(D)$ при любом $D \in \mathcal{P}_0(\Sigma)$. Эта функция на событиях из полукольца $\mathfrak{S}$ принимает значения*

$$\mathsf{Q}(\Gamma(A, B)) \equiv \mathsf{P}(A, B) = \sum_{C \subset B} (-1)^{|C|} \mathsf{P}(A \cup C) \tag{9}$$

при любых конечных подмножествах A, B из Σ.

□ **1.** В каждом кольце $\mathfrak{R}(D)$ (как в любом конечном кольце) имеется дизъюнктивный набор событий $\Gamma(A, D \setminus A)$, $A \subset D$ такой, что любое событие $\Gamma \in \mathfrak{R}(D)$ представляется в виде

$$\Gamma = \bigcup_{A \in \mathcal{K}} \Gamma(A, D \setminus A)\,, \qquad \mathcal{K} \subset \mathcal{P}_0(D)\,. \tag{10}$$

При этом кольцо $\mathfrak{R}(D)$ является самым узким кольцом, содержащим указанный набор событий. Тогда для построения аддитивной функции $\mathsf{Q}_D(\cdot)$ на $\mathfrak{R}(D)$ необходимо и достаточно определить ее значения на этих порождающих элементах.

Запишем формулу определение (9) функции $\mathsf{P}(A, B)$ в виде

$$\mathsf{P}(A, B) = \sum_{C : A \subset C \subset D} (-1)^{|C \setminus A|} \mathsf{P}(C)\,,$$

где $D = A \cup B$, $A \cap B = \varnothing$. Положим $\mathsf{Q}_D(\Gamma(A, B)) = \mathsf{P}(A, B)$. При этом $\mathsf{Q}_D(\Gamma(A)) = \mathsf{P}(A)$. Тогда для события (10) из $\mathfrak{R}(D)$ должно выполняться

$$\mathsf{Q}_D(\Gamma(A, B)) = \sum_{A \in \mathcal{K}} \mathsf{P}(A, D \setminus A)\,, \quad \mathcal{K} \subset \mathsf{P}_0(D)\,.$$

Покажем, что введенные таким образом функции $\mathsf{Q}_D(\cdot)$, $D \in \mathcal{P}_0(\Sigma)$ образуют согласованный набор, то есть для любого $\Gamma \in \mathfrak{R}(D'')$ имеет место $\mathsf{Q}_{D''}(\Gamma) = \mathsf{Q}_{D'}(\Gamma)$ при $D' \supset D''$. Докажем сначала эту формулу для событий $\Gamma(A, B)$, $A \cap B = \varnothing$, $A \cup B = D''$. Для этого запишем формулу (4) в виде

$$\Gamma(A, B) = \bigcup_{C : A \subset C \subset D' \setminus B} \Gamma(C, D' \setminus C)\,,$$

в которой произведена замена множества суммирования $C \cup A$ на C и положено $D' = D \cup A \cup B$.

Применив определение функции $\mathsf{Q}_{D'}(\cdot)$ на $\mathfrak{R}(D')$,

$$\mathsf{Q}_{D'}(\Gamma(A,B)) = \sum_{C\,:A\subset C\subset D'\setminus B} \mathsf{Q}_{D'}(\Gamma(C, D'\setminus C))\,,$$

нужно доказать, что имеет место равенство

$$\mathsf{Q}_{D''}(\Gamma(A,B)) = \sum_{C\subset D'\setminus D''} \mathsf{Q}_{D'}(\Gamma(A\cup C, B\cup (D'\setminus C)\setminus D''))\,,$$

или, что тоже самое,

$$\mathsf{P}(A,B) = \sum_{C\subset D'\setminus D''} \mathsf{P}(A\cup C, B\cup [(D'\setminus D'')\setminus C])\,.$$

Эта формула доказывается индукцией по числу $|D'\setminus D''|$. При $|D'\setminus D''| = 0$, $D' = D''$ имеем тождество. Индукционный шаг строится на основе равенства

$$\mathsf{P}(A',B') = \mathsf{P}(A'\cup\{x\}, B') + \mathsf{P}(A', B'\cup\{x\})\,, \tag{11}$$

верного для любых множеств $A', B' \in \mathcal{P}_0(\Sigma)$, $A'\cap B' = \varnothing$ и $x \notin A'\cup B'$. Оно доказывается следующим преобразованием

$$\mathsf{P}(A', B'\cup\{x\}) = \sum_{C\subset B}(-1)^{|C|}\mathsf{P}(A'\cup C) + \sum_{C\,:x\in C\subset B'\cup\{x\}}(-1)^{|C|}\mathsf{P}(A'\cup C) =$$

$$= \mathsf{P}(A',B') - \mathsf{P}(A'\cup\{x\}, B')\,.$$

Для построения индукционного шага применим (11) к сумме

$$\sum_{C\subset D'\cup\{x\}\setminus D''} \mathsf{P}(A\cup C, B\cup [(D'\cup\{x\}\setminus D'')\setminus C]) =$$

$$= \sum_{C\subset D'\setminus D''} \mathsf{P}(A\cup C, (B\cup\{x\})\cup[(D'\setminus D'')\setminus C]) + \sum_{C\,:x\in C\subset D'\cup\{x\}\setminus D''} \mathsf{P}(A\cup C, B\cup[(D'\cup\{x\}\setminus D'')\setminus C])\,,$$

где первая сумма, по предположению индукции, на основании (11) при $A = A'$, $B\cup\{x\} = B'$, равна $\mathsf{P}(A, B\cup\{x\})$, а вторая, по той же причине, положив в (11) $A' = A\cup\{x\}$, $B' = B$ и используя

$$\sum_{C\,:x\in C\subset D'\cup\{x\}\setminus D''} \mathsf{P}(A\cup C, B\cup[(D'\cup\{x\}\setminus D'')\setminus C]) = \sum_{C\subset D'\setminus D''} \mathsf{P}(A\cup\{x\}\cup C, B\cup[(D'\setminus D'')\setminus C])\,,$$

равна $\mathsf{P}(A\cup\{x\}, B)$. Снова применив формулу (11) при $A' = A$, $B' = B$, получим,

$$\mathsf{P}(A\cup\{x\}, B) + \mathsf{P}(A, B\cup\{x\}) = \mathsf{P}(A,B)\,.$$

2. Мы доказали, что формула (9) определяет класс согласованных между собой функций $\mathsf{Q}_D(\cdot)$, удовлетворяющих краевому условию. Докажем, наконец, что существует только одна такая функция. Для этого достаточно доказать, что такая функция единственна на каждом кольце $\mathfrak{R}(D)$, $D \in \mathcal{P}_0(\Sigma)$. Зафиксируем множество A из $\mathcal{P}_0(\Sigma)$. Ввиду аддитивности искомой функции, достаточно доказать, что существует единственный набор ее значений $\mathsf{Q}_D(A,B))$, $A \cap B = \varnothing$, $A \cup B = D$, $D \in \mathcal{P}_0(\Sigma)$, для которого имеет место $\mathsf{Q}_D(\Gamma(D)) = \mathsf{P}(D)$, $D \in \mathcal{P}_0(\Sigma)$.

Доказательство проводится индукцией по числу $|B|$. При $|B| = 0$, $B = \varnothing$ имеем тождество. Индукционный шаг строится на основе дизъюнктивного разложения $\Gamma(A,B) = \Gamma(A \cup \{x\}, B) \cup \Gamma(A, B \cup \{x\})$ при $x \notin A \cup B$, из которого следует, что

$$\mathsf{P}(A, B \cup \{x\}) = \mathsf{P}(A,B) - \mathsf{P}(A \cup \{x\}, B)\,.$$

Тогда однозначная, по предположению индукции, определенность значений в правой части влечет однозначную определенность значения в левой части, у которого $|B \cup \{x\}| = 1 + |B|$. ■

Простые примеры показывают, что в общем случае функция $\mathsf{P}(\cdot,\cdot)$ не обязана быть неотрицательной, то есть она не определяет положительной меры на полукольце $\mathfrak{S}$. В связи с этим, введем следующее определение. Будем говорить, что функция $\mathsf{P}(\cdot)$ обладает свойством *положительной определенности*, если для любых конечных подмножеств A и B из Σ имеет место $\mathsf{P}(A,B) \geqslant 0$. Тогда следствием доказанной теоремы является

Теорема 7. *Если монотонно убывающая функция $\mathsf{P}(\cdot)$ на решетке $\mathfrak{A} = \{A \subset \Sigma : |A| < \infty\}$ является положительно определенной, то она однозначным образом продолжается до положительной меры $\mathsf{Q}(\cdot)$ на кольце $\mathfrak{R}$ так, что на порождающем его полукольце $\mathfrak{S}$ она определяется формулой $\mathsf{Q}(\Gamma(A,B)) = \mathsf{P}(A,B)$ при любых $A, B \in \mathfrak{A}$.*

Литература

1. Дынкин Е.Б. Основания теории марковских процессов / М.: Физматгиз,1959. –226 с.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа, 4-е изд. / М.: Наука, 1976. – 544 с.
3. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов / М.: Наука, 1977. – 568 с.
4. Matheron G. Random Sets and Integral Geometry / G.Matheron. – New York: John Wiley and Sons, 1975.

CONSTRUCTION OF PROBABILITY DISTRIBUTION OF RANDOM SETS I. ADDITIVE MEASURES ON BOOL's LATTICE

Yu.P. Virchenko, O.L. Shpilinskaya

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: virch@bsu.edu.ru
Single Crystal Institute,
Lenin av., 60, Kharkov, 61000, Ukraine, e-mail: shpilolga@list.ru

Abstract. The general construction of probability distribution on the minimal σ-algebra generated by infinite system of random events $\Gamma(A) = \{A \subset \tilde{X}\}$, $|A| < \infty$ connected with random sets $\tilde{X}$ is proposed. Such events form the lattice with maximal element where the partial ordering is defined by inclusion relation when each pair of elements in the lattice may be connected only by the finite chain. In the first part additive measures on Boole's ring generated by the lattice of random events are built.

Key words: system of sets, lattice, semiring of sets, σ-algebra, measure.