УДК 517.958:531.72, 517.958:539.3(4)

ПОВТОРНОЕ УСРЕДНЕНИЕ В ЗАДАЧАХ ФИЛЬТРАЦИИ ПОДЗЕМНЫХ ЖИДКОСТЕЙ [14)]

А.М. Мейрманов

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия, e-mail: meirmanov@bsu.edu.ru

Аннотация. В настоящей работе с помощью теории усреднения выводятся модели с двойной пористостью для фильтрации жидкости в трещиновато-пористых средах. На микроскопическом уровне динамика жидкости описывается системой стационарных уравнений Стокса для несжимаемой жидкости. При этом считается, что область занятая жидкостью есть объединение двух независимых систем трещин и пор. Предполагается, что характерная безразмерная длина ε пор зависит от характерной безразмерной длины δ трещин $\varepsilon = \delta^r$ с $r > 1$. Движение несжимаемого упругого скелета грунта описывается стационарными уравнениями Ламе. В предположении, что совместное движение упругого скелета и жидкости в порах уже является усредненным (первое усреднение) мы выполняем повторное (второе) усреднение для жидкости в трещинах и смеси твердой компоненты и жидкости в порах при $\delta \to 0$. В результате мы получим модифицированную систему пороупругости Терцаги-Био для скорости и плотности жидкости в трещинах. Для абсолютно твердого скелета грунта мы получим обычные уравнения фильтрации Дарси для жидкости в трещинах, в то время как жидкость в порах будет неподвижной.

Ключевые слова: фильтрация жидкостей, повторное усреднение, уравнения Дарси, Био, Ламе и Стокса.

1. Введение. В настоящей статье рассматривается совместное движение упругого тела и жидкости, заполняющей поры и трещины этого тела. Имеется большое число различных математических моделей, описывающих этот процесс. Они как-то учитывают геометрию области, занятой жидкостью и физические свойства жидкой и твердой компонент. Среди всевозможных моделей наиболее простой является модель фильтрации Дарси

$$\boldsymbol{v} = \frac{k}{\mu}(-\nabla q + \boldsymbol{F}), \quad \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0\,, \tag{1}$$

для макроскопической скорости $\boldsymbol{v}$ и давления q жидкости при условии что твердый скелет является абсолютно твердым и областью движения жидкости является поровое пространство. В (1) k – заданная проницаемость среды, μ – вязкость жидкости и $\boldsymbol{F}$ – заданный вектор плотности массовых сил.

Для более сложной геометрии, когда область занятая жидкостью есть объединение системы пор и трещин существуют также различные феноменологические модели (см., например, [3], [10], [15], [16], [18], [20]). Заметим, что поры отличаются от трещин своим

[14]Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (госконтракт №02.740.11.0613)

характеристическим размером. Если l_p – характеристический размер пор и l_c – характеристический размер трещин, то $l_p \ll l_c$. Широко известная модель Г.И. Баренблатта, И.Н. Кочиной и Ю.П. Желтова [3] описывает двухскоростную сплошную среду, в которой макроскопические скорость $\boldsymbol{v}_p$ и давление q_p в порах, а также макроскопические скорость $\boldsymbol{v}_c$ и давление q_c в трещинах удовлетворяют двум различным законам Дарси

$$\boldsymbol{v}_p = \frac{k_p}{\mu}(-\nabla q_p + \boldsymbol{F}), \quad \boldsymbol{v}_c = \frac{k_c}{\mu}(-\nabla q_c + \boldsymbol{F}), \tag{2}$$

и двум уравнениям неразрывности

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v}_p = J, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{v}_c = -J. \tag{3}$$

Математическая модель замыкается постулатом, что поток J из пор в трещины линейно зависит от разности $(q_c - q_p)$:

$$J = \beta(q_c - q_p), \quad \beta = \mathrm{const}.$$

Научная и практическая ценность математических моделей,описывающих такие сложные процессы, очевидна. Но не менее важным является их физическая достоверность. В настоящей публикации нас будут интересовать только основные модели механики сплошных сред (как, например, уравнения Стокса, описывающие медленные движения вязкой жидкости, или уравнения Ламэ, описывающие перемещения упругого твердого тела) а также модели асимптотически близкие к какой-либо основной модели механики сплошных сред. Что касается феноменологических моделей, не связанных напрямую с основными моделями механики сплошных сред, то мы можем доверять им и использовать в практических приложениях, а можем не доверять им и искать модели, удовлетворяющие нашим критериям. Но, как правило, у нас нет выбора и приходится использовать те модели, которые имеются в нашем распоряжении в данный момент. Так, например, было с законом Дарси. До 1980 года это была почти единственно возможная феноменологическая модель теории фильтрации. В 1980 г. Л.Тартар (см. Аппендикс в [17]) строго доказал, что закон Дарси асимптотически близок к системе уравнений Стокса слабосжимаемой жидкости в порах абсолютно твердого тела. Для более сложной геометрии, когда область занятая жидкостью есть объединение системы пор и трещин, некоторые попытки вывести соответствующие модели (будем называть такие модели *моделями фильтрации с двойной пористостью*, а соответствующую геометрию – *геометрией с двойной порисистостью*) были предприняты T. Arbogast с соавторами [2], A. Bourgeat с соавторами [7] и Z. Chen [9]. Поскольку две последние работы в идейном плане повторяют первую, кратко обсудим главные идеи в [2].

В качестве исходной модели на микроскопическом уровне авторы рассмотрели периодическую структуру, состоящую из «твердых» блоков размера δ, окруженными жидкостью. При этом «твердая» компонента предполагается уже усредненной, то есть вместо пористого твердого скелета грунта и жидкости в порах рассматривается смесь «жидкое-твердое», описываемая обычной системой уравнений фильтрации Дарси. Это и есть метод *повторного усреднения*, когда в качестве первого усреднения (при $\varepsilon \to 0$) рассматривается усреднение твердого скелета и жидкости в порах, а в качестве повторного (при $\delta \to 0$) – усреднение полученной смеси и жидкости в трещинах. В качестве уравнений, описывающих динамику жидкости в трещинах, авторы предлагают некоторую искусственную систему уравнений, похожую на систему уравнений фильтрации Дарси. Очевидно, что такая система не имеет никакого разумного физического обоснования, но с математической точки зрения выбор такой системы вполне объясним. Невозможно подобрать разумные условия сопряжения (краевые условия) на общей границе «твердые» блоки – жидкость в трещинах, если динамика жидкости описывается уравнениями Стокса. Таким образом итоговые усредненные модели в [2], [7] и в [9] не имеют никакой связи с основными моделями механики сплошной среды.

Несмотря на это, сама идея метода повторного усреднения для подобных задач не лишена смысла. Просто авторы использовали не те модели как для описания движения смеси «твердый скелет - жидкость в порах», так и для описания движения жидкости в трещинах.

Цель настоящей работы – вывод некоторых математических моделей с двойной пористостью, асимптотически близких основным моделям механики сплошных сред, с помощью именно идеи повторного усреднения. В принципе есть очень естественный метод (см. [12]), использующий понятие трехмасштабной сходимости, предложенный в [1]. К сожалению он очень сложен технически, в то время как предлагаемый метод в вычислительном отношении достаточно простой. Как мы уже отмечали, надо только правильно выбрать соответствующие математические модели на каждом из этапов усреднения. Для этого мы будем следовать методу, предложенному в [8] (см. также [17]). В основе метода лежит выбор математической модели на микроскопическом уровне, асимптотически близкой к основным моделям механики сплошной среды, с последующим строгим усреднением выбранной модели.

Поясним этот метод на примере фильтрации жидкости в среде с простой геометрией, когда область занятая жидкостью есть только поровое пространство. В качестве основной математической модели выберем систему, описывающую динамику жидкости уравнениями Стокса

$$\rho_f\rho_0\frac{\partial \boldsymbol{v}_f}{\partial t}=\nabla\cdot\big(2\,\mu\,\mathbb{D}(x,\boldsymbol{v}_f)\big)-\nabla\,q_f+\rho_f\rho_0\boldsymbol{F},$$

$$\tilde{c}_f^2\,\frac{\partial q_f}{\partial t}+\rho_f\nabla\cdot\,\boldsymbol{v}_f=0$$

для скорости $\boldsymbol{v}_f=\partial\boldsymbol{w}_f/\partial t$ и давления q_f жидкости, а динамика упругого скелета – уравнениями Ламе

$$\rho_s\rho_0\frac{\partial^2\boldsymbol{w}_s}{\partial t^2}=\nabla\cdot\big(2\,\lambda\,\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}_s)\big)-\nabla\,q_s+\rho_s\rho_0\boldsymbol{F},$$

$$\tilde{c}_s^2\,\frac{\partial q_s}{\partial t}+\rho_s\nabla\cdot\,\frac{\partial\boldsymbol{w}_s}{\partial t}=0$$

для перемещений $\boldsymbol{w}_s$ и давления q_f твердой компоненты.

Дифференциальные уравнения в твердом скелете и в жидкости дополняются краевыми условиями на общей границе «поровое пространство - твердый скелет», выражающими непрерывность перемещений и нормальных напряжений, и соответствующими краевыми и начальными условиями на внешней границе и в начальный момент времени.

После перехода к безразмерным переменным в задаче появляется естественный малый параметр ε, равный отношению характерного размера пор l_p к характерному размеру L физической области: $\varepsilon = l_p/L$.

Пусть Ω_f^ε есть область, занятая жидкостью, Ω_s^ε – твердый скелет, и

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_f,\ q = q_f,\ \boldsymbol{x} \in \Omega_f^\varepsilon,\ \text{ и }\ \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_s,\ q = q_s,\ \boldsymbol{x} \in \Omega_s^\varepsilon$$

есть вектор перемещений и давление сплошной среды. Для периодической структуры простой геометрии (только поры) движение сплошной описывается системой уравнений

$$\alpha_\tau \rho^\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \left(\chi_p^\varepsilon \alpha_\mu \mathbb{D}\left(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\right) + (1-\chi_p^\varepsilon)\alpha_\lambda \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}) - q\mathbb{I}\right) + \rho^\varepsilon \boldsymbol{F}, \tag{4}$$

$$q + \alpha_q^\varepsilon \nabla \cdot \boldsymbol{w} = 0. \tag{5}$$

Дифференциальные уравнения понимаются в смысле теории распределений (т.е. как соответствующие интегральные тождества) и содержат как собственно дифференциальные уравнения в каждой из областей Ω_f^ε и Ω_s^ε, так и краевые условия на общей границе «поровое пространство - твердый скелет».

В (4), (5) $\mathbb{D}(x, \boldsymbol{w})$ – симметрическая часть производной $\nabla \boldsymbol{w}$, $\mathbb{I}$ – единичный тензор, $\chi_p^\varepsilon = \chi_p(\boldsymbol{x}/\varepsilon)$ – характеристическая функция порового пространства, $\chi_p(\boldsymbol{y})$ – характеристическая функция «жидкой» части Y_f единичного куба Y,

$$\rho^\varepsilon = \rho_f \chi_p^\varepsilon + \rho_s(1-\chi_p^\varepsilon), \quad \alpha_q^\varepsilon = \alpha_{q,f}\chi_p^\varepsilon + \alpha_{q,s}(1-\chi_p^\varepsilon),$$

$$\alpha_\tau = \frac{L}{g\tau^2}\ , \quad \alpha_\mu = \frac{2\mu}{\tau L g \rho_0}\ , \quad \alpha_\lambda = \frac{2\lambda}{L g \rho_0}\ ,$$

$$\alpha_{q,f} = \rho_f \frac{\tilde{c}_f^2}{L\,g}\ , \quad \alpha_{q,s} = \rho_s \frac{\tilde{c}_s^2}{L\,g}\ ,$$

τ – характерное время данного физического процесса, ρ_f и ρ_s – средние безразмерные плотности жидкости в порах и твердого скелета соответственно, соотнесенные к плотности воды ρ_0, $\tilde{c}_f$ – скорость звука в жидкости, $\tilde{c}_s$ – скорость звука в твердом скелете, g – ускорение силы тяжести, μ – вязкость жидкости, и λ – упругая постоянная Ламе.

Теоретически система (4), (5) с соответствующими краевыми и начальными условиями является одной из наиболее адекватных математических моделей, описывающих совместное движение упругого скелета грунта и жидкости в порах. Но эта модель не имеет никакой практической ценности, поскольку приходится решать задачу в физической области размером в несколько сотен метров, в то время как коэффициенты уравнений осциллируют на масштабе в несколько микрон. Очевидно, что практическая ценность модели появится только после ее усреднения. То есть мы должны разрешить безразмерным критериям α_τ, α_μ и α_λ быть переменными величинами, зависящими от малого параметра ε, и найти все предельные режимы (4), (5) при $\varepsilon \to 0$.

Подробный анализ всех возможных усредненных моделей был проделан в [11]. Чтобы объяснить нашу идею, перечислим некоторые из этих результатов. Прежде всего заметим, что процессов фильтрации характерное время τ составляет несколько месяцев. Поэтому для фильтрации $\alpha_\tau \sim 0$ и поэтому можно пренебречь инерционным слагаемым в (4). Наоборот, для акустики характерное время τ процесса не превышает нескольких десятков секунд $\alpha_\tau \sim 1$. Следовательно, мы можем ввести новый масштаб, полагая $\alpha_\tau \boldsymbol{w} \to \boldsymbol{w}$, для которого $\alpha_\tau = 1$.

Для несжимаемых сред $\alpha_q^\varepsilon \sim \infty$ и, вместо (5), мы получим хорошо известное условие несжимаемости

$$\nabla \cdot \boldsymbol{w} = 0. \tag{6}$$

Наконец, абсолютно твердое тело характеризуется условием $\alpha_\lambda \sim \infty$.

Для простоты изложения рассмотрим только фильтрацию несжимаемой жидкости в несжимаемом упругом скелете, описываемую уравнением (4) с $\alpha_\tau = 0$ и уравнением (6). Усреднение этой системы с фиксированными $\alpha_\mu = \mu_0$ и $\alpha_\lambda = \lambda_0$ приводит к тому же самому уравнению неразрывности (6) и уравнению

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbb{P}} + \hat{\rho}\boldsymbol{F} = 0, \tag{7}$$

где

$$\tilde{\mathbb{P}} = -q\,\mathbb{I} + \mathfrak{N}_1 : \mathbb{D}\left(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\right) + \mathfrak{N}_2 : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}) + \int_0^t \mathfrak{N}_3(t-\tau) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, \tau))d\tau\,. \tag{8}$$

В (7), (8) $\hat{\rho} = m_p\rho_f + (1-m_p)\rho_s$, m_p – пористость порового пространства, а заданные тензоры четвертого ранга $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ и $\mathfrak{N}_3(t)$ зависят только от μ_0, λ_0 и геометрии элементарной ячейки Y_f. Усредненную модель (6)– (8) будем называть системой уравнений *вязкоупругой фильтрации.*

Заметим, что для почти всех процессов фильтрации $\alpha_\mu \sim 0$. Таким образом можно представить этот критерий как

$$\alpha_\mu = \mu_1\varepsilon^2\,, \quad \mu_1 = \mu_0 \cdot \frac{L^2}{l_p^2} = \frac{2\mu}{\tau L g \rho_0} \cdot \frac{L^2}{l_p^2}\,, \tag{9}$$

зафиксировать μ_1 и позволить величине ε быть переменной ($\alpha_\mu = \mu_0$ для $\varepsilon = l_p/L$). Для такого переменного критерия α_μ, данного (9), имеем следующую усредненную систему при $\varepsilon \to 0$:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} + (1-m_p)\,\nabla \cdot \frac{\partial \boldsymbol{w}_s}{\partial t} = 0, \tag{10}$$

$$\nabla \cdot \left(\lambda_0\,\mathfrak{A}_1^{(f)} : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}_s) - \frac{1}{m_p}\,q_p\,\mathbb{I}\right) + \hat{\rho}\boldsymbol{F} = 0, \tag{11}$$

$$\boldsymbol{v} = m_p\,\frac{\partial \boldsymbol{w}_s}{\partial t} + \frac{1}{\mu_1}\mathbb{B}^{(p)} \cdot \Big(-\frac{1}{m_p}\nabla q_p + \rho_f \boldsymbol{F}\Big), \tag{12}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} = \boldsymbol{v} + (1 - m_p)\,\frac{\partial \boldsymbol{w}_s}{\partial t}\,. \tag{13}$$

Здесь $\boldsymbol{w}$ – перемещение полученной смеси, $\boldsymbol{v}$ – скорость жидкой компоненты, q_p – давление жидкости в порах и $\boldsymbol{w}_s$ – перемещение твердой компоненты. Симметричный строго положительно определенный тензор четвертого ранга $\mathfrak{A}_1^{(f)}$ и симметричная строго положительно определенная матрица $\mathbb{B}^{(p)}$ зависят только от геометрии элементарной ячейки Y_f и не зависят от μ_1 и λ_0. Будем называть систему (10)-(13) системой уравнений *пороупругости Био-Терцаги* (Ref. [5], Ref. [19]).

Для достаточно больших μ_1 ($\mu_1 \sim \infty$) можно пренебречь вторым слагаемым в (12), что совместно с (13) приводит к равенствам

$$\boldsymbol{v} = m_p\,\frac{\partial \boldsymbol{w}_s}{\partial t}\,, \quad \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_s\,.$$

Последние соотношения приводят к (6) и усредненному закону сохранения количества движения

$$\nabla \cdot \hat{\mathbb{P}} + \hat{\rho}\boldsymbol{F} = 0, \quad \hat{\mathbb{P}} = \lambda_0\,\mathfrak{A}_0^{(f)} : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}_s) - \frac{1}{m_p}\,q_p\,\mathbb{I} \tag{14}$$

для перемещений $\boldsymbol{w}_s$ твердой компоненты и давления q_p жидкости в порах с симметричным строго положительно определенным тензором четвертого ранга $\mathfrak{A}_0^{(f)}$. Мы выбрали именно этот тензор поскольку $\mathfrak{A}_1^{(f)} : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}_s) = \mathfrak{A}_0^{(f)} : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}_s)$ для $\nabla \cdot \boldsymbol{w}_s = 0$, но последний тензор имеет более простую структуру. Будем называть полученные уравнения (6), (14) системой уравнений *упругой фильтрации*.

Для абсолютно твердого скелета $\lambda_0 \to \infty$ и система (10)-(13) преобразуется в обычную систему уравнений фильтрации Дарси

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{\mu_1}\mathbb{B}^{(p)} \cdot \Big(-\frac{1}{m_p}\nabla\,q_p + \rho_f \boldsymbol{F}\Big), \quad \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0\,. \tag{15}$$

Все эти различные системы (система уравнений фильтрации Дарси, система уравнений пороупругости Био-Терцаги, система уравнений упругой фильтрации, и система уравнений вязкоупругой фильтрации) являются аппроксимациями одной и той же системы уравнений (6), (7) и описывают один и тот же физический процесс, но с различной степенью точности.

Теперь мы готовы объяснить нашу идею, как воспользоваться методом повторного усреднения для более сложной геометрии с двойной пористостью. Как мы уже говорили, будем использовать именно тот же метод. что и в работах [2], [7], [9], но только изменим модель, описывающую динамику смеси твердого тела и жидкости в порах и динамику жидкости в трещинах. Проделанный нами анализ показывает, что мы не можем использовать уравнения фильтрации Дарси для пористых блоков. Чтобы выбрать правильную модель, необходимо решить – какой именно будет окончательная модель. Упростим наш анализ и ограничимся приближением типа системы уравнений пороупругости при условии $\alpha_\mu \sim 0$. Для этого случая для описания динамики смеси в пористых блоках являются системы уравнений упругой фильтрации и пороупругости. Для выбора наиболее подходящей модели проанализируем критерий

$$\alpha_\mu = \mu_0 = \mu_1\varepsilon^2 = \mu_2\delta^2, \quad \varepsilon = \frac{l_p}{L}, \quad \delta = \frac{l_c}{L} \ ,$$

где

$$\mu_1 = \mu_0 \cdot \frac{L^2}{l_p^2} \ , \quad \mu_2 = \mu_0 \cdot \frac{L^2}{l_c^2} = \mu_1 \frac{\varepsilon^2}{\delta^2} \ , \tag{16}$$

и l_c – характерный размер трещин.

Предположим, что

$$\varepsilon \ll 1, \quad \delta \ll 1, \quad \text{и} \quad \varepsilon = \delta^r \quad \text{с} \quad r > 1, \quad \frac{\varepsilon^2}{\delta^2} \sim 0. \tag{17}$$

Процесс усреднения для трещин размера δ имеет смысл, если и только если

$$\mu_2 \sim 1 \tag{18}$$

(см. [11], [12]). При этом условии соотношения (16) – (18) приводят к соотношению

$$\mu_1 \sim \infty.$$

Таким образом, наиболее адекватной моделью, описывающей динамику смеси упругого скелета и жидкости в порах, является уравнений упругой фильтрации (6) и (14).

Для описания динамики жидкости в трещинах воспользуемся системой уравнений Стокса

$$\mu_2\delta^2 \triangle \boldsymbol{v}_c - \nabla q_c + \rho_f \boldsymbol{F} = 0, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{v}_c = 0, \tag{19}$$

для скорости $\boldsymbol{v}_c = \partial \boldsymbol{w}_c/\partial t$ и давления q_c жидкости. Как обычно, задача замыкается условиями непрерывности перемещений и нормальных напряжений на общей границе «смесь - пространство трещин» и соответствующими граничными и начальными условиями.

Стандартная процедура усреднения приводит к модифицированной системе уравнений Био-Терцаги для перемещений твердого скелета и для скорости и давления жидкости в трещинах (см. Теорему 1). При этом скорость в порах просто пропорциональна скорости твердого скелета.

Как мы говорили выше, для абсолютно твердого скелета $\lambda_0 \sim \infty$. Переходя к пределу при $\lambda_0 \to \infty$ получим обычную систему уравнений фильтрации Дарси для жидкости а трещинах, в то время как жидкость в порах будет блокирована и неподвижна (см. Теорему 2).

Этот факт очевидным образом противоречит модели в [3]. Позже, один из авторов модели Г.И. Баренблатт в одной из своих многочисленных книг по теории фильтрации ([4], стр. 187) отмечает, что «... движение жидкости в такой среде (трещиновато-пористой) происходит **в основном по трещинам**, в то время как объем трещин мал и **основные запасы жидкости заключаются в пористых блоках**». Это верное замечание, основанное на глубокой физической интуиции, не было подкреплено указанием верного механизма извлечения жидкости из пор. Наши результаты показывают, что для более точного описания реальных физических процессов в средах со сложной геометрией, необходимо учитывать напряжения в твердом скелете. Именно упругие напряжения (а не второе давление в порах) является главным фактором, позволяющим жидкости перетекать из пор в трещины и наоборот.

2. Постановка задачи и основные результаты. Пусть Ω есть ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с непрерывной по Липшицу границей S. В первую очередь определим область $\Omega_c^\delta \subset \Omega$, занятую жидкостью в трещинах, и область $\Omega_{s,p}^\delta \subset \Omega$, занятую смесью твердой компоненты и жидкостью в порах.

Рассмотрим единичный куб K в $\mathbb{R}^3$, $K = Z_f \cup Z_s \cup \gamma_c$, где Z_f и Z_s открытые области, с общей границей $\gamma_c = \partial Z_f \cap \partial Z_s$ непрерывной по Липшицу. Предположим, что периодическое повторение области Z_s есть связное множество с непрерывной по Липшицу границей. Элементарная ячейка Z_f моделирует область, занятую трещинами Ω_c^δ: область Ω_c^δ есть пересечение области Ω с периодическим повторением в $\mathbb{R}^3$ of элементарной ячейки δZ_f.

Точно также определяется поровое пространство Ω_p^ε: $K = Y_f \cup Y_s \cup \gamma_p$, γ_p – непрерывная по Липшицу поверхность, периодическое повторение области Y_s есть связное множество с непрерывной по Липшицу границей, и Ω_p^ε есть пересечение области $\Omega\backslash\overline{\Omega_c^\delta}$ с периодическим повторением в $\mathbb{R}^3$ элементарной ячейки εY_f. Твердый скелет $\Omega\backslash(\overline{\Omega_c^\delta}\cup\overline{\Omega_p^\varepsilon})$ обозначается как $\Omega_s^{\varepsilon,\delta}$.

Наконец, положим $\Omega_{s,p}^\delta = \Omega\backslash\overline{\Omega_c^\delta}$. Можно также охарактеризовать введенные нами множества через характеристические функции. Действительно, пусть $\eta(\boldsymbol{x})$ есть характеристическая функция области Ω в $\mathbb{R}^3$, то есть $\eta(\boldsymbol{x}) = 1$, если $\boldsymbol{x} \in \Omega$ и $\eta(\boldsymbol{x}) = 0$, если $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3\backslash\Omega$. Пусть также $\chi_p(\boldsymbol{y})$ есть 1-периодическое продолжение характеристической функции области Y_f вK и $\chi_c(\boldsymbol{z})$ есть 1-периодическое продолжение характеристической функции области Z_f в K. Тогда $\chi_c^\delta(\boldsymbol{x}) = \eta(\boldsymbol{x})\chi_c(\boldsymbol{x}/\delta)$ есть характеристическая функция области Ω_c^δ, и $\chi_p^{\varepsilon,\delta}(\boldsymbol{x}) = \eta(\boldsymbol{x})\big(1-\chi_c(\boldsymbol{x}/\delta)\big)\chi_p(\boldsymbol{x}/\varepsilon)$ есть характеристическая функция области Ω_p^ε.

В соответствии с нашей схемой, аппроксимируем систему уравнений, описывающую совместное движение твердого скелета и жидкости в порах в $\Omega_{s,p}^\delta$, системой уравнений упругой фильтрации

$$\nabla\cdot\hat{\mathbb{P}} + \hat{\rho}\boldsymbol{F} = 0, \quad \nabla\cdot\boldsymbol{w}_s = 0, \tag{1}$$

$$\hat{\mathbb{P}} = \lambda_0\,\mathfrak{A}_0^{(f)} : \mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}_s) - q_p\,\mathbb{I}$$

для перемещений $\boldsymbol{w}_s$ твердой компоненты и давления q_p жидкости в порах.

При этом скорость жидкости в порах определяется как

$$\boldsymbol{v}_p = m_p\frac{\partial\boldsymbol{w}_s}{\partial t}\ , \tag{2}$$

где $m_p = \int_K \chi_p(\boldsymbol{y})dy$ – пористость порового пространства и $m_c = \int_K \chi_c(\boldsymbol{z})dz$ – пористость пространства трещин.

Симметричный строго положительно определенный постоянный тензор четвертого ранга $\mathfrak{A}_0^{(f)}$ определяется формулой

$$\mathfrak{A}_0^{(f)} = (1-m_p)\,\mathbb{J} + \sum_{i,j=1}^{3} \langle \mathbb{D}(y, \boldsymbol{U}_p^{(ij)}) \rangle_{Y_s} \otimes \mathbb{J}^{ij}, \tag{3}$$

(см. [11]). Здесь $\hat{\rho} = m_p\rho_f + (1-m_p)\rho_s$,

$$\mathbb{J}^{ij} = \frac{1}{2}(\mathbb{I}^{ij} + \mathbb{I}^{ji}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_i), \quad \mathbb{J} = \sum_{i,j=1}^{3} \mathbb{J}^{ij} \otimes \mathbb{J}^{ij},$$

$\boldsymbol{e}_i$, $i = 1,2,3$, – вектора базиса ортогональной декартовой системы координат, и для любых векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, и $\boldsymbol{c}$ символом $\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}$ обозначается матрица (диада): $(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})$. Наконец, функции $\boldsymbol{U}_p^{(ij)}(\boldsymbol{y})$, $i,j = 1,2,3$ есть решения периодической краевой задачи

$$\left.\begin{array}{l} \triangle_y \boldsymbol{U}_p^{(ij)} - \nabla_y Q_p^{(ij)} = 0\,, \quad \nabla_y \cdot \boldsymbol{U}_p^{(ij)} = 0, \;\; \boldsymbol{y} \in Y_s\,, \\ \left(\mathbb{D}(y, \boldsymbol{U}_p^{(ij)}) + \mathbb{J}^{ij} - Q_p^{(ij)}\mathbb{I}\right) \cdot \boldsymbol{\nu} = 0\,, \quad \boldsymbol{y} \in \gamma_p\,, \quad \langle \boldsymbol{U}_p^{(ij)} \rangle_{Y_s} = 0\,, \end{array}\right\} \tag{4}$$

где $\boldsymbol{\nu}$ – вектор единичной нормали к γ_p.

Движение жидкости в области Ω_c^δ, занятой трещинами, описывается уравнениями Стокса

$$\mu_2\delta^2 \triangle\, \boldsymbol{v}_c - \nabla\, q_c + \rho_f \boldsymbol{F} = 0\,, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{v}_c = 0\,, \tag{5}$$

для скорости $\boldsymbol{v}_c = \partial \boldsymbol{w}_c/\partial t$ и давления q_c жидкости.

На общей границе Γ_c^δ «смесь - пространство трещин» векторы перемещений и давление удовлетворяют обычным условиям непрерывности перемещений

$$\boldsymbol{w}_c = \boldsymbol{w}_s, \tag{6}$$

и нормальных напряжений

$$\left(\mu_2\delta^2\mathbb{D}\left(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}_c}{\partial t}\right) - q_c\mathbb{I}\right) \cdot \boldsymbol{n} = \hat{\mathbb{P}} \cdot \boldsymbol{n}\,, \tag{7}$$

где $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ единичный вектор нормали к границе в точке $\boldsymbol{x} \in \Gamma_c^\delta$.

Пусть

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_c, \;\; q = q_c, \;\; \boldsymbol{x} \in \Omega_c^\delta, \;\; \text{и} \;\; \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_s, \;\; q = q_p, \;\; \boldsymbol{x} \in \Omega_{s,p}^\delta \tag{8}$$

есть вектор перемещений и давление сплошной среды соответственно. Задача замыкается однородными граничными и начальными условиями

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t) = 0, \;\; \boldsymbol{x} \in S, \quad \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},0) = 0, \;\; \boldsymbol{x} \in \Omega_c^\delta\,. \tag{9}$$

Для всех $\delta > 0$ задача (1) – (9) имеет единственное обобщенное решение $\{\boldsymbol{w}^\delta,\, q^\delta\}$ и справедлива

Теорема 1. *Пусть*

$$0 < \mu_2,\, \lambda_0 < \infty\,, \quad |\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t)| + |\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t)| \leqslant F\,.$$

Тогда в области $\Omega_T = \Omega\times(0,T)$ начально-краевой задаче (1)-(9) при $\delta \to 0$ соответствует усредненная задача, состоящая из:

1) уравнения неразрывности

$$\nabla \cdot \boldsymbol{w}_c + (1-m_c)\,\nabla \cdot \boldsymbol{w}_s = 0, \tag{10}$$

для перемещений $\boldsymbol{w}_c$ жидкости в порах и перемещений $\boldsymbol{w}_s$ твердого скелета;

2) закона сохранения количества движения

$$\lambda_0\,\nabla \cdot \big(\mathfrak{A} : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}_s)\big) - \frac{1}{m_c}\nabla\, q_c + \tilde{\rho}\boldsymbol{F} = 0, \tag{11}$$

для перемещений $\boldsymbol{w}_s$ твердого скелета и давления q_c жидкости в трещинах;

3) закона Дарси

$$\boldsymbol{v}_c = m_c\frac{\partial \boldsymbol{w}_s}{\partial t} + \frac{1}{\mu_2}\mathbb{B}^{(c)}\Big(\rho_f\boldsymbol{F} - \frac{1}{m_c}\nabla\, q_c\Big), \tag{12}$$

для скорости $\boldsymbol{v}_c = \partial\boldsymbol{w}_c/\partial t$ и давления q_c жидкости в трещинах;

4) однородных граничных и начальных условий

$$\boldsymbol{w}_s(\boldsymbol{x},t) = 0\,, \quad \boldsymbol{v}_c(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) = 0\,, \quad \boldsymbol{x} \in S\,, \tag{13}$$

$$\boldsymbol{w}_c(\boldsymbol{x},0) = 0\,, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega_c^{\delta}\,, \tag{14}$$

где $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ – единичный вектор нормали к границе в точке $\boldsymbol{x} \in S$.

Скорость жидкости в порах определяется как

$$\boldsymbol{v}_p = (1-m_c)m_p\frac{\partial \boldsymbol{w}_s}{\partial t}\,. \tag{15}$$

В (11) $\tilde{\rho} = \big(m_c+(1-m_p)\big)\rho_f+(1-m_c)(1-m_c)\rho_s$, симметричный строго положительно определенный постоянный тензор $\mathfrak{A}$ и симметричная строго положительно определенная постоянная матрица $\mathbb{B}^{(c)}$ определяются ниже формулами (22) и (19) соответственно, и зависят только от геометрии элементарных ячеек Y_f и Z_s, и не зависят от μ_2 и λ_0.

Теорема 2. *Пусть $\lambda_0 = n$ и $\boldsymbol{v}_p^n$, $\boldsymbol{w}_s^n$, $\boldsymbol{w}_c^n$ и q_c^n есть решения задачи (10)-(15).*

Тогда при $n \to \infty$ $\boldsymbol{v}_p^n \to 0$, $\boldsymbol{w}_s^n \to 0$, и $\boldsymbol{w}_c^n \to \boldsymbol{w}_c^\infty$, $q_c^n \to q_c^\infty$, где пара $\{\boldsymbol{v}_c^\infty,\, q_c^\infty\}$, $\boldsymbol{v}_c^\infty = \partial\boldsymbol{w}_c^\infty/\partial t$ есть решение системы уравнений фильтрации Дарси

$$\boldsymbol{v}_c^\infty = \frac{1}{\mu_2}\mathbb{B}^{(c)}\Big(\rho_f\boldsymbol{F} - \frac{1}{m_c}\nabla\, q_c^\infty\Big), \tag{16}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}_c^\infty = 0, \tag{17}$$

и

$$\boldsymbol{v}_p^\infty = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{v}_p^n = 0, \quad \boldsymbol{w}_s^\infty = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{w}_s^n = 0. \tag{18}$$

3. Доказательство Теоремы 1. Основой доказательства теоремы является интегральное тождество

$$\int_{\Omega_T} \big(\chi_c^\delta \mu_2 \delta^2 \mathbb{D}(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}^\delta}{\partial t}) + (1-\chi_c^\delta)\lambda_0\, \mathfrak{A}_0^{(f)} : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}^\delta) - q^\delta\, \mathbb{I}\big) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{\varphi}) dxdt = \int_{\Omega_T} \big(\chi_c^\delta \rho_f + (1-\chi_c^\delta)\hat{\rho}\big) \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\varphi}\, dxdt\,, \quad (1)$$

для всякой гладкой функции $\boldsymbol{\varphi}$, равной нулю на границе $S = \partial\Omega$, и соответствующие априорные оценки

$$\int_{\Omega_T} \Big(\Big|\frac{\partial \boldsymbol{w}^\delta}{\partial t}\Big|^2 + \delta^2 \mu_2 \chi_c^\delta \Big|\mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}^\delta}{\partial t}\Big)\Big|^2 + |q^\delta|^2 \Big) dxdt + \lambda_0 \max_{0<t<T} \int_\Omega (1-\chi_c^\delta) |\mathbb{D}\big(x, \boldsymbol{w}^\delta(\boldsymbol{x}, t)\big)|^2 dx \leqslant C_0 F^2, \quad (2)$$

где C_0 не зависит от δ (см., например, [11]- [13]).

Доказательство теоремы достаточно стандартное и в своей простейшей версии использует метод двухмасштабной сходимости [14]. Поэтому мы просто наметим схему доказательства и выведем основные уравнения с помощью метода двухмасштабного разложения (см. [8])

$$\boldsymbol{w}^\delta(\boldsymbol{x}, t) = \chi_c(\boldsymbol{x}/\delta) \boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}/\delta, t) + \big(1 - \chi_c(\boldsymbol{x}/\delta)\big) \boldsymbol{w}_s(\boldsymbol{x}, t) + \delta\, \boldsymbol{W}_s(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}/\delta, t) + o(\delta), \quad (3)$$

$$q^\delta(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{m_c} \chi_c(\boldsymbol{x}/\delta) q_c(\boldsymbol{x}, t) + \big(1 - \chi_c(\boldsymbol{x}/\delta)\big) Q_s(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}/\delta, t) + O(\delta), \quad (4)$$

и просто проверяемого соотношения

$$\lim_{\delta\to 0} \int_\Omega \Psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}/\delta) dx = \int_\Omega \big(\int_Z \Psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) dz \big) dx\,.$$

Здесь $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}, t)$, $\boldsymbol{W}_s(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}, t)$, $Q_s(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}, t)$, и $\Psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$ – 1-периодические по переменной $\boldsymbol{z}$ функции.

Подстановка (3) и (4) в (1) с $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}, t)$ приводит при $\delta \to 0$ к макроскопическому закону сохранения количества движения в форме интегрального тождества

$$\int_{\Omega_T} \Big(\lambda_0\, \mathfrak{A}_0^{(f)} : \big((1-m_c)\mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}_s) + \langle \mathbb{D}(z, \boldsymbol{W}_s) \rangle_{Z_s}\big) - \big(\frac{1}{m_c}\, q_c + \langle Q_s - \frac{1}{m_c}\, q_c \rangle_{Z_s}\big)\, \mathbb{I} \Big) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{\varphi}) dxdt = \int_{\Omega_T} \tilde{\rho} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\varphi}\, dxdt\,, \quad (5)$$

где
$$\langle\Phi\rangle_{Z_s}=\int_{Z_s}\Phi(\boldsymbol{z})dz\,,$$
и
$$\frac{1}{m_c}\,q_c\chi_c(\boldsymbol{z})+\big(1-\chi_c(\boldsymbol{z})\big)Q_s=\frac{1}{m_c}\,q_c+\big(1-\chi_c(\boldsymbol{z})\big)\Big(Q_s-\frac{1}{m_c}\,q_c\Big)\,.$$
Если в (1) мы выберем $\boldsymbol{\varphi}=\delta\,h(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{x}/\delta)$, то, после предельного перехода при $\delta\to 0$ и реинтегрирования по переменным $(\boldsymbol{x},t)$, получим

$$\int_Z\Big(\lambda_0\,\big(1-\chi_c(\boldsymbol{z})\big)\mathfrak{A}_0^{(f)}:\big(\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}_s)+\mathbb{D}(z,\boldsymbol{W}_s)\big)-\\ \big(\frac{1}{m_c}\,q_c+\big(1-\chi_c(\boldsymbol{z})\big)(Q_s-\frac{1}{m_c}\,q_c)\big)\,\mathbb{I}\Big):\mathbb{D}(z,\boldsymbol{\varphi}_0)dxdt=0\,. \quad (6)$$

Интегральное тождество (5) эквивалентно дифференциальному уравнению

$$\nabla_x\cdot\Big(\lambda_0\,\mathfrak{A}_0^{(f)}:\big((1-m_c)\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}_s)+\\ \langle\mathbb{D}(z,\boldsymbol{W}_s)\rangle_{Z_s}\big)-\Big[\frac{1}{m_c}\,q_c+\langle Q_s-\frac{1}{m_c}\,q_c\rangle_{Z_s}\Big]\,\mathbb{I}\Big)+\tilde{\rho}\boldsymbol{F}=0 \quad (7)$$

в области Ω_T, и интегральное тождество (6) эквивалентно дифференциальному уравнению
$$\nabla_z\cdot\big(\lambda_0\,\mathfrak{A}_0^{(f)}:\mathbb{D}(z,\boldsymbol{W}_s)\big)-\nabla_z\,Q_s=0 \quad (8)$$
в области Z_s, дополненному граничным условием

$$\Big(\lambda_0\,\mathfrak{A}_0^{(f)}:\big(\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}_s)+\mathbb{D}(z,\boldsymbol{W}_s)\big)-\Big[Q_s-\frac{1}{m_c}q_c\Big]\,\mathbb{I}\Big)\cdot\boldsymbol{\nu}=0 \quad (9)$$

на границе γ_c. В (9) $\boldsymbol{\nu}$ – вектор единичной нормали к γ_c.

Предел при $\delta\to 0$ в уравнении неразрывности в форме

$$\int_{\Omega_T}\big(\chi_c(\boldsymbol{x}/\delta)\boldsymbol{W}+\big(1-\chi_c(\boldsymbol{x}/\delta)\big)\boldsymbol{w}_s+\delta\,\boldsymbol{W}_s\big)\cdot\nabla\,\eta dxdt=0 \quad (10)$$

с $\eta=\eta(\boldsymbol{x},t)$, $\eta=\delta\,h(\boldsymbol{x},t)\eta_0(\boldsymbol{x}/\delta)$, и $\eta=\big(1-\chi_c(\boldsymbol{x}/\delta)\big)h(\boldsymbol{x},t)\eta_0(\boldsymbol{x}/\delta)$, и соответствующее реинтегрирование доставляют нам недостающие макроскопическое уравнение неразрывности
$$\nabla_x\cdot\,\big(\boldsymbol{w}_c+(1-m_c)\boldsymbol{w}_s\big)=0,\quad \boldsymbol{w}_c=\langle\boldsymbol{W}\rangle_{Z_f} \quad (11)$$
в области Ω_T, и микроскопические уравнения неразрывности

$$\nabla_z\cdot\,\boldsymbol{W}=0\,, \quad (12)$$

$$\nabla_x\cdot\,\boldsymbol{w}_s+\nabla_z\cdot\,\boldsymbol{W}_s=0 \quad (13)$$

в области Z_f и в области Z_s соответственно.

Для вывода микроскопического закона сохранения количества движения для скорости жидкости $\boldsymbol{v}_c = \partial \boldsymbol{w}_c/\partial t$ в трещинах выберем в (1) в качестве пробной функцию $\boldsymbol{\varphi} = h(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{x}/\delta)$, где 1-периодическая по переменной $\boldsymbol{z}$ гладкая функция $\boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{z})$ соленоидальная и финитная в Z_f, и перейдем к пределу при $\delta \to 0$. После реинтегрирования получим

$$\mu_2 \triangle_z \boldsymbol{V} - \nabla_z \Pi - \frac{1}{m_c}\nabla_x q_c + \rho_f \boldsymbol{F} = 0, \;\; \boldsymbol{z} \in Z_f\,. \tag{14}$$

Здесь $\boldsymbol{V} = \partial \boldsymbol{W}/\partial t$ и $\boldsymbol{v}_c = \langle \boldsymbol{V}\rangle_{Z_f}$. Последнее уравнение дополним уравнением неразрывности (12) и краевым условием

$$\boldsymbol{V} = \frac{\partial \boldsymbol{w}_s}{\partial t}\,, \qquad \boldsymbol{z} \in \gamma_c\,, \tag{15}$$

которое следует из (3) после предельного перехода $\delta \to 0$:

$$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z},t) = \chi_c(\boldsymbol{z})\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z},t) + \big(1-\chi_c(\boldsymbol{z})\big)\boldsymbol{w}_s(\boldsymbol{x},t)\,, \tag{16}$$

и гладкости функции $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z},t)$ по переменной $\boldsymbol{z}$.

Задача (12), (14), (15) хорошо изучена ([17], [11]) и имеет единственное решение

$$\chi_c(\boldsymbol{z})\big(\boldsymbol{V} - \frac{\partial \boldsymbol{w}_s}{\partial t}\big) = \frac{1}{\mu_2}\Big(\sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{V}_c^{(i)}(\boldsymbol{z})\otimes \boldsymbol{e}_i\Big)\cdot\Big(-\frac{1}{m_c}\nabla_x q_c + \rho_f \boldsymbol{F}\Big),$$

где

$$\left.\begin{array}{l}
\triangle_y \boldsymbol{V}_c^{(i)} - \nabla \Pi^{(i)} = -\boldsymbol{e}_i, \quad \boldsymbol{z} \in Z_f\,,\\
\nabla_y \cdot \boldsymbol{V}_c^{(i)} = 0, \quad \boldsymbol{z} \in Z_f\,,\\
\boldsymbol{V}_c^{(i)} = 0, \quad \boldsymbol{z} \in \gamma_c\,.
\end{array}\right\} \tag{17}$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{v}_c = \langle \boldsymbol{V}\rangle_{Z_f} = m_c \frac{\partial \boldsymbol{w}_s}{\partial t} + \frac{1}{\mu_2}\mathbb{B}^{(c)}\big(\rho_f \boldsymbol{F} - \frac{1}{m}\nabla q_c\big), \tag{18}$$

с

$$\mathbb{B}^{(c)} = \langle \sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{V}_c^{(i)} \otimes \boldsymbol{e}_i\rangle_{Z_f}\,. \tag{19}$$

Для завершения доказательства необходимо решить задачу (8), (9), (13). Следуя стандартной схеме ([11]- [13]) ищем решение в виде

$$\boldsymbol{W}_s = \sum_{i,j=1}^{3}\boldsymbol{U}_c^{(ij)}(\boldsymbol{z})D_{ij}(\boldsymbol{x},t) + \boldsymbol{U}_c^{(0)}(\boldsymbol{z})d(\boldsymbol{x},t),$$

$$Q_s - \frac{1}{m_c}q_c = \lambda_0\Big(\sum_{i,j=1}^{3}Q_c^{(ij)}(\boldsymbol{z})D_{ij}(\boldsymbol{x},t) + Q_c^{(0)}(\boldsymbol{z})d(\boldsymbol{x},t)\Big),$$

где

$$D_{ij}=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial w_{s,i}}{\partial x_j}+\frac{\partial w_{s,j}}{\partial x_i}\Big),\quad d=\nabla_x\cdot\boldsymbol{w}_s,\quad \boldsymbol{w}_s=(w_{s,1},w_{s,2},w_{s,3}),$$

$$\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}_s)=\sum_{i,j=1}^{3}D_{ij}\,\mathbb{J}^{ij}.$$

Для 1-периодических по переменной $\boldsymbol{z}$ функций $\boldsymbol{U}_c^{(ij)}$, $\boldsymbol{U}_c^{(0)}$, $Q_c^{(ij)}$ и $Q_c^{(0)}$ имеем следующие периодические краевые задачи

$$\left.\begin{array}{l}\nabla_z\cdot\big(\mathfrak{A}_0^{(f)}:\mathbb{D}(z,\boldsymbol{U}_c^{(ij)})\big)-\nabla_z Q_c^{(ij)}=0\,,\quad \boldsymbol{z}\in Z_s\,,\\ \nabla_z\cdot\boldsymbol{U}_c^{(ij)}=0\,,\quad \boldsymbol{z}\in Z_s\,,\quad \langle\boldsymbol{U}_c^{(ij)}\rangle_{Z_s}=0\,,\\ \Big(\mathfrak{A}_0^{(f)}:\big(\mathbb{D}(z,\boldsymbol{U}_c^{(ij)})+\mathbb{J}^{ij}\big)-Q_c^{(ij)}\mathbb{I}\Big)\cdot\boldsymbol{\nu}=0\,,\quad \boldsymbol{z}\in\gamma_c\,,\end{array}\right\}\tag{20}$$

$$\left.\begin{array}{l}\nabla_z\cdot\big(\mathfrak{A}_0^{(f)}:\mathbb{D}(z,\boldsymbol{U}_c^{(0)})\big)-\nabla_z Q_c^{(0)}=0\,,\quad \boldsymbol{z}\in Z_s\,,\\ \nabla_z\cdot\boldsymbol{U}_c^{(0)}+1=0\,,\quad \boldsymbol{z}\in Z_s\,,\quad \langle\boldsymbol{U}_c^{(0)}\rangle_{Z_s}=0\,,\\ \big(\mathfrak{A}_0^{(f)}:\mathbb{D}(z,\boldsymbol{U}_c^{(0)})-Q_c^{(0)}\mathbb{I}\big)\cdot\boldsymbol{\nu}=0\,,\quad \boldsymbol{z}\in\gamma_c\,.\end{array}\right\}\tag{21}$$

Здесь $\boldsymbol{\nu}$ – вектор единичной нормали к γ_c. Следовательно,

$$\mathbb{D}(z,\boldsymbol{W}_s)=\sum_{i,j=1}^{3}\mathbb{D}(z,\boldsymbol{U}_c^{(ij)})D_{ij}+\mathbb{D}(z,\boldsymbol{U}_c^{(0)})d=$$

$$\Big(\sum_{i,j=1}^{3}\mathbb{D}(z,\boldsymbol{U}_c^{(ij)})\otimes\mathbb{J}^{ij}+\mathbb{D}(z,\boldsymbol{U}_c^{(0)})\otimes\mathbb{I}\Big):\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}_s),$$

$$(Q_s-\frac{1}{m_c}q_c)\mathbb{I}=\lambda_0\Big(\sum_{i,j=1}^{3}Q_c^{(ij)}(\mathbb{I}\otimes\mathbb{J}^{ij})+Q_c^{(0)}(\mathbb{I}\otimes\mathbb{I})\Big):\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}_s),$$

и подстановка полученных выражений в (7) приводит к необходимому уравнению (11) с

$$\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_0^{(f)}:\Big((1-m_c)\mathbb{J}+\Big(\sum_{i,j=1}^{3}\mathbb{D}(z,\boldsymbol{U}_c^{(ij)})\otimes\mathbb{J}^{ij}+\mathbb{D}(z,\boldsymbol{U}_c^{(0)})\otimes\mathbb{I}\Big)\Big)+$$

$$\sum_{i,j=1}^{3}Q_c^{(ij)}(\mathbb{I}\otimes\mathbb{J}^{ij})+Q_c^{(0)}(\mathbb{I}\otimes\mathbb{I}).\tag{22}$$

Доказательство основных свойств тензора $\mathfrak{A}$ стандартное ([11], [12]).

4. Доказательство Теоремы 2. Основным моментом доказательства является априорная оценка

$$\lambda_0\int_0^t\int_\Omega|\nabla\boldsymbol{v}_s^n(\boldsymbol{x},\tau)|^2dxd\tau+\frac{1}{\mu_2}\int_\Omega|\nabla q_c^n(\boldsymbol{x},t)|^2dx\le C,\tag{1}$$

где C не зависит от n. Последняя следует их энергетического тождества

$$\frac{\lambda_0}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \big(\mathfrak{A} : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}_s^n)\big) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}_s^n)dx + \frac{1}{m_c^2\,\mu_2}\int_\Omega \nabla\, q_c^n \cdot \mathbb{B}^{(c)}(\nabla\, q_c^n)dx =$$
$$\int_\Omega \tilde{\rho}\boldsymbol{F}\cdot \boldsymbol{v}_s^n dx + \int_\Omega \mathbb{B}^{(c)}(\rho_f \boldsymbol{F})\cdot \nabla\, q_c^n dx \quad (2)$$

и свойств тензора $\mathfrak{A}$ и матрицы $\mathbb{B}^{(c)}$.

Оценка (1) гарантирует компактность последовательности $\{q_c^n\}$ и сходимость $\boldsymbol{v}_s^n \to 0$ при $n \to \infty$.

Литература

1. Allaire G., Briane M. Multisale convergence and reiterated homogenization // Proceed. of Royal Soc. Edinburgh. – 1996. – 126A. – P.297–342.
2. Arbogast T., Douglas J. Jn., Hornung U. Derivation of the double-porosity model of single phase flow via homogenization theory // SIAM J. Math. Anal. – 1990. – 21. – P.823-836.
3. Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // ПММ. – 1960.– 24;5. – С.852-864.
4. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа / М.: Недра, 1972.
5. Biot M.A. General theory of three dimensional consolidation // Journal of Applied Physics. – 1941. – 12. – P.155-164.
6. Biot M.A. Generalized theory of acoustic propagation porous dissipative media // J. Acoust. Soc. Am. – 1962. – 34. – P.1256-1264.
7. Bourgeat A., Pankratov L., Panfilov M. Study of the double porosity model versus the fissures thikness // Asymptotic Analysis. – 2004. – 38. – P.129-141.
8. Burridge R., Keller J.B. Poroelasticity equations derived from microstructure // Journal of Acoustic Society of America. – 1981. – 70;4. – P.1140-1146.
9. Chen Z. Homogenization and simulation for compositional flow in naturally fractured reservoirs // Math. Anal. App. – 2007. – 326. – P.31-75.
10. Kazemi H. Pressure transient analysis of naturally fractured reservoirs with uniform fracture distribution // Soc.Petroleum Engrs. J. – 1969. – 9. – P.451-462.
11. Meirmanov A. Nguetseng's two-scale convergence method for filtration and seismic acoustic problems in elastic porous media // Siberian Mathematical Journal. – 2007. – 48;3. – P.519-538.
12. Meirmanov A. Double porosity models in incompressible poroelastic media // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. – 2010. – 20;4. – P.635-659.
13. Meirmanov A. A description of seismic acoustic wave propagation in porous media via homogenization // SIAM J. Math. Anal. – 2008. – 40;3. – P.1272-1289.
14. Nguetseng G. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization // SIAM Journal on Mathematical Analysis. – 1989. – 20. – P.608-623.
15. Pride S.R., Berryman J.G. Linear dynamics of double-porosity dual-permeability materials. I. Governing equations and acoustic attenuation // Physical Revew E. – 2003. – 68. – 036603.
16. Pride S.R., Berryman J.G. Linear dynamics of double-porosity dual-permeability materials. II. Fluid transport equations // Physical Revew E. – 2003. – 68. – 036604.
17. Sanchez-Palencia E. Non-Homogeneous Media and Vibration Theory / Lecture Notes in Physics, Vol.129 / Berlin: Springer, 1980.
18. de Swaan A. Analytic solutions for determing naturally fractured reservoir properties by well testing // Soc. Petroleum Engrs. J. – 1976. – 16. – P.117-122.

19. Terzaghi K. Die Berechnung der Durchlassigkeitsziffer des Tones aus dem Verlauf der hydrodynamischen Spannungsercheinungen // Sitzung berichte. Akademie der Wissenschaften, Wien Mathematiesch-Naturwissenschaftliche Klasse. – 1923. – 132; IIa. – P.104-124.
20. Warren J.E. Root P.J. The behaviour of naturally fractured reservoirs // Soc. Petroleum Engrs. J. – 1963. – 3. – P.235-255.

REITERATED HOMOGENIZATION IN PROBLEMS OF UNDERGROUND LIQUID FILTRATION

A.M. Meirmanov

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, email: meirmanov@bsu.edu.ru

Abstract. Using the theory of averaging some models with double porosity models describing the liquid filtration in porous-elastic media are derived. On the microscopic level the fluid dynamics is governed by the stationary Stokes system for incompressible viscous liquid. The domain where the liquid flows is a union of two independent systems of cracks and pores. It is supposed that the dimensionless parameter ε which characterizes sizes of pores depends on the dimensionless parameter δ which characterizes sizes of cracks such that $\varepsilon = \delta^r$ с $r > 1$. Dynamics of solid skeleton is described by stationary Lamé's system. Under the supposition that joint motion of elastic skeleton and the liquid are averaged (first averaging) second averaging of liquid motion in cracks and the mixture of solid component and the liquid in pores is fulfilled at $\delta \to 0$. As a result, the modified Terzaghi-Biot system described porous elasticity is derived. It described the dynamics of the liquid in cracks and displacements of the solid skeleton. For the absolutely rigid skeleton we derive the usual Darcy equations which govern the liquid filtration in cracks while the liquid in pores is blocked and unmoved.

Key words: liquid filtration, reiterated homogenization, Darcy's, Biot's, Lame's and Stokes' equations.