УДК 511.3

О СРЕДНЕМ ЧИСЛА РЕШЕНИЙ БИНАРНОЙ ПРОБЛЕМЫ ГОЛЬДБАХА

С.А. Гриценко, Н.Н. Мотькина

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: Gritsenko@bsu.edu.ru

Аннотация. В работе доказан теорема, которая является вариантом теоремы Чудакова относительно бинарной задачи Гольдбаха с простыми числами специального вида.

Ключевые слова: аддитивные задачи, бинарная проблема Гольдбаха, теорема Чудакова, простые числа специального вида.

1. Введение. В 1742 г. в письме к Л. Эйлеру X. Гольдбах высказал гипотезу, что каждое нечетное число, большее семи, может быть представлено в виде суммы трех нечетных простых чисел. В ответном письме Л. Эйлер предположил, что всякое четное число, большее четырех, есть сумма двух нечетных простых чисел. Эти задачи получили названия соответственно *тернарная* и *бинарная проблемы Гольдбаха.*

В 1937 г. И.М. Виноградов полностью решил тернарную проблему Гольдбаха. Утверждение бинарной проблемы Гольдбаха остается до сих пор недоказанным. В 1938 г. Н.Г. Чудаков [1] доказал следующую теорему, решив тем самым бинарную проблему Гольдбаха «в среднем».

Теорема 1. *Пусть $K(X)$ равно числу тех четных чисел между 6 и X, которые не могут быть представлены как сумма двух нечетных простых. Тогда*

$$K(X) \leqslant C_D \frac{X}{\log^D X}\,, \quad 6 \leqslant X < \infty\,,$$

где D – произвольное фиксированное положительное число, C_D — положительная константа, зависящая только от D.

В этой работе изучается вопрос о среднем числа решений бинарной проблемы Гольдбаха в простых числах специального вида

$$a < \{\eta p_i\} < b\,, \quad i = 1, 2\,,$$

где η – произвольное иррациональное алгебраическое число степени n, a и b – произвольные фиксированные действительные числа из отрезка $[0, 1]$. Настоящая публикация является продолжением исследований авторов аддитивных задач с простыми числами специального вида, начатого в [2-4]. Отличие состоит в том, что в работах [2-4] η – квадратичная иррациональность. В данной статье представлено краткое изложение доказательства следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть $K(X)$ – число тех четных чисел между 6 и X, которые не могут быть представлены как сумма двух нечетных простых специального вида $a < \{\eta p_i\} < b, i = 1, 2, b - a > 1/2$. Тогда при любом фиксированном $D > 0$*

$$K(X) = O(X \log^{-D} X)\,.$$

2. Схема доказательства Теоремы 2. 1. Пусть $v_j = 2j$, где $j = 1, 2, \ldots, N$, $X/2 < v_j \leqslant X$. Определим множество

$$\mathcal{K} = \{v_j \,| v_j \neq p_1 + p_2,\ a < \{\eta p_i\} < b,\ i = 1, 2\}$$

Рассмотрим интеграл

$$I = \int_0^1 S_0^2(y) T(y) dy\,,$$

где

$$S_0(y) = \sum_{\substack{p \leqslant X \\ a < \{\eta p\} < b}} e^{2\pi i y p}, \quad T(y) = \sum_{\substack{j \leqslant N \\ v_j \in \mathcal{K}}} e^{-2\pi i y v_j}.$$

Введем характеристическую функцию $\psi_0(x)$ интервала (a, b) и продолжим ее с периодом 1 на всю числовую ось. Тогда

$$S_0(y) = \sum_{p \leqslant X} \psi_0(\eta p) e^{2\pi i y p}.$$

В формулировке леммы о «стаканчиках» И.М. Виноградова (см.[5], с. 22) выберем $r = [\log N]$, $\Delta = \log^{-1,5C} N$, $C > 0$ и, кроме того, выберем $\alpha = a + \Delta/2$ и $\beta = b - \Delta/2$ и переобозначим числа α и β и функцию ψ из формулировки этой леммы, соответственно, как α_1, β_1 и ψ_1. Далее, положив в формулировке той же леммы $\alpha = a - \Delta/2$ и $\beta = b + \Delta/2$, переобозначим, как и в предыдущем случае, α, β и ψ на α_2, β_2 и ψ_2. Определим

$$J_k = \int_0^1 \left(\sum_{p \leqslant X} \psi_k(\eta p) e^{2\pi i y p} \right)^2 T(y) dy\,, \quad k = 1, 2.$$

Из свойств $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ следует, что $J_1 \leqslant I \leqslant J_2$. Для J_1 и J_2 выведем приближенные формулы, главные члены в которых одинаковы. Разложив предварительно «сглаженную» функцию $\psi_k(x)$ в ряд Фурье, перейдем к суммам

$$\sum_{|m_1| \leq r\Delta^{-1}} c_k(m_1) \sum_{|m_2| \leq r\Delta^{-1}} c_k(m_2) \int_0^1 S(y + m_1\eta) S(y + m_2\eta) T(y) dy + O(X^{3/2 - \log \pi} N^{1/2})\,,$$

где

$$S(y) = \sum_{p \leq X} e^{2\pi i y p}.$$

2. При $m_1 = m_2 = m$ рассмотрим сумму

$$I_1 = \sum_{|m|\leqslant r\Delta^{-1}} c_k^2(m) \sum_{\substack{j\leqslant N\\ v_j\in\mathcal{K}}} e^{2\pi i m\eta v_j} \sum_{p_1\leqslant X}\sum_{p_2\leqslant X} \int_0^1 e^{2\pi i y(p_1+p_2-v_j)}dy\,.$$

Для этой суммы получим представление

$$I_1 = \sum_{|m|\leqslant r\Delta^{-1}} c_k^2(m) \sum_{\substack{j\leqslant N\\ v_j\in\mathcal{K}}} e^{2\pi i m\eta v_j} I_{2,1}(X,j)\,,$$

где $I_{2,1}(X,j)$ – число решений уравнения $p_1+p_2 = v_j$ в простых числах p_1, p_2. Поскольку при $m\neq 0$ ([6], с. 16)

$$c_k(m) = i\frac{e^{-2\pi i m\beta_k} - e^{-2\pi i m\alpha_k}}{2\pi m}\left(\frac{e^{\pi i m\Delta/r} - e^{-\pi i m\Delta/r}}{2\pi i m\Delta/r}\right)^r,$$

то для $0<|m|<\Delta^{-1/2}$

$$c_k^2(m) = e^{-2\pi i m(a+b)}\frac{\sin^2\pi m(b-a)}{\pi^2 m^2}\left(1+O(\Delta^{1/2})\right)\,.$$

Тогда

$$I_1 = \sum_{\substack{j\leqslant N\\ v_j\in\mathcal{K}}} I_{2,1}(X,j)(\sigma(v_j,a,b)+O(\Delta^{1/2})),$$

где

$$\sigma(v_j,a,b) = \sum_{|m|<\infty} e^{2\pi i m(\eta v_j-(a+b))}\frac{\sin^2\pi m(b-a)}{\pi^2 m^2}\,.$$

Известно [6, с. 224], что

$$I_{2,1}(X,j)\sim \sum_{k+m=v_j}\frac{1}{\log k\log m}\cdot\prod_{p\nmid v_j}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{p|v_j}\left(1+\frac{1}{p-1}\right)\gg\frac{X}{\log^2 X}\,.$$

Ранее, нами изучено поведение ряда $\sigma(v_j,a,b)$ [7] и для него получено равенство

$$\sigma(v_j,a,b) = (b-a)^2 + \{\eta v_j - a - b\}^2 - \{\eta v_j - a - b\}-$$

$$-0,5(\{\eta v_j - 2a\}^2 - \{\eta v_j - 2a\} + \{\eta v_j - 2b\}^2 - \{\eta v_j - 2b\}).$$

При фиксированной разности $b-a$ построим графики (рис. 1, 2), где $t = \eta v_j - a - b$. Если $b-a>1/2$, то сумма ряда $\sigma(v_j,a,b)>0$.

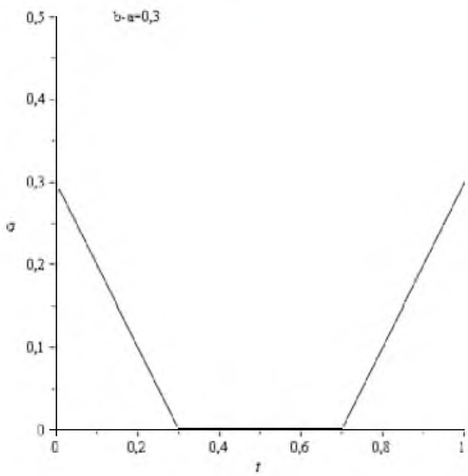

Рис. 1. $0 \leqslant b-a \leqslant 1/2$.

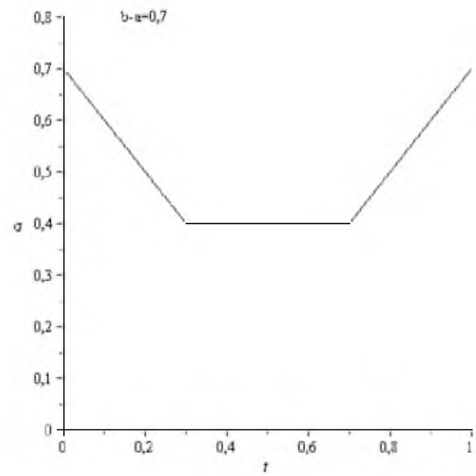

Рис. 2. $1/2 < b-a \leqslant 1$.

3. Если $m_1 \neq m_2$, то положим, для определенности, что $m_1 < m_2$. Сделаем замену $t = y + m_1\eta$. Поскольку подынтегральная функция является периодичной по t с периодом 1, интеграл можно рассматривать на промежутке $E = [-1/\tau; 1 - 1/\tau)$, где $\tau = X\log^{-B} X$, $B > 2C + 8$. Промежуток интегрирования по t разобьем на два непересекающихся множества: E_1 – «большие» дуги (множество точек t, находящихся близко к рациональным числам с малыми знаменателями $1 \leqslant q \leqslant \log^A X$, $A > 2C + 8$) и E_2 – «малые» дуги. На «малых» дугах известна оценка для $|S(t)|$. На «больших» дугах получаем оценку для $|S(t + m\eta)|$. Пользуясь неравенством Коши, находим

$$(\int_{E_1} + \int_{E_2})|S(t)||S(t + (m_2 - m_1)\eta)||T(t - m_1\eta)|dt \ll$$

$$\ll \sqrt{\pi(X)\pi(N)}(\max_{t\in E_1}|S(t + m\eta)| + \max_{t\in E_2}|S(t)|) \ll X^2\log^{-C} X\,.$$

4. При выборе $A = D + 12$, $B = 2D + 14$, $C = D + 2$ получаем требуемую асимптотическую формулу.

Литература

1. Чудаков Н.Г. О плотности совокупности четных чисел, непредставимых как сумма двух нечетных простых // Изв. АН СССР, Серия математич. – 1938. – №1. – С.25-40.
2. Мотькина Н.Н. Об одном варианте тернарной проблемы Гольдбаха // Доклады АН Республики Таджикистан. – 2009. – 52;6. – С.413-417.
3. Мотькина Н.Н. Задача Хуа Ло-кена с простыми числами специального вида // Доклады АН Республики Таджикистан. – 2009. – 52;7. – С.497-500.
4. Мотькина Н.Н. О некоторых аддитивных задачах теории чисел // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. – 2010. – № 5(76);18. – С.83-87.
5. Виноградов И.М. Особые варианты метода тригонометрических сумм / М.: Наука, 1983.
6. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел. – М.: Наука, 1983.
7. Мотькина Н.Н. О некоторых особых рядах / Комплексный анализ и его приложения в дифференциальных уравнениях и теории чисел: сб. материалов Международной конференции (Белгород, 17-21 окт. 2011 г.) / Белгород: ИПК НИУ БелГУ. – 2011. – С.44-45.

ABOUT AVERAGE NUMBER OF SOLUTIONS OF BINARY GOLDBACH's PROBLEM

S.A. Gritsenko, N.N. Mot'kina

Abstract. The Tchudakoff's type theorem concerned the Goldbach binary problem with given primes is proved.

Keywords: additive problems, binary problem of Goldbach, Tchudakoff's theorem, primes of special type.