УДК 531.1

ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ КОМБИНАТОРНЫХ СУММ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ БОЗЕ-ГАЗА МЕТОДОМ ПРОИЗВОДЯЩЕЙ ФУНКЦИИ[15)]

Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. В сообщении представлен простой метод вычисления на основе производящей функции двух комбинаторных сумм, встречающихся в статистической механике Бозе-газа с термодинамически устойчивым взаимодействием произвольного вида при выделении кинематической части в статистической сумме.

Ключевые слова: биномиальные коэффициенты, производящая функция, оператор сдвига.

Здесь представлено вычисление двух сумм специального вида, составленных из биномиальных коэффициентов. Эти суммы естественным образом возникают при суммировании по диаграммам, которые появляются при построении квантвого вириального разложения [1] для Бозе-газа. Метод вычисления основан на применении специальной производящей функции. Аналитический проем, основанный на применении оператора сдвига, который используется представляется интересным для дальнейшего его обобщения.

Теорема 1. *Пусть функция* $G : \mathbb{N}_+^3 \mapsto \mathbb{N}_+$ *определяется формулой*

$$G(n,m,l) = \sum_{\substack{k:\, k \leqslant \min\{m,l\} \\ k \geqslant \max\{l-n,0\}}} \binom{m}{k}\binom{n}{l-k}$$

при $n + m \geqslant l$. *Тогда*

$$G(n,m,l) = \binom{n+m}{l}.$$

□ Легко проверить, что для значений функции G справедливо следующее представление

$$G(n,m,l) = \frac{1}{l!}\left\{\sum_{k=0}^{l}\binom{l}{k}\frac{\partial^k}{\partial x^k}\frac{\partial^{l-k}}{\partial y^{l-k}}x^m y^n\right\}\Bigg|_{x=y=1},$$

так как оно обращается в нуль при $l > n + m$. Из этого представления следует

$$G(n,m,l) = \frac{1}{l!}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^l x^m y^n\right\}\Bigg|_{x=y=1}.$$

[15]Работа выполнена в рамках ФЦП ГК № 02.740.11.0545

Введем производящую функцию

$$\varphi(z;m,n) \equiv \sum_{l=0}^{\infty} z^l G(n,m,l)\,, \quad z \in \mathbb{Z}\,.$$

Эта функция вычисляется на основе свойств оператора сдвига,

$$\varphi(z;m,n) = \left\{\sum_{l=0}^{\infty}\frac{z^l}{l!}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)^l x^m y^n\right\}\Bigg|_{x=1,y=1} = \left\{\exp\left[z\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]x^m y^n\right\}\Bigg|_{x=1,y=1} =$$

$$= \left\{\exp\left[z\frac{\partial}{\partial x}\right]x^m\right\}_{x=1} \times \left\{\exp\left[z\frac{\partial}{\partial y}\right]y^n\right\}_{y=1} = (1+z)^m(1+z)^n = (1+z)^{m+n}\,,$$

так как псевдодифференциальные операторы $\exp[z\partial/\partial x]$ и $\exp[z\partial/\partial y]$ являются операторами сдвига аргумента в применение, соответственно, к произвольным аналитическим функциям f от $x \in \mathbb{C}$ и g от $y \in \mathbb{C}$, $\exp[z\partial/\partial x]\,f(x) = f(x+z)$, $\exp[z\partial/\partial y]\,g(y) = g(y+z)$. Из явного вида производящей функции следует формула для $G(n,m,l)$, указанная в формулировке теоремы. ■

Теорема 2. *Пусть функция $G : \mathbb{N}_+^3 \mapsto \mathbb{Z}$ определяется формулой*

$$G(n,m,l) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}|\frac{(m+k+l)!}{(k+l)!}\,.$$

Тогда

$$G(n,m,l) = \theta(n-m)(-1)^n\frac{m!}{(m-n)!}\,\frac{(l+m)!}{(l+n)!}\,, \qquad \theta(k) = \begin{cases} 1; & r \geqslant 0\,, \\ 0; & k < 0\,. \end{cases}$$

□ Имеет место представление

$$\frac{(k+l+m)!}{(k+l)!} = \left(\frac{d^m}{dx^m}\,x^{k+l+m}\right)_{x=1}\,.$$

Следовательно

$$G(n,m,l) = \left(\frac{d^m}{dx^m}\,x^{l+m}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^k\right)_{x=1} = \left(\frac{d^m}{dx^m}\,x^{l+m}(1-x)^n\right)_{x=1}\,.$$

Явное дифференцирование в последнем выражении приводит к формуле

$$G(n,m,l) = \left[\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\left(\frac{d^k}{dx^k}(1-x)^n\right)\left(\frac{d^{m-k}}{dx^{m-k}}x^{m+l}\right)\right]_{x=1} =$$

$$= \left[\sum_{k=0}^{\min\{n,m\}}(-1)^k\binom{m}{k}\frac{(m+l)!}{(k+l)!}\,\frac{n!}{(n-k)!}x^{k+l}(1-x)^{n-k}\right]_{x=1}\,.$$

При $n > m$ в последнем выражении все слагаемые равны нулю, а при $n \leqslant m$ отлично от нуля только последнее слагаемое $(-1)^n n!\binom{m}{n}\dfrac{(m+l)!}{(n+l)!}$. ■

Литература

1. Ахиезер А.И., Пелетминский С.В. Методы статистической физики / М.: Наука, 1977. – 368 с.

CALCULATION OF SOME COMBINATORIC SUMS OF BOSE-GAS STATISTICAL MECHANICS BY GENERATION FUNCTION METHOD

Yu.P. Virchenko

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Abstract. It is proposed the simple method of calculation of two special combinatoric sums on the basis of generation function. These sums are appeared in statistical mechanics of Bose-gas with arbitrary thermodynamically stable interaction when the kinematic part is extracted from the partition function.

Key words: binomial coefficients, generation function, shift operator.