КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.925

ПОЛНОСТЬЮ ВЫРОЖДЕННЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ

Ю.П. Вирченко, А.В. Субботин

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. Вводится понятие о полностью вырожденных гамильтоновых системах. Посредством явной конструкции доказывается, что такие системы могут иметь произвольное число степеней свободы.

Ключевые слова: гамильтоновы системы, жорданово представление, собственное число, число степеней свободы.

Рассмотрим линейную гамильтонову систему

$$\dot{P} = -\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial Q}\,, \qquad \dot{Q} = \frac{\partial \mathsf{H}}{\partial P}\,, \tag{1}$$

$P = \langle p_1, ..., p_n\rangle$, $Q = \langle q_1, ..., q_n\rangle$, где n – число степеней свободы этой системы и H – ее квадратичный по динамическим переменным P и Q гамильтониан,

$$\mathsf{H} = \frac{1}{2}(P, \mathcal{A}P) + (P, \mathcal{B}Q) + \frac{1}{2}(Q, \mathcal{C}Q)\,.$$

Здесь $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ – вещественные $n \times n$-матрицы, причем матрицы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{C}$ – симметричны.

Система уравнений (1) представима в виде

$$\begin{pmatrix}\dot{P}\\ \dot{Q}\end{pmatrix} = \mathcal{G}\begin{pmatrix}P\\ Q\end{pmatrix},$$

где генератор сдвига по времени — $2n \times 2n$-матрица G имеет специальную форму

$$G = \begin{pmatrix} -\mathcal{B}^T & -\mathcal{C} \\ \mathcal{A} & \mathcal{B}\end{pmatrix}. \tag{2}$$

В этом сообщении мы, в отличие от предыдущего [1] (см. также [2]) займемся исследованием спектральных свойств матрицы $\mathcal{G}$ в вырожденном случае.

Линейную гамильтонову систему назовем вырожденной, если $\det G = 0$. При этом мы будем называть ее *полностью вырожденной*, если матрица G имеет единственное собственное число. Иными словами, линейная гамильтонова система – полностью вырожденна, если в жордановом представлении матрица G представляется $2n \times 2n$-клеткой Жордана с нулевой диагональю.

Можно доказать, что в составе любой линейной вырожденной гамильтоновой системы может находиться не более одной полностью вырожденной. Однако, мы в настоящем сообщении не будем на этом останавливаться. Нашей целью является доказательство утверждения о том, что существуют линейные полностью вырожденные гамильтоновы системы с произвольным числом степеней свободы. Доказательство состоит в явном предъявлении $2n \times 2n$-матрицы G с произвольным фиксированным значением числа $n \in \mathbb{N}$ степеней свободы и доказательства, что эта матрица представляет собой клетку Жордана с нулевой диагональю.

Рассмотрим матрицу

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} \mathcal{S} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & -\mathcal{S}^T \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $\mathbf{0}, \mathbf{1}$ – соответственно нулевая и единичная матрицы, а $\mathcal{S}$ – $n \times n$-клетка Жордана, то есть $(\mathcal{S})_{ij} = 1$ при $j = i + 1$, $i = 1 \div n - 1$ и $(\mathcal{S})_{ij} = 0$ в противном случае Справедливо утверждение

Теорема. *Имеет место равенство* $\mathcal{G}^{2n} = \mathbf{0}$ *и при этом* $\mathcal{G}^{2n-1} \neq \mathbf{0}$.

□ Мы приведем два доказательства. Одно из них аналитическое и основано на линейной гамильтоновой системе, порождаемой матрицей (3), у которой, таким образом, $\mathcal{C} = \mathbf{0}$, $\mathcal{A} = \mathbf{1}$, $\mathcal{B} = -\mathcal{S}^T$. Второе доказательство является чисто алгебраическим.

1. Достаточно доказать, что асимптотика решения

$$\begin{pmatrix} P(t) \\ Q(t) \end{pmatrix} = \exp(t\mathcal{G}) \begin{pmatrix} P(0) \\ Q(0) \end{pmatrix} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^l}{l!} \mathcal{G}^l \begin{pmatrix} P(0) \\ Q(0) \end{pmatrix}$$

указанной гамильтоновой системы

$$\begin{pmatrix} \dot{P}(t) \\ \dot{Q}(t) \end{pmatrix} = \mathcal{G} \begin{pmatrix} P(t) \\ Q(t) \end{pmatrix}$$

пропорциональна t^{2n-1} в общем положении. Это устанавливается явным построением общего решения этой системы, то есть системы уравнений

$$\dot{P}(t) = \mathcal{S}P(t), \qquad \dot{Q}(t) = P(t) - (\mathcal{S}^T Q)(t).$$

Первое уравнение, ввиду нильпотентности порядка n матрицы $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}^n = 0$, дает

$$P(t) = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{t^l}{l!} (\mathcal{S}^l P)(0), \tag{4}$$

причем, так как $\mathcal{S}^{n-1} \neq 0$, то в этой сумме присутствует слагаемое с наибольшей степенью, пропорциональное t^{n-1}.

Из второго уравнения следует, что

$$Q(t) = \exp(-t\mathcal{S}^T)Q(0) + \int_0^t \exp(-\mathcal{S}^T(t - t'))P(t')dt' =$$

$$= \exp(-t\mathcal{S}^T)Q(0) + \int_0^t \exp(-\mathcal{S}^T(t - t')) \exp(t'\mathcal{S})dt' P(0).$$

Матрица $\mathcal{S}^T$ нильпотентна порядка n, так как $(\mathcal{S}^T)^n = (\mathcal{S}^n)^T = 0$ и $(\mathcal{S}^T)^{n-1} = (\mathcal{S}^{n-1})^T \neq 0$. Тогда первое слагаемое в правой части имеет такой же вид как и (4),

$$\exp(-t\mathcal{S}^T)Q(0) = \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^l \frac{t^l}{l!} \mathcal{S}^l Q(0)$$

с ненулевым коэффициентом при t^{n-1}. Второе же слагаемое, после разложения матричных экспонент в ряд, принимает вид

$$\sum_{l,m=0}^{n-1} \frac{(\mathcal{S}^T)^l \mathcal{S}^m}{l!m!} \int_0^t (t'-t)^l t'^m dt' P(0)\,.$$

Интеграл, входящий в коэффициенты этого ряда равен

$$t^{l+m+1} \int_0^1 (s-1)^l s^m ds\,,$$

где коэффициент при t^{l+m+1} не равен нулю (имеет знак $(-1)^m$). В частности, при $l = m = (n-1)$ получаем утверждение теоремы, так как $(\mathcal{S})_{ij} = \delta_{i+1,j}$, то есть $(\mathcal{S}^{n-1})_{ij} = \delta_{i+n-1,j} = \delta_{in}\delta_{j1}$, и $([\mathcal{S}^T]^{n-1})_{ij} = ([\mathcal{S}^n]^T)_{ij} = \delta_{jn}\delta_{i1}$, поэтому

$$([\mathcal{S}^T]^{n-1}\mathcal{S}^{n-1})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} ([\mathcal{S}^T]^{n-1})_{ik}(\mathcal{S}^{n-1})_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{kn}\delta_{i1}\delta_{kn}\delta_{j1} = \mathrm{diag}\{1,0,....,0\} \neq 0\,.$$

2. Для матрицы вида (3) индукцией по $l = 1,2,3,...$ доказывается, что

$$\mathcal{G}^l = \begin{pmatrix} \mathcal{S}^l & \mathbf{0} \\ \mathcal{A}_l & (-\mathcal{S}^T)^l \end{pmatrix},$$

и при этом матрицы $\mathcal{A}_l$ связаны рекуррентным соотношением

$$\mathcal{A}_{l+1} = \mathcal{S}^l - \mathcal{S}^T\mathcal{A}_l \tag{5}$$

при $\mathcal{A}_1 = \mathbf{1}$. В самом деле,

$$\mathcal{G}^{l+1} = \mathcal{G}\mathcal{G}^l = \begin{pmatrix} \mathcal{S} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & -\mathcal{S}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{S}^l & \mathbf{0} \\ \mathcal{A}_l & (-\mathcal{S}^T)^l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{S}^{l+1} & \mathbf{0} \\ \mathcal{S}^l - \mathcal{S}^T\mathcal{A}_l & (-\mathcal{S}^T)^{l+1} \end{pmatrix}.$$

Индукцией по l проверяется, что решением разностного уравнения (5) с начальным условием $\mathcal{A}_1 = \mathbf{1}$ является

$$\mathcal{A}_l = \sum_{k=0}^{l-1} (-1)^k (\mathcal{S}^T)^k \mathcal{S}^{l-1-k}\,, \tag{6}$$

так как подстановка этого выражения для $\mathcal{A}_l$ в (5) дает

$$\mathcal{A}_{l+1} = \mathcal{S}^l - \mathcal{S}^T \sum_{k=0}^{l-1} (-1)^k (\mathcal{S}^T)^k \mathcal{S}^{l-1-k} = \mathcal{S}^l + \sum_{k=0}^{l-1} (-1)^{k+1} (\mathcal{S}^T)^{k+1} \mathcal{S}^{l-1-k} =$$

$$= \mathcal{S}^l - \sum_{k=1}^{l} (-1)^k (\mathcal{S}^T)^k \mathcal{S}^{l-k} = \sum_{k=0}^{l} (-1)^k (\mathcal{S}^T)^k \mathcal{S}^{l-k}\,.$$

Из (5) следует, что $\mathcal{A}_l = (-1)^{l-n}(\mathcal{S}^T)^{l-n}\mathcal{A}_n$ при $l > n$, так как $\mathcal{S}^n = \mathbf{0}$. Тогда из (6) следует, что

$$\mathcal{A}_{2n-1} = (-1)^{n-1}(\mathcal{S}^T)^{n-1}\mathcal{A}_n = (-1)^{n-1}(\mathcal{S}^T)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (\mathcal{S}^T)^k \mathcal{S}^{n-1-k} = (-1)^{n-1}(\mathcal{S}^T)^{n-1}\mathcal{S}^{n-1}\,,$$

так как все остальные слагаемые в сумме обращаются в нуль в силу $(\mathcal{S}^T)^n = \mathbf{0}$. Наконец, так как $(\mathcal{S}^T)^{n-1}\mathcal{S}^{n-1} = \mathrm{diag}\{1, 0, ..., 0\} \neq \mathbf{0}$ и $\mathcal{A}_{2n} = -\mathcal{S}^T\mathcal{A}_{2n-1} = (-1)^n(\mathcal{S}^T)^n\mathcal{S}^{n-1} = \mathbf{0}$, то получаем справедливость требуемого утверждения. ■

Свойство матрицы, утверждаемое в формулировке теоремы, является характеристическим для клетки Жордана порядка n.

Литература

1. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. Симметричность спектра линейных гамильтоновых систем // Belgorod State University Scientific Bulletin. – 2011. – 17(112);24. – С.179-180.

2. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. Свойство локальной обратимости гамильтоновых динамических систем // Материалы Международной конференции «Комплексный анализ и его приложения в дифференциальных уравнениях и теории чисел» Белгород, 17-21 октября 2011 / С.37-38.

COMPLETELY DEGENERATE LINEAR HAMILTONIAN SYSTEMS

Yu.P. Virchenko, A.V. Subbotin

Belgorod State University,
Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail:virch@bsu.edu.ru

Abstract. The concept of completely degenerate hamiltonian systems is introduced. It is proved by explicit construction that such systems may have arbitrary number of freedom degrees.

Key words: hamiltonian systems, Jordan representation, eigenvalue, number of freedom degrees.