УДК 511

О ДИОФАНТОВЫХ НЕРАВЕНСТВАХ С ПРОСТЫМИ ЧИСЛАМИ

С.А. Гриценко, Нгуен Тхи Ча

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail:s.gritsenko@gmail.com, nguyentra.bsu@gmail.com

Аннотация. В работе доказано, что к заданному числу N можно подойти суммой трех квадратов простых чисел на расстояние, не большее, чем $N^{\frac{49}{144}}\exp(\ln^{0.8}N)$ и можно подойти суммой двух простых чисел на расстояние, не большее, чем $N^{\frac{7}{72}}\exp(\ln^{0.8}N)$.

Ключевые слова: простые числа, диофантовы неравенства, плотностная теорема.

Введение. Пусть $N(\sigma,T)$ – число нетривиальных нулей $\zeta(s)$ в прямоугольнике $\sigma\le \mathrm{Re}s<1$, $0<\mathrm{Im}s\le T$. Оценки вида

$$N(\sigma,T)\ll T^{2\lambda(1-\sigma)}\ln^c T\,,\qquad \lambda\ge 1\,,\qquad c\ge 1\,,$$

где λ и c — константы, называются плотностными теоремами.

Наилучшим современным значением λ является $\lambda=\frac{6}{5}$ (см. [1]). Константа c играет меньшую роль. В работе [2] доказано, что $c<18.2$.

Со времен Римана известны формулы, связывающие суммы по простым числам с суммами по нетривиальным нулям дзета-функции. Такие формулы называются явными. Пусть $\psi(x)$ – функция Чебышева. Одной из самых известных явных формул является следующее равенство:

$$\psi(x)=x-\sum_{|\mathrm{Im}\rho|\le T}\frac{x^\rho}{\rho}\;+\;O\Big(\frac{x\ln^2 x}{T}\Big)\,,$$

где $2<T\le x$, а суммирование ведется по нетривиальным нулям дзета-функции ρ.

В сороковых годах двадцатого века Ю.В. Линник [3],[4] разработал новую технику решения арифметических задач с простыми числами, основанную на явных формулах и плотностных теоремах. Эта техника получила название плотностной. Плотностная техника особенно эффективна для решения задач о попадании простых чисел в короткие промежутки.

В монографии С.М. Воронина и А.А. Карацубы [5] содержится следующая теорема, доказанная на основе плотностной техники.

Теорема 1. *Пусть λ — константа из плотностной теоремы. Если $H>N^{1-(2\lambda)^{-1}}\exp(\ln^{0.8}N)$, то неравенство*

$$|p-N|\le H \tag{1}$$

разрешимо в простых числах p.

Для числа решений $J(N,H)$ неравенства (1) справедлива оценка $J(N,H)\gg\dfrac{H}{\ln N}$.

В 2006 году в работе [6] В.В. Гирько и С.А. Гриценко при помощи плотностной техники доказали следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть* λ — *константа из плотностной теоремы. Если* $H > N^{1-(2\lambda)^{-1}}\exp(\ln^{0.8} N)$, *то неравенство*

$$|p_1^2 + p_2^2 - N| \le H(2)$$

разрешимо в простых числах p_1 *и* p_2.

Для числа решений $I(N, H)$ неравенства (2) справедлива оценка $I(N, H) \gg \dfrac{H}{\ln N}$.

Сформулируем основные результаты настоящего сообщения.

Теорема 3. *Если* $H > \sqrt{N}\exp(-\ln^{0.1} N)$, *то неравенство*

$$|p_1^2 + p_2^2 - N| \le H$$

разрешимо в простых числах p_1 *и* p_2.

Теорема 4. *Пусть* λ — *константа из плотностной теоремы. Если* $H > N^{(1-(2\lambda)^{-1})^2}\exp(\ln^{0.8} N)$, *то неравенство*

$$|p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - N| \le H$$

разрешимо в простых числах p_1, p_2 *и* p_3.

Теорема 5. *Пусть* λ — *константа из плотностной теоремы. Если* $H > N^{(1-\lambda^{-1})(1-(2\lambda)^{-1})}\exp(\ln^{0.8} N)$, *то неравенство*

$$|p_1 + p_2 - N| \le H$$

разрешимо в простых числах p_1 *и* p_2.

Замечание 1. В отличие от утверждений Теорем 1 и 2 утверждение Теоремы 3 не зависит от константы λ из плотностной теоремы.

В доказательстве теоремы 3 содержится оценка снизу для числа решений диофантова неравенства, однако эта оценка, по-видимому, не является точной.

Замечание 2. Интересно сравнить Теоремы 1 и 3. В Теореме 3 параметр H можно выбрать меньше, чем $\sqrt{N}$, а в Теореме 1 разрешимость неравенства (1) при $H = \sqrt{N}$ не следует даже из гипотезы Римана.

По поводу доказательства Теоремы 3 см. работу [8].

Схема доказательства Теоремы 4.

1. Применим явную формулу. Положим в ней $T = N_1 \ln^3 N/H$.

2. Полученное выражение суммируется по p_1 и p_2 и, в результате, имеем сумму S_4:

$$S_4 = \sum_{\substack{p_1 \\ N-2N_1 < p_1^2+p_2^2 \le N-N_1}} \sum_{p_2} \Bigg(\sqrt{N + H - p_1^2 - p_2^2} - \sqrt{N - H - p_1^2 - p_2^2} - \\ - \sum_{|\gamma| \le T} \int_{\sqrt{N+H-p_1^2-p_2^2}}^{\sqrt{N-H-p_1^2-p_2^2}} x^{\rho-1}dx \; + \; O\left(\frac{\sqrt{N_1}\ln^2 N}{T}\right)\Bigg),$$

где $N_1 = N^{1-(4\lambda)^{-1}} \exp(\ln^{0.8} N)$.

3. Используя следующее неравенство

$$\sum_{N_1<|p_1^2+p_2^2-N|\le 2N_1} \left(\sqrt{N+H-p_1^2-p_2^2} - \sqrt{N-H-p_1^2-p_2^2}\right) \gg C_0 \frac{H\sqrt{N_1}}{\ln N} \ ,$$

на основе неравенства треугольника получается, что

$$S_4 \ge C_0 \frac{H\sqrt{N_1}}{\ln N} - W_4 \ .$$

4. Тогда достаточно получить оценку

$$|W_4| \le H\sqrt{N_1} \ln^2 N \exp(-0.2 \ln^{0.1} N) \ .$$

Для этого W_4 представляется в следующей форме:

$$W_4 = \sum_{N-2N_1<p_1^2+p_2^2\le N-N_1} \int_{\sqrt{N-H-p_1^2-p_2^2}}^{\sqrt{N+H-p_1^2-p_2^2}} \left| \sum_{|\gamma|\le T} x^{\rho-1} \right| dx \ .$$

5. Полученный интеграл оценивается на основе плотностной теоремы Хаксли.

Схема доказательства Теоремы 5.

1. Применим явную формулу. Положим в ней $T = N_1 \ln^3 N/H$.

2. Полученное выражение суммируется по p и, в результате, имеем сумму S_5:

$$S_5 = \sum_{N-2N_1<p\le N-N_1} \left(2H - \sum_{|\gamma|\le T} \int_{N-H-p}^{N+H-p} x^{\rho-1} dx + O\left(\frac{N_1 \ln^2 N}{T}\right)\right),$$

где $N_1 = N^{1-(2\lambda)^{-1}} \exp(\ln^{0.8} N)$.

3. Используя неравенство

$$\sum_{N-2N_1<p\le N-N_1} \left(2H + O\left(\frac{N_1 \ln^2 N}{T}\right)\right) \gg C_0 \frac{HN_1}{\ln N} \ .$$

на основе неравенства треугольника находим, что:

$$S_5 \gg \frac{C_0}{2} \frac{HN_1}{\ln N} - W_5 \ .$$

4. Тогда достаточно получить оценку

$$|W_5| \ll HN_1 \exp\left(-\frac{\delta}{2} \ln^{0.8} N\right) \ .$$

Для этого W_5 представляется в следующей форме:

$$W_5 = \sum_{N-2N_1<p\le N-N_1} \int_{N-H-p}^{N+H-p} \Big| \sum_{|\gamma|\le T} x^{\rho-1} \Big| dx\,.$$

5. Полученный интеграл оценивается использованием плотностной теоремы Хаксли.

Литература

1. Huxley M.N. On the difference between consequtive primes // Invent. Math. – 1972. – 15. – P.164-170.
2. Гриценко С.А. Уточнение одной константы в плотностной теореме // Матем. заметки. – 1994. – 55;2. – С.59-61.
3. Линник Ю.В. О возможности единого метода в некоторых вопросах «аддитивной» и «дистрибутивной» теории простых чисел // ДАН СССР. – 1945. – 49;1. – С.3-7.
4. Линник Ю.В. Об одной теореме теории простых чисел // ДАН СССР. – 1945. – 47;1. – С.7-8.
5. Воронин С.М., Карацуба А.А. Дзета-функция / М.: Физматлит, 1994.
6. Гирько В.В., Гриценко С.А. Об одном диофантовом неравенстве с простыми числами // Чебышевский сборник. – 7;4. – С.26-30.
7. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел / М.: Наука, 1983.
8. Нгуен Тхи Ча. О диофантовых неравенствах с простыми числами // Научные ведомости БелГУ: Математика. Физика. – 2012. – 17(136). – Вып.28. – С.113-118.

ON DIOPHANTE INEQUALITIES WITH PRIMES

S.A. Gritsenko, Nguyen Thi Tra

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail:s.gritsenko@gmail.com, nguyentra.bsu@gmail.com

Abstract. It is proved that the inequality $|p_1^2+p_2^2-N\le H|$ is solvable by primes p_1 and p_2 provided $H\ge\sqrt{N}\exp(-\ln^{0.1}N)$, the inequality $|p_1^2+p_2^2+p_3^2-N|\le H$ is solvable by primes p_1, p_2 and p_3 provided $H>N^{\frac{49}{144}}\exp(\ln^{0.8}N)$ and the inequality $|p_1+p_2-N|\le H$ is solvable by primes p_1 and p_2 provided $H>N^{\frac{7}{72}}\exp(\ln^{0.8}N)$.

Keywords: primes, diofantine inequalities, density theorem.