УДК 517.988.6

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ СТЕПЕНЬ МНОГОЗНАЧНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ПЛОТНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ МОНОТОННОГО ТИПА И НЕКОТОРЫЕ ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ [5)]

Е.С. Барановский [6)]

Воронежский государственный университет,
Университетская пл., 1, Воронеж, 394006, Россия, e-mail: bes220@rambler.ru

Аннотация. В работе вводится понятие топологической степени многозначных возмущений плотно определенных отображений типа (S_+). Изучаются основные свойства данной топологической характеристики. Построенная степень применяется при исследовании задачи управления с обратной связью для одного класса нелинейных уравнений эллиптического типа.

Ключевые слова: топологическая степень, монотонные отображения, плотно определенные отображения типа (S_+), многозначные отображения, асферичные множества, управление с обратной связью, нелинейные эллиптические уравнения.

Введение

Как известно, при изучении многих задач оптимального управления, задач теории дифференциальных уравнений и включений, вариационных неравенств естественно возникают уравнения с многозначными операторами (см., например, [1]). Удобным средством исследования таких уравнений является использование топологических характеристик типа степени многозначных возмущений различных классов однозначных операторов. В [2, 3] была построена теория степени многозначных возмущений (S_+)-отображений.[7)] На основе этой теории удалось изучить ряд задач управления с обратной связью в системах, описываемых нелинейными уравнениями в частных производных [3]–[5].

В предлагаемой статье понятие степени распространяется на более широкий, чем отмеченный выше, класс многозначных отображений, а именно класс многозначных возмущений плотно определенных $(S_+)_E$-отображений. Необходимость такого расширения обусловлена тем, что в приложениях возникают ситуации, когда вместо операторов, заданных на всем пространстве, приходится рассматривать операторы, определенные лишь на всюду плотном множестве. Так происходит, например, при изучении краевых задач для квазилинейных эллиптических и параболических уравнений с «сильно растущими» коэффициентами (см. [6, 7]).

---

[5]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ.

[6]Барановский Евгений Сергеевич – кандидат физ.-мат. наук, научный сотрудник НИИ математики Воронежского государственного университета.

[7]Напомним, что отображения класса (S_+) представляют собой разновидность операторов монотонного типа и естественно возникают при изучении нелинейных краевых задач [12].

Отметим, что теория степени плотно определенных отображений типа (S_+) была предложена А. Картсатосом и И.В. Скрыпником [6]. Приложения этой теории и некоторые ее обобщения рассматриваются в [7, 8].

В данной работе предложена конструкция топологической степени отображений вида $A-G$, где A – однозначный плотно определенный оператор, удовлетворяющий условию $(S_+)_E$, $G=\varphi\circ\Sigma$, φ – однозначный оператор, Σ – компактное многозначное отображение с асферичными образами. Степень определяется по следующей схеме. Сначала отображение $A-G$ аппроксимируется конечномерными проекциями A_k-G_k, $k=1,2\ldots$, и определяется степень многозначных отображений A_k-G_k. Затем устанавливается стабилизация полученных степеней при $k\to\infty$ и предельное значение объявляется степенью исходного отображения. Введенная таким образом характеристика обладает всеми стандартными свойствами топологической степени. В работе рассматривается свойство гомотопической инвариантности степени, а также доказывается аналог «основной теоремы» теории степени. В заключение статьи построенная степень применяется при исследовании задачи управления с обратной связью для одного класса нелинейных уравнений эллиптического типа.

1. Предварительные сведения из теории многозначных отображений

Пусть $\mathcal{X},\mathcal{Z}$ – метрические пространства. Для $M\subset\mathcal{X}$, $\varepsilon>0$ обозначим $O_\varepsilon(M)=\{x\in\mathcal{X}:\ \rho(x,M)<\varepsilon\}$, где $\rho(x,M)$ – расстояние от x до множества M.

Пусть $\Sigma\colon\mathcal{X}\to\mathcal{Z}$ – многозначное отображение (мультиотображение).

Определение 1. *Непрерывное отображение $\sigma_\varepsilon\colon\mathcal{X}\to\mathcal{Z}$, $\varepsilon>0$, называется ε-аппроксимацией Σ, если для каждого $x\in\mathcal{X}$ существует $x'\in O_\varepsilon(x)$ такое, что $\sigma_\varepsilon(x)\in O_\varepsilon(\Sigma(x'))$.*

Совокупность всех ε–аппроксимаций Σ обозначим символом $a(\Sigma,\varepsilon)$.

Лемма 1 (см. [9]). *Пусть $\mathcal{X},\mathcal{X}',\mathcal{Z}$ – метрические пространства, $f\colon\mathcal{X}\to\mathcal{X}'$, $\varphi\colon\mathcal{Z}\to\mathcal{X}'$ – непрерывные отображения. Пусть $\Sigma\colon\mathcal{X}\to\mathcal{Z}$ – полунепрерывное сверху многозначное отображение такое, что для любого $x\in\mathcal{X}$ множество $\Sigma(x)$ компактно. Пусть K – компактное подмножество $\mathcal{X}$ такое, что*

$$f(x)\notin\varphi\circ\Sigma(x),\quad x\in K.$$

Тогда, если $\varepsilon>0$ достаточно мало и $\sigma_\varepsilon\in a(\Sigma,\varepsilon)$, то

$$f(x)\neq\varphi\circ\sigma_\varepsilon(x),\quad x\in K.$$

Приведем теперь определение используемого в дальнейшем класса многозначных отображений. Но сначала напомним некоторые понятия и факты.

Определение 2 (см. [10]). *Непустое компактное подмножество M метрического пространства $\mathcal{Z}$ называется асферичным, если для любого $\varepsilon>0$ найдется δ, $0<\delta<\varepsilon$, такое, что для каждого $n=0,1,\ldots$ любое непрерывное отображение $g\colon S^n\to O_\delta(M)$*

может быть продолжено до непрерывного отображения $\tilde{g}\colon B^{n+1} \to O_\varepsilon(M)$, *где* S^n, B^{n+1} *– единичные сфера и шар в* $\mathbb{R}^{n+1}$.

Определение 3 (см. [1]). *Мультиотображение* $\Sigma : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Z}$ *называется полунепрерывным сверху в точке* $x_0 \in \mathfrak{X}$, *если для любого открытого множества* $V \subset \mathfrak{Z}$ *такого, что* $\Sigma(x_0) \subset V$, *найдется* U_{x_0} *– окрестность точки* x_0 *такая, что* $\Sigma(U_{x_0}) \subset V$. *Мультиотображение* Σ *называется полунепрерывным сверху, если оно полунепрерывно сверху в каждой точке* $x \in \mathfrak{X}$.

Определение 4 (см. [10]). *Многозначное отображение* $\Sigma\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Z}$ *называется* J*–мультиотображением* ($\Sigma \in J(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z})$), *если оно полунепрерывно сверху и для любого* $x \in \mathfrak{X}$ *множество* $\Sigma(x)$ *является асферичным.*

Чтобы отметить насколько широк класс J-мультиотображений, напомним [10], что примерами асферичных множеств в линейном нормированном пространстве служат компактные выпуклые или стягиваемые множества, R_δ - множества.

Следующее аппроксимационное свойство J-мультиотображений, восходящее к работам А.Д. Мышкиса, доказано в [11].

Лемма 2. *Пусть* $\mathfrak{X}$ *– локально стягиваемый конечномерный компакт,* $\Sigma \in J(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z})$. *Тогда*

i) мультиотображение Σ *аппроксимируемо, то есть для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется* $\sigma_\varepsilon \in a(\Sigma, \varepsilon)$;

ii) для любого $\varepsilon > 0$ *найдется* $\delta_0 > 0$ *такое, что для каждого* δ $(0 < \delta < \delta_0)$ *и для любых двух* δ*–аппроксимаций* σ_δ, $\sigma'_\delta \in a(\Sigma, \delta)$ *найдется непрерывное отображение* $\tilde{\sigma}\colon \mathfrak{X} \times [0,1] \to \mathfrak{Z}$ *такое, что*

$$\tilde{\sigma}(\cdot, 0) = \sigma_\delta, \quad \tilde{\sigma}(\cdot, 1) = \sigma'_\delta$$

и $\tilde{\sigma}(\cdot, \lambda) \in a(\Sigma, \varepsilon)$ *для каждого* $\lambda \in [0,1]$.

Пусть $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Z}$ – метрические пространства. Символом $CJ(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}')$ будем обозначать совокупность всех мультиотображений $G\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}'$ вида $G = \varphi \circ \Sigma$, где $\Sigma \in J(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z})$, $\varphi\colon \mathfrak{Z} \to \mathfrak{X}'$ – непрерывное однозначное отображение.

2. Степень многозначных возмущений $(S_+)_E$-отображений

Пусть X – вещественное сепарабельное рефлексивное банахово пространство, X^* – его сопряженное. Обозначим сильную и слабую сходимости соответственно через $\to$ и $\rightharpoonup$. Для элементов $x \in X$ и $q \in X^*$ через $\langle q, x\rangle$ обозначим действие функционала q на элементе x.

Зафиксируем $\{v_m\}_{m=1}^{\infty}$ – полную систему элементов в пространстве X. Предположим, что при каждом k элементы $v_1, \ldots, v_k$ линейно независимы. Обозначим через E_k линейную оболочку элементов $v_1, \ldots, v_k$. Символом E обозначим $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$.

Рассмотрим $A : D(A) \to X^*$ – однозначный оператор с областью определения $D(A) \subset X$. Предположим, что $D(A) \supset E$.

Определение 5 (см. [7]). *Будем говорить, что оператор A удовлетворяет условию $(S_+)_E$, если для любого $h \in X^*$ и любой последовательности $\{u_j\} \subset E$ такой, что $u_j \rightharpoonup u_0$ и*

$$\overline{\lim_{j\to\infty}}\langle A(u_j), u_j\rangle \leq \langle h, u_0\rangle, \quad \lim_{j\to\infty}\langle A(u_j), v\rangle = \langle h, v\rangle$$

для любого $v \in E$, справедливо $u_j \to u_0$, $u_0 \in D(A)$, $A(u_0) = h$.

Условие $(S_+)_E$ – обобщение хорошо известного условия монотонности (S_+). В работах [6, 7] была построена теория степени $(S_+)_E$-отображений.

Наша цель – введение понятия топологической степени для многозначных возмущений $(S_+)_E$-отображений, т.е. отображений вида $A - G$, где A – оператор, удовлетворяющий условию $(S_+)_E$, G – многозначное отображение.

Предположим, что:

1) оператор A удовлетворяет условию $(S_+)_E$;

2) для любого $v \in E$ и $k \in \mathbb{N}$ функция $\alpha_{v,k} : E_k \to \mathbb{R}$, $\alpha_{v,k}(u) = \langle A(u), v\rangle$, непрерывна.

Для многозначного отображения $G : D(G) \to X^*$ с областью определения $D(G)$, $D(A) \subset D(G) \subset X$, предположим выполненными следующие условия:

3) $G = \varphi \circ \Sigma$ принадлежит классу $CJ(D(G), X^*)$;

4) для любого ограниченного множества $M \subset X$ множество $\Sigma(D(G) \cap M)$ относительно компактно.

Пусть U – открытое ограниченное подмножество X. Символами $\bar{U}$, ∂U обозначим соответственно замыкание и границу множества U.

Предположим, что:

5) для любого k множество $\overline{U \cap E_k}$ локально стягиваемо;

6) включение

$$A(u) \in G(u), \; u \in D(A)$$

не имеет решений, принадлежащих ∂U.

При выполнении условий 1) – 6) мы определим $\mathrm{Deg}(A - G, U, 0)$ – степень многозначного отображения $A - G$ множества U относительно точки $0 \in X^*$. Для того чтобы привести конструкцию степени, нам потребуются некоторые вспомогательные утверждения.

Введем конечномерный проектор $\pi_k : X^* \to E_k$, $\pi_k(h) = \sum\limits_{i=1}^{k}\langle h, v_i\rangle v_i$.

Обозначим $A_k = \pi_k \circ A$, $G_k = \pi_k \circ G$, $\varphi_k = \pi_k \circ \varphi$.

Лемма 3. *Пусть M – замкнутое ограниченное подмножество X. Пусть включение*

$$A(u) \in G(u), \; u \in D(A)$$

не имеет решений, принадлежащих M. Тогда существует k_0 такое, что при $k \geq k_0$ включение

$$A_k(u) \in G_k(u), \; u \in E_k$$

не имеет решений, принадлежащих M.

□ Доказательство этого утверждения проведем методом от противного. Предположим, что существует последовательность $u_j \in E_{k_j} \cap M$ такая, что $A_{k_j}(u_j) \in G_{k_j}(u_j)$

и $k_j \to \infty$ при $j \to \infty$. В этом случае найдется последовательность $g_j \in G(u_j)$, для которой справедливо:

$$\langle A(u_j) - g_j, v_i \rangle = 0, \; i = 1, \ldots, k_j. \tag{1}$$

Поскольку последовательность $\{u_j\}$ ограничена, можно считать, что $u_j \rightharpoonup u_0 \in X$. Кроме того, в силу условия 4) можно полагать, что $g_j \to g_0 \in X^*$.

Из (1) следует, что

$$\langle A(u_j), u_j \rangle = \langle g_j, u_j \rangle.$$

Поэтому

$$\lim_{j\to\infty} \langle A(u_j), u_j \rangle = \langle g_0, u_0 \rangle.$$

Аналогично

$$\lim_{j\to\infty} \langle A(u_j), v \rangle = \langle g_0, v \rangle$$

для любого $v \in E$. Отсюда с учетом замкнутости множества M и условия 1) получаем: $u_j \to u_0$, $u_0 \in D(A) \cap M$ и $A(u_0) = g_0$.

Так как $D(A) \subset D(G)$, то $u_0 \in D(G)$. Поскольку $u_j \to u_0$, $g_j \to g_0$, $g_j \in G(u_j)$ и мультиотображение G полунепрерывно сверху, имеем $g_0 \in G(u_0)$. Следовательно, $A(u_0) \in G(u_0)$ и $u_0 \in D(A) \cap M$, что противоречит условиям леммы. Лемма доказана. ■

Пусть $k \geq k_0$. Определим степень многозначного отображения $A_k - G_k : U \cap E_k \to E_k$ по формуле:

$$\mathrm{Deg}(A_k - G_k, U \cap E_k, 0) = \deg(A_k - \varphi_k \circ \sigma_{\varepsilon_k}, U \cap E_k, 0), \tag{2}$$

где символ deg обозначает степень однозначного конечномерного отображения, ε_k – достаточно малое положительное число, σ_{ε_k} – ε_k-аппроксимация мультиотображения $\Sigma|_{\overline{U\cap E_k}}$ (существование аппроксимации следует из леммы 2).

Покажем, что данное определение корректно. Во-первых, заметим, что при достаточно малом ε_k степень в правой части (2) определена, поскольку

$$A_k(u) - \varphi_k \circ \sigma_{\varepsilon_k}(u) \neq 0, \quad u \in \partial U \cap E_k.$$

Последнее соотношение следует из условия 6), лемм 1,3.

Далее, покажем, что степень в правой части (2) не зависит от выбора ε_k-аппроксимации, т. е.

$$\deg(A_k - \varphi_k \circ \sigma_{\varepsilon_k}, U \cap E_k, 0) = \deg(A_k - \varphi_k \circ \sigma'_{\varepsilon_k}, U \cap E_k, 0) \tag{3}$$

для любых $\sigma_{\varepsilon_k}, \sigma'_{\varepsilon_k} \in a(\Sigma|_{\overline{U\cap E_k}}, \varepsilon_k)$ при достаточно малом ε_k.

Из лемм 1–3 и условия 6) следует, что аппроксимации $\sigma_{\varepsilon_k}, \sigma'_{\varepsilon_k}$ можно соединить непрерывной деформацией $\tilde{\sigma} : \overline{U \cap E_k} \times [0,1] \to \mathcal{Z}$ такой, что $\tilde{\sigma}(\cdot, 0) = \sigma_{\varepsilon_k}$ $\tilde{\sigma}(\cdot, 1) = \sigma'_{\varepsilon_k}$ и

$$A_k(u) - \varphi_k \circ \tilde{\sigma}(u,t) \neq 0, \quad u \in \partial U \cap E_k, \; t \in [0,1].$$

Отсюда в силу свойства гомотопической инвариантности степени конечномерных отображений и следует равенство (3).

Справедливо следующее утверждение о стабилизации степени (2) при $k \to \infty$.

Лемма 4. *Существует* k_1 *такое, что при* $k \geq k_1$ *величина* $\mathrm{Deg}(A_k - G_k, U \cap E_k, 0)$ *не зависит от* k.

□ Для доказательства леммы достаточно установить, что

$$\mathrm{Deg}(A_{k+1} - G_{k+1}, U \cap E_{k+1}, 0) = \mathrm{Deg}(A_k - G_k, U \cap E_k, 0) \tag{4}$$

при «больших» k.

Будем считать, что в (2) величины ε_k, $k = 1, 2, \dots$, выбраны так, что последовательность $\{\varepsilon_k\}$ монотонно убывает и $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$.

Пусть h_j, $j = 1, 2 \dots$, – элементы пространства X^*, удовлетворяющие условию $\langle h_j, v_i \rangle = \delta_{ij}$, $i \in \{1, \dots, j\}$, где δ_{ij} – символ Кронекера.

Рассмотрим отображение $R_{k+1} : U \cap E_{k+1} \to E_{k+1}$,

$$R_{k+1}(u) = A_k(u) - \varphi_k \circ \sigma_{\varepsilon_{k+1}}(u) + \langle h_{k+1}, u \rangle v_{k+1}.$$

Покажем, что при достаточно больших k

$$t(A_{k+1}(u) - \varphi_{k+1} \circ \sigma_{\varepsilon_{k+1}}(u)) + (1-t)R_{k+1}(u) \neq 0, \ (u, t) \in \partial(U \cap E_{k+1}) \times [0, 1]. \tag{5}$$

Предположим противное. Тогда без ограничения общности можно утверждать, что существуют последовательности $t_m \in [0, 1]$, $u_m \in \partial(U \cap E_m)$, $u_m \rightharpoonup u_0$, такие, что

$$t_m(A_m(u_m) - \varphi_m \circ \sigma_{\varepsilon_m}(u_m)) + (1 - t_m)R_m(u_m) = 0.$$

Последнее равенство эквивалентно следующим соотношениям

$$\langle A(u_m) - \varphi \circ \sigma_{\varepsilon_m}(u_m), v_i \rangle = 0, \ i = 1, \dots, m-1, \tag{6}$$

$$t_m \langle A(u_m) - \varphi \circ \sigma_{\varepsilon_m}(u_m), v_m \rangle + (1 - t_m)\langle h_m, u_m \rangle = 0. \tag{7}$$

В силу условия 4) можно считать, что $\sigma_{\varepsilon_m}(u_m) \to q_0 \in \mathcal{Z}$ при $m \to \infty$. Поэтому для любого $v \in E$

$$\lim_{m\to\infty} \langle A(u_m), v \rangle = \lim_{m\to\infty} \langle \varphi \circ \sigma_{\varepsilon_m}(u_m), v \rangle = \langle \varphi(q_0), v \rangle. \tag{8}$$

Оценим теперь величину $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}} \langle A(u_m), u_m \rangle$.

Поскольку $u_m \in E_m$, то u_m можно представить в виде

$$u_m = \sum_{i=1}^{m} \xi_i^m v_i, \ \ \xi_i^m \in \mathbb{R}.$$

С учетом равенств (6), (7) получим

$$\langle A(u_m), u_m \rangle = \sum_{i=1}^{m} \xi_i^m \langle A(u_m), v_i \rangle = \sum_{i=1}^{m} \xi_i^m \langle \varphi \circ \sigma_{\varepsilon_m}(u_m), v_i \rangle -$$

$$-\xi_m^m \frac{1-t_m}{t_m}\langle h_m, u_m\rangle = \langle \varphi\circ\sigma_{\varepsilon_m}(u_m), u_m\rangle - \xi_m^m \frac{1-t_m}{t_m}\langle h_m, u_m\rangle. \quad (9)$$

Поскольку

$$\langle h_m, u_m\rangle = \langle h_m, \sum_{i=1}^m \xi_i^m v_i\rangle = \sum_{i=1}^m \xi_i^m \langle h_m, v_i\rangle = \xi_m^m,$$

то из (9) следует

$$\langle A(u_m), u_m\rangle \le \langle \varphi\circ\sigma_{\varepsilon_m}(u_m), u_m\rangle.$$

Поэтому

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\langle A(u_m), u_m\rangle \le \langle \varphi(q_0), u_0\rangle. \quad (10)$$

Так как оператор A удовлетворяет условию $(S_+)_E$, то из (8), (10) следует, что $u_m \to u_0$, $u_0 \in D(A)\cap\partial U$ и $A(u_0) = \varphi(q_0)$.

Из $u_m \to u_0$, $\sigma_{\varepsilon_m}(u_m) \to q_0$, $\varepsilon_m \to 0$ и полунепрерывности сверху многозначного отображения Σ следует, что $q_0 \in \Sigma(u_0)$. Поэтому

$$A(u_0) = \varphi(q_0) \in \varphi\circ\Sigma(u_0) = G(u_0),$$

что противоречит условию 6). Таким образом, справедливость соотношения (5) доказана.

В силу свойства гомотопической инвариантности степени конечномерных из (5) следует, что

$$\deg(A_{k+1} - \varphi_{k+1}\circ\sigma_{\varepsilon_{k+1}}, U\cap E_{k+1}, 0) = \deg(R_{k+1}, U\cap E_{k+1}, 0).$$

Кроме того, используя лемму Лере-Шаудера (см. например, [12]), получим, что

$$\deg(A_k - \varphi_k\circ\sigma_{\varepsilon_{k+1}}, U\cap E_k, 0) = \deg(R_{k+1}, U\cap E_{k+1}, 0).$$

Поэтому

$$\deg(A_{k+1} - \varphi_{k+1}\circ\sigma_{\varepsilon_{k+1}}, U\cap E_{k+1}, 0) = \deg(A_k - \varphi_k\circ\sigma_{\varepsilon_{k+1}}, U\cap E_k, 0). \quad (11)$$

В силу независимости степени (2) от выбора ε_k-аппроксимации величина, стоящая в правой части (11), может быть использована для вычисления $\mathrm{Deg}(A_k - G_k, U\cap E_k, 0)$. Кроме того, очевидно, что степень из левой части (11) определяет $\mathrm{Deg}(A_{k+1} - G_{k+1}, U\cap E_{k+1}, 0)$. Таким образом приходим к требуемому равенству (4). ■

Теперь мы можем дать основное определение.

Определение 6. *Пусть выполнены условия 1)–6). Степенью многозначного отображения $A - G$ множества U относительно точки $0 \in X^*$ назовем число*

$$\mathrm{Deg}(A - G, U, 0) = \lim_{k\to\infty} \mathrm{Deg}(A_k - G_k, U\cap E_k, 0).$$

Для введенной таким образом характеристики выполнены все стандартные свойства топологической степени. Отметим свойство гомотопической инвариантности степени.

Рассмотрим $\widetilde{A} : D(\widetilde{A}) \to X^*$ – отображение с областью определения $D(\widetilde{A}) \subset X \times [0,1]$. Обозначим $D(\widetilde{A}(\cdot,\lambda)) = \{u \in X : (u,\lambda) \in D(\widetilde{A})\}$. Предположим, что $E \subset D(\widetilde{A}(\cdot,\lambda))$ для любого $\lambda \in [0,1]$. Предположим также, что для любого $v \in E$ и $k \in \mathbb{N}$ функция

$$\alpha_{v,k} : E_k \times [0,1] \to \mathbb{R},\ \alpha_{v,k}(u,\lambda) = \langle \widetilde{A}(u,\lambda), v\rangle$$

непрерывна.

Определение 7. *Будем говорить, что оператор $\widetilde{A}$ удовлетворяет условию $(\widetilde{S}_+)_E$, если для любого $h \in X^*$ и любых последовательностей $\{u_j\} \subset E$, $\{\lambda_j\} \subset [0,1]$ таких, что $u_j \rightharpoonup u_0$, $\lambda_j \to \lambda_0$ и*

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} \langle \widetilde{A}(u_j,\lambda_j), u_j\rangle \le \langle h, u_0\rangle,\ \ \lim_{j\to\infty} \langle \widetilde{A}(u_j,\lambda_j), v\rangle = \langle h, v\rangle$$

для любого $v \in E$, справедливо $u_j \to u_0$, $u_0 \in D(\widetilde{A}(\cdot,\lambda_0))$, $\widetilde{A}(u_0,\lambda_0) = h$.

Рассмотрим отображения $A_i : D(A_i) \cap \bar{U} \to X^*$, $G_i : D(G_i) \cap \bar{U} \to X^*$, $G_i = \varphi_i \circ \Sigma_i$, $E \subset D(A_i) \subset D(G_i)$, $i = 0,1$.

Определение 8. *Будем говорить, что многозначные отображения $A_0 - G_0$ и $A_1 - G_1$ гомотопны, если выполнены следующие условия:*

i) существует отображение $\widetilde{A}$, удовлетворяющее условию $(\widetilde{S}_+)_E$ и равенствам

$$\widetilde{A}(\cdot,0) = A_0,\ \ \widetilde{A}(\cdot,1) = A_1;$$

ii) существует мультиотображение $\widetilde{\Sigma} : D(\widetilde{\Sigma}) \to \mathcal{Z}$, $D(\widetilde{\Sigma}) \subset X \times [0,1]$, $D(\widetilde{\Sigma}) \supset D(\widetilde{A})$, $\widetilde{\Sigma} \in J(D(\widetilde{\Sigma}), \mathcal{Z})$, такое, что

$$\widetilde{\Sigma}(\cdot,0) = \Sigma_0,\ \ \widetilde{\Sigma}(\cdot,1) = \Sigma_1$$

и для любого ограниченного $M \subset X \times [0,1]$ множество $\widetilde{\Sigma}\big(D(\widetilde{\Sigma}) \cap M\big)$ относительно компактно в пространстве $\mathcal{Z}$;

iii) существует непрерывное отображение $\widetilde{\varphi} : \mathcal{Z} \times [0,1] \to X^*$ такое, что

$$\widetilde{\varphi}(\cdot,0) = \varphi_0,\ \ \widetilde{\varphi}(\cdot,1) = \varphi_1;$$

iv) включение

$$\widetilde{A}(u,\lambda) \in \widetilde{G}(u,\lambda),\ (u,\lambda) \in D(\widetilde{A}),$$

где $\widetilde{G}(u,\lambda) = \widetilde{\varphi}(\widetilde{\Sigma}(u,\lambda),\lambda)$, не имеет решений, принадлежащих $\partial U \times [0,1]$.

Используя свойство гомотопической инвариантности степени конечномерных отображений, нетрудно установить справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. *Если многозначные отображения $A_0 - G_0$ и $A_1 - G_1$ гомотопны, то*

$$\mathrm{Deg}(A_0 - G_0, U, 0) = \mathrm{Deg}(A_1 - G_1, U, 0).$$

Приведем теперь аналог «основной теоремы» теории степени.

Теорема 2. *Если* $\mathrm{Deg}(A-G, U, 0) \neq 0$, *то включение*

$$A(u) \in G(u),\ u \in U \cap D(A)$$

имеет по крайней мере одно решение.

□ Предположим противное. Тогда, согласно лемме 3, при достаточно больших k включение

$$A_k(u) \in G_k(u),\quad u \in E_k,$$

не имеет решений, принадлежащих множеству $\bar{U}$. В этом случае в силу леммы 1

$$A_k(u) - \varphi_k \circ \sigma_{\varepsilon_k}(u) \neq 0,\quad u \in \overline{U \cap E_k}.$$

Здесь σ_{ε_k} – ε_k-аппроксимация $\Sigma|_{\overline{U\cap E_k}}$ с достаточно малым ε_k.

Из определения 6 и свойств степени конечномерных отображений следует, что

$$\mathrm{Deg}(A-G, U, 0) = \deg(A_k - \varphi_k \circ \sigma_{\varepsilon_k}, U \cap E_k, 0) = 0.$$

Полученное противоречие и доказывает теорему. ■

3. Пример

Проиллюстрируем, как может быть использована построенная теория степени при изучении задач управления с обратной связью.

Рассмотрим следующую задачу:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big\{\rho^2(v)\frac{\partial v}{\partial x_i} + a_i\big(x, v, \frac{\partial v}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial v}{\partial x_n}\big)\Big\} = f(x, v, u), \tag{12}$$

$$v(x) = 0,\ x \in \partial\Omega. \tag{13}$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, ρ, a_i, f – известные функции. Искомыми являются функция состояния $v(x)$ и управление $u(x)$. Предполагается, что

$$u \in U(v), \tag{14}$$

где U – многозначное отображение, определяющее в системе управление с обратной связью.

Опишем условия, при которых рассматривается задача (12) – (14). Пусть функция ρ обладает свойством:

ρ) *Функция* $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *непрерывна и удовлетворяет оценке*

$$0 \le \rho(t) \le \mu\left\{\left|\int_0^t \rho(s)\,ds\right| + 1\right\}^r,\quad t \in \mathbb{R}$$

с константами $\mu > 0$, $0 \le r < \frac{n}{n-2}$.

Отметим, что данное условие «роста» не является ограничительным. Этому условию удовлетворяет даже функция $\rho(t) = e^t$ с экспоненциальным ростом.

Предположим, что для функций $a_i : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ выполнены следующие условия:

a$_1$) *при фиксированных $\eta \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ функция $a_i(\cdot, \eta, \xi)$ является измеримой;*

a$_2$) *при почти всех $x \in \bar{\Omega}$ функция $a_i(x, \cdot, \cdot)$ является непрерывной;*

a$_3$) *существуют положительные константы p, p_1, ν_1, ν_2 и функция $g_0(x)$ такие, что*

$$\sum_{i=1}^{n} \big(a_i(x,\eta,\xi) - a_i(x,\eta,\xi')\big)(\xi_i - \xi_i') \geq \nu_1 |\xi - \xi'|^p,$$

$$|a_i(x,\eta,\xi)| \leq \nu_2 \left(|\eta|^{p_1} + |\xi|\right)^{p-1} + g_0(x)$$

при любых $x \in \bar{\Omega}$, $\eta \in \mathbb{R}$, $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^n$, причем $g_0 \in L_{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$, $p_1 < \frac{n}{n-p}$, $2 \leq p < n$.

Предположим также, что

f) *функция $f : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна и удовлетворяет оценке*

$$|f(x, y_1, y_2)| \leq C \left(|y_1|^\alpha + |y_2|^\beta\right) + g_1(x),$$

где $g_1 \in L_{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$, $C > 0$, $\alpha = \frac{p_2(p-1)}{p}$, $\beta = \frac{q(p-1)}{p}$, $1 < p_2 < \frac{np}{n-p}$, $q > 1$;

u) *многозначное отображение $U : L_{p_2}(\Omega) \to L_q(\Omega)$ полунепрерывно сверху и для любого $v \in L_{p_2}(\Omega)$ множество $U(v)$ асферично.*

Задачу (12)–(14) будем рассматривать в слабой постановке. Символом $W_0^{1,p}(\Omega)$ обозначим подпространство соболевского пространства $W^{1,p}(\Omega)$, получающееся замыканием множества всех бесконечно дифференцируемых функций с носителями Ω по норме $W^{1,p}(\Omega)$.

Определение 9. *Обобщенным решением задачи (12) – (14) назовем пару функций $(v, u) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times L_q(\Omega)$, для которой выполнено включение (14) и равенство*

$$\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \Big\{\rho^2(v)\frac{\partial v}{\partial x_i} + a_i\big(x, v, \frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_n}\big)\Big\} \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\, dx = \int_\Omega f(x, v, u)\psi\, dx$$

для любого $\psi \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Чтобы сформулировать теорему о разрешимости задачи (12)–(14), введем вспомогательное однопараметрическое семейство задач:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big\{\rho^{2\lambda}(v)\frac{\partial v}{\partial x_i} + \lambda a_i\big(x, v, \frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_n}\big) +$$

$$+ (1-\lambda)\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x_i}\Big\} = \lambda f\big(x, v, u\big),\ \lambda \in [0, 1], \tag{15}$$

$$v(x) = 0,\ x \in \partial\Omega. \tag{16}$$

$$u \in U(v). \tag{17}$$

Обозначим $M = \{v \in W_0^{1,p}(\Omega)$: существуют $u \in L_q(\Omega), \lambda_0 \in [0,1]$ такие, что пара (v,u) является обобщенным решением задачи (15)–(17) с $\lambda = \lambda_0\}$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* ρ), a$_1$)–a$_3$), f), u). *Предположим, что множество M ограничено. Тогда задача (12)–(14) имеет по крайней мере одно обобщенное решение.*

□ Для доказательства теоремы воспользуемся теорией степени, построенной во втором параграфе. Сначала дадим операторную трактовку рассматриваемой задачи.

Обозначим через $C_0^\infty(\Omega)$ множество всех бесконечно дифференцируемых функций с носителем Ω. Зафиксируем $\{v_m\}_{m=1}^\infty \subset C_0^\infty(\Omega)$ - полную систему элементов в пространстве $W_0^{1,p}(\Omega)$. Предположим, что при каждом k элементы $v_1, \ldots, v_k$ линейно независимы. Обозначим через E_k линейную оболочку элементов $v_1, \ldots, v_k$. Обозначим $E = \bigcup\limits_{k=1}^\infty E_k$.

Ввведем оператор

$$\widetilde{A} : D(\widetilde{A}) \subset W_0^{1,p}(\Omega) \times [0,1] \to [W_0^{1,p}(\Omega)]^*,$$

$$\langle \widetilde{A}(v,\lambda), \psi\rangle = \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega \Big\{\rho^{2\lambda}(v)\frac{\partial v}{\partial x_i} + \lambda a_i\big(x, v, \frac{\partial v}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial v}{\partial x_n}\big) +$$

$$+(1-\lambda)\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big\}\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\,dx,$$

где $\psi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $D(\widetilde{A}) = \{(v,\lambda) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times [0,1] :\ \rho^{2\lambda}(v)\frac{\partial v}{\partial x_i} \in L_{\frac{p}{p-1}}(\Omega)\}$.

Согласно [6], оператор $\widetilde{A}$ удовлетворяет условию $(\widetilde{S}_+)_E$.

Рассмотрим многозначное отображение

$$\widetilde{\Sigma} : W_0^{1,p}(\Omega) \times [0,1] \to L_{p_2}(\Omega) \times L_q(\Omega),$$

$$\widetilde{\Sigma}(v,\lambda) = \{i(v)\} \times U\big(i(v)\big),$$

где $i : W_0^{1,p}(\Omega) \to L_{p_2}(\Omega)$ – оператор вложения. В силу теорем вложения соболевских пространств (см, например, [13]) оператор i определен корректно и является компактным. Поэтому для любого ограниченного множества $Q \subset W_0^{1,p}(\Omega) \times [0,1]$ множество $\widetilde{\Sigma}(Q)$ является относительно компактным в $L_{p_2}(\Omega) \times L_q(\Omega)$. Кроме того, из условия u) следует, что $\widetilde{\Sigma} \in J\big(W_0^{1,p}(\Omega) \times [0,1], L_{p_2}(\Omega) \times L_q(\Omega)\big)$.

Определим отображение

$$\widetilde{\varphi} : L_{p_2}(\Omega) \times L_q(\Omega) \times [0,1] \to [W_0^{1,p}(\Omega)]^*,$$

$$\langle \widetilde{\varphi}(v,u,\lambda), \psi\rangle = \lambda \int\limits_\Omega f(x,v,u)\psi(x)\,dx,\ \ \psi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Из теоремы М.А. Красносельского о непрерывности оператора суперпозиции (см., например, [12, предложение 1.1, с. 9]) и условия f) следует, что оператор $\widetilde{\varphi}$ является непрерывным.

Обозначим
$$\widetilde{G}(v,\lambda) = \widetilde{\varphi}\big(\widetilde{\Sigma}(v,\lambda),\lambda\big),\ v \in W_0^{1,p}(\Omega), \lambda \in [0,1].$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что включение

$$\widetilde{A}(v,1) \in \widetilde{G}(v,1)$$

имеет по крайней мере одно решение $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Из условий теоремы следует, что существует шар $\mathcal{B} = \{v \in W_0^{1,p}(\Omega) : \|v\| < R\}$ такой, что $M \subset \mathcal{B}$.

В силу установленных свойств выше свойств операторов $\widetilde{A}$, $\widetilde{\Sigma}$, $\widetilde{\varphi}$ отображения $\widetilde{A}(\cdot,0)-\widetilde{G}(\cdot,0)$, $\widetilde{A}(\cdot,1)-\widetilde{G}(\cdot,1)$ гомотопны в смысле определения 8 (при $U = \mathcal{B}$). В этом случае, согласно теореме 1,

$$\operatorname{Deg}(\widetilde{A}(\cdot,1)-\widetilde{G}(\cdot,1),\mathcal{B},0) = \operatorname{Deg}(\widetilde{A}(\cdot,0)-\widetilde{G}(\cdot,0),\mathcal{B},0). \tag{18}$$

Поскольку $\widetilde{A}(\cdot,0)-\widetilde{G}(\cdot,0) = \widetilde{A}(\cdot,0)$, то вычисление степени (18) сводится вычислению степени $\operatorname{Deg}(\widetilde{A}(\cdot,0),\mathcal{B},0)$.

Заметим, что $D(\widetilde{A}(\cdot,0)) = W_0^{1,p}(\Omega)$ и

$$\langle \widetilde{A}(v,0), v\rangle > 0,\ v \in \partial\mathcal{B}.$$

Отсюда в силу свойств степени (S_+)-отображений [12] получаем, что

$$\operatorname{Deg}(\widetilde{A}(\cdot,0),\mathcal{B},0) = 1$$

и, следовательно,
$$\operatorname{Deg}(\widetilde{A}(\cdot,1)-\widetilde{G}(\cdot,1),\mathcal{B},0) = 1.$$

Таким образом, разрешимость включения $\widetilde{A}(v,1) \in \widetilde{G}(v,1)$ следует из теоремы 2. ■

Заключение

В работе построена новая топологическая характеристика – степень отображений вида $A - G$, где A – однозначный плотно определенный оператор, удовлетворяющий условию $(S_+)_E$, $G = \varphi \circ \Sigma$, φ – однозначный оператор, Σ – компактное многозначное отображение с асферичными образами. Изучены основные свойства данной характеристики. С помощью построенной степени доказана разрешимость задачи управления с обратной связью для одного класса нелинейных уравнений эллиптического типа.

Литература

1. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. 2-е, доп. изд. / Москва: Либоком, 2011. – 224 с.

2. Zvyagin V.G., Baranovskii E.S. Topological degree of condensing multi-valued perturbations of the $(S)_+$-class maps and its applications // Journal of Mathematical Sciences. – 2010. – 170;3. – P. 405-422.

3. Барановский Е.С. Исследование задач оптимизации. Методы теории степени многозначных отображений монотонного типа / Saarbrücken: LAP, 2011. – 112 с.

4. Барановский Е.С. Об оптимальных задачах для систем параболического типа с асферичными множествами допустимых управлений // Известия вузов. Математика. – 2009. – 12. – С.74-79.

5. Барановский Е.С. Теоремы о структуре множества решений одного класса операторных включений и их приложения // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2010. – 1. – С.71-80.

6. Kartsatos A.G., Skrypnik I.V. Topological degree theories for densely mappings involving operators of type $(S)_+$ // Adv. Differential Equations. – 1999. – 4;3. – P.413-456.

7. Kartsatos A.G., Skrypnik I.V. The index of a critical point for nonlinear elliptic operators with strong coefficient growth // J. Math. Soc. Japan. – 2000. – 52;1. – P.109-137.

8. Kartsatos A.G., Skrypnik I.V. A new topological degree theory for densely defined quasibounded $(\tilde{S}_+)$-perturbations of multivalued maximal monotone operators in reflexive Banach spaces // Abstract and Applied Analysis. – 2005. – 2. – P.121-158.

9. Obukhovskii V., Zecca P., Zvyagin V. An oriented index for nonlinear Fredholm inclusions with nonconvex-valued perturbations // Abstract and Applied Analysis. – 2006. – P.1-21.

10. Gorniewicz L. Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings / Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 1999. – 399 p.

11. Gorniewicz L., Granas A., Kryszewski W. On the homotopy method in the fixed point index theory for multi-mappings of compact absolute neighborhood retracts // J. Math. Anal. Appl. – 1991. – 161;2. – P.457-473.

12. Скрыпник И.В. Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач / М.: Наука, 1990. – 448 с.

13. Adams R.A., Fournier J.J.F. Sobolev spases. 2 ed./ Elsevier, Oxford, 2003. – 305 p.

TOPOLOGICAL DEGREE FOR MULTIVALUED PERTURBATIONS OF DENSELY DEFINED OPERATORS OF MONOTONE TYPE AND ITS APPLICATIONS

E.S. Baranovskii

Voronezh State University,
Universitetskaya sq., 1, Voronezh, 394006, Russia, e-mail: bes220@rambler.ru

Abstract. Introduction of the topological degree of multivalued perturbations of densely defined operators of type (S_+) is proposed. Basic properties of this topological characteristic are studied. The constructed concept is applied to feedback control problem for nonlinear elliptic equation.

Key words: topological degree, monotone type mappings, densely defined operators of the class (S_+), multivalued maps, aspheric sets, feedback control, nonlinear elliptic problems.