УДК: 517.95

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ПЕРВОГО РОДА

А.В. Дюжева, Л.С. Пулькина [9)]

Самарский государственный университет,
ул. Академика Павлова, 1, Самара, 443011, Россия, e-mail: aduzheva@rambler.ru

Аннотация. В статье рассматривается задача с интегральными нелокальным условием первого рода для дифференциального уравнения с частными производными. Основной целью статьи является доказательство эквивалентности поставленной задачи и задачи с интегральным условием второго рода специального вида.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, нелокальная задача, интегральные условия, обобщенное решение.

1. Постановка задачи.

Рассмотрим в области $Q = (0, l) \times (0, T)$, где $l, T < \infty$, уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} + c(x,t)u = f(x,t) \tag{1}$$

и поставим следующую задачу: найти в области Q решение уравнения (88), удовлетворяющее начальным данным

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \tag{2}$$

граничному условию

$$u_x(0,t) = 0 \tag{3}$$

и нелокальному условию

$$\int_0^l K(x,t)u(x,t)dx = 0. \tag{4}$$

В условии (4) $K(x,t)$ задана в $\bar{Q}$ и обладает необходимой для предстоящих преобразований гладкостью.

Особенность поставленной задачи заключается в том, что условие (4) является нелокальным интегральным условием первого рода, а ядро $K(x,t)$, зависит не только от пространственной переменной x, но и от переменной t.

Напомним, что *нелокальными условиями принято называть соотношения, связывающие значения искомого в области Ω решенияна некотором внутреннем многообразии и в точках границы области Ω.*

---

[9]Дюжева Александра Владимировна, ассистент Самарского государственного университета.
Пулькина Людмила Степановна, профессор Самарского государственного университета.

Если в этих соотношениях отсутствуют значения искомого решения на границе области, то будем их называть нелокальными условиями *первого рода*. Если же значения искомого решения или его производных на границе области в соотношения входят, то такие соотношения называют нелокальными условиями *второго рода*. Проиллюстрируем это определение примером:

$$\lambda u_x(\xi_i, t) = \int\limits_0^l K_i(x,t)u(x,t)dx, \tag{5}$$

где $i = 1, 2$, $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = l$, $\Omega = (0,l) \times (0,T)$.

Если $\lambda \neq 0$, то (5) — условие второго рода, а если $\lambda = 0$ — то первого.

Нелокальные задачи давно вызывают интерес математиков, в том числе в связи с их приложениями в исследованиях различных процессов естествознания [2]–[6]. Задачи с нелокальными интегральными условиями в настоящее время активно изучаются, разрабатываются методы доказательства их разрешимости. Одним из эффективных методов исследования нелокальных задач с условиями второго рода вида (5) является метод компактности. Этот метод базируется на возможности получения тождества, лежащего в основе определения обобщенного решения задачи, с помощью известной процедуры ([1], с.210, [3]). Этот метод нельзя применить в случае нелокального условия первого рода. Однако удалось показать, что условие (4) можно свести к условию второго рода вида (5) эквивалентным образом, если выполняются условия согласования данных.

2. Эквивалентность нелокальных условий

Теорема 1. *Пусть*

$$c(x,t) \in C(\bar{Q})\,, \quad f(x,t) \in L_2(Q)\,, \quad K(x,t) \in C^2(Q) \cap C^1(\bar{Q})\,, \quad K_{txx}(x,t) \in C(Q)\,,$$

$$K(l,t) \neq 0\,, \quad K_x(0,t) = 0 \quad \forall t \in [0,T]$$

и выполняются условия согласования

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^l K(x,0)\varphi(x)dx = 0, \\ &\int\limits_0^l K_t(x,0)\varphi(x)dx + \int\limits_0^l K(x,0)\psi(x)dx = 0\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Тогда нелокальное условие первого рода (4) эквивалентно нелокальному условию второго рода

$$u_x(l,t) = T(u(0,t), u(l,t))\,, \tag{7}$$

где T – линейный оператор, вид которого будет представлен ниже в ходе доказательства.

□ Пусть $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (88) и условиям (89), (3), (4). Дифференцируя равенство (4) дважды по t, получим:

$$\int_0^l K(x,t)u_{tt}(x,t)dx + 2\int_0^l K_t(x,t)u_t(x,t)dx + \int_0^l K_{tt}(x,t)u(x,t)dx = 0\,. \tag{8}$$

Так как $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (88), то

$$\int_0^l K(x,t)u_{tt}(x,t)dx = \int_0^l K(x,t)[u_{xx} - c(x,t)u + f(x,t)]dx\,;$$

$$\int_0^l K_t(x,t)u_t(x,t)dx = \int_0^l K_t(x,t)[\psi(x) + \int_0^t (u_{xx} - c(x,t)u + f(x,t))dt]dx\,.$$

Интегрируя теперь содержащие u_{xx} слагаемые двух последних равенств, получим из (8):

$$u_x(l,t) + a(t)\int_0^t u_x(l,\tau)d\tau = b(t)u(l,t) + \gamma(t)\int_0^t u(l,\tau)d\tau -$$

$$-\int_0^l S(x,t)u(x,t)dx - \int_0^\tau\int_0^l H(x,t,\tau)u(x,\tau)dxd\tau - g(t)\,, \tag{9}$$

где обозначено

$$a(t) = \frac{2K_t(l,t)}{K(l,t)},\quad b(t) = \frac{K_x(l,t)}{K(l,t)},\quad \gamma(t) = \frac{2K_{xt}(l,t)}{K(l,t)}\,;$$

$$S(x,t) = \frac{K_{tt}(x,t) + K_{xx}(x,t)}{K(l,t)},\quad H(x,t,\tau) = 2\frac{K_t(x,t)c(x,\tau) - K_{txx}(x,t)}{K(l,t)}\,;$$

$$g(t) = 2\int_0^l K_t(x,t)[\varphi(x) + \int_0^t f(x,\tau)d\tau]dx\,.$$

Рассматривая соотношение (9) как уравнение Вольтерра с ограниченным в силу условий теоремы ядром, получим его единственное решение:

$$u_x(l,t) = G(t) - a(t)\int_0^t G(\tau)e^{-\int_\tau^t a(\eta)d\eta}d\tau\,, \tag{10}$$

где обозначено

$$G(t) = b(t)u(l,t) - \int_0^l S(x,t)u(x,t)dx + \gamma(t)\int_0^t u(l,\tau)d\tau -$$

$$-\int_0^t\int_0^l H(x,t,\tau)u(x,\tau)dxd\tau - g(t)\,.$$

Из последних двух равенств видим, что правые части (10) не содержат производных искомого решения, в том числе их следов, и являются соотношениями между значениями решения во внутренних точках области и на ее границе. Таким образом, (10) – нелокальное условие второго рода вида (5).

Пусть теперь $u(x,t)$ – решение уравнения (88), удовлетворяющее условиям (89), (3) и (10). Но тогда выполняются и равенства (8), из которых и получены условия (10). Равенства (8) запишем следующим образом:

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_0^l K(x,t)u(x,t)dx = 0\,. \tag{11}$$

Из условий согласования (6) вытекают начальные условия

$$\begin{aligned} &\int_0^l K(x,0)u(x,0)dx = 0\,,\\ &\frac{d}{dt}\int_0^l K(x,t)u(x,t)dx\Big|_{t=0} = 0\,. \end{aligned} \tag{12}$$

Задача Коши (11)–(12) имеет единственное решение

$$\int_0^l K(x,t)u(x,t)dx = 0\,,$$

что и означает выполнение условия (4). ■

3. Разрешимость задачи.

Решением задачи будем называть функцию $u(x,t) \in W_2^1(Q_T)$, удовлетворяющую условию $u(x,0) = \varphi(x)$ и тождеству

$$\int_0^T\int_0^l(-u_tv_t + u_xv_x + cuv)dxdt+$$

$$+\int_0^T v(l,t)\left[G(t) - a(t)\int_0^t G(\tau)e^{-\int_\tau^t a(\eta)d\eta}d\tau\right]dt =$$

$$= \int\limits_0^l v(x,0)\psi(x)dx + \int\limits_0^T\int\limits_0^l f(x,t)v(x,t)dxdt \tag{13}$$

для любой функции $v(x,t) \in \hat{W}_2^1(Q_T)$, где $\hat{W}_2^1(Q_T) = \{v(x,t) : v(x,t) \in W_2^1(Q_T)\,,$ $v(x,T) = 0\}$.

Теорема 2. *Если выполнены условия*

$$c(x,t) \in C(\bar{Q})\,, \quad c_t(x,t) \in C(\bar{Q})\,,$$

$$K(x,t) \in C^1(\bar{Q})\,, \quad K(x,t) \in C^2(Q)\,, \quad K_{txx} \in C(Q)\,,$$

$$K(l,t) \neq 0\,, \quad K_x(0,t) = 0\,,$$

$$f(x,t) \in L_2(Q)\,, f_t(x,t) \in L_2(Q)\,, \quad \varphi(x) \in W_2^1(0,l),\ \psi(x) \in L_2(0,l)\,,$$

$$\int\limits_0^l K(x,0)\varphi(x)dx = 0\,, \quad \int\limits_0^l K_t(x,0)\varphi(x)dx + \int\limits_0^l K(x,0)\psi(x)dx = 0\,,$$

то существует единственное решение поставленной задачи.

□ Начнем с доказательства единствености решения. Предположим, что существует два различных решения, $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$. Тогда их разность, $u = u_1 - u_2$, удовлетворяет тождеству

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^l(-u_tv_t + u_xv_x + cuv)dxdt + \int\limits_0^T v(l,t)G(t)dt -$$

$$-\int\limits_0^T v(l,t)a(t)\int\limits_0^t G(\tau)e^{-\int\limits_\tau^t a(\eta)d\eta}d\tau dt = 0 \tag{14}$$

и $u(x,0) = 0$. Выберем в (14)

$$v(x,t) = \begin{cases} \int\limits_\tau^t u(x,\eta)d\eta, & 0 \le t \le \tau\,, \\ 0, & \tau \le t \le T. \end{cases} \tag{15}$$

Первое слагаемое преобразуем стандартным образом и получим

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^l(-u_tv_t + u_xv_x + cuv)dxdt = -\frac{1}{2}\int\limits_0^l[u^2(x,\tau) + v_x^2(x,0)]dx + \int\limits_0^\tau\int\limits_0^l cvv_t)dxdt.$$

Наибольший интерес представляют два других слагаемых, к изучению которых и перейдем. Особое внимание уделим интегралам, содержащим следы функции $v(x,t)$ и ее производной.

Отметим, что из условий теоремы следует существование положительных постоянных $a_0, b_0, c_0, \gamma_0, h_0, s_0$ таких, что

$$\max_{[0,T]}|a(t)| \le a_0,\ \max_{[0,T]}|b(t), b'(t)| \le b_0, \max_{Q}|c(x,t)| \le c_0\,, \max_{[0,T]}|\gamma(t)| \le \gamma_0\,,$$

$$\max_{[0,T]}\Big|\int\limits_0^l S^2(x,t)dx\Big| \le s_0\,,\ \max_{[0,T]}\Big|\int\limits_0^T\int\limits_0^l H^2(x,t,\tau)dxdt\Big| \le h_0\,.$$

Рассмотрим второе слагаемое (14) и слегка преобразуем:

$$\int\limits_0^T v(l,t)G(t)dt = \int\limits_0^\tau v(l,t)[b(t)v_t(l,t) + \gamma(t)\int\limits_0^t v_\eta(l,\eta)d\eta]dt-$$

$$-\int\limits_0^\tau v(l,t)\left[\int\limits_0^l S(x,t)v_t(x,t)dx + \int\limits_0^t\int\limits_0^l H(x,\tau,\eta)v_\eta(x,\eta)dxd\eta\right]dt\,.$$

Так как

$$\int\limits_0^\tau v(l,t)b(t)v_t(l,t)dt = -\frac{1}{2}\int\limits_0^\tau b'(t)v^2(l,t)dt - \frac{1}{2}v^2(l,0)\,,$$

$$\int\limits_0^t v_\eta(x,\eta)d\eta = v(l,t) - v(l,0)\,,$$

то получим равенство

$$\int\limits_0^T v(l,t)G(t)dt = -\frac{1}{2}\int\limits_0^\tau b'(t)v^2(l,t)dt - \frac{1}{2}v^2(l,0)+$$

$$+\int\limits_0^\tau \gamma(t)v^2(l,t)dt - v(l,0)\int\limits_0^\tau \gamma(t)v(l,t)dt-$$

$$-\int\limits_0^\tau v(l,t)[\int\limits_0^l S(x,t)v_t(x,t)dx + \int\limits_0^t\int\limits_0^l H(x,\tau,\eta)v_\eta(x,\eta)dxd\eta]dt\,.$$

Теперь рассмотрим третье слагаемое, и, сделав аналогичные преобразования и обозначив $A(t,\tau) = e^{-\int_\tau^t a(\eta)d\eta}$, получим

$$\int\limits_0^T v(l,t)a(t)\int\limits_0^t G(\tau)A(t,\eta)\int\limits_\tau^t a(\eta)d\eta d\tau dt =$$

$$= -\int_0^\tau v(l,t)a(t)\int_0^t (A(t,\eta)b(\eta))_\eta v(l,\eta)d\eta dt + \int_0^\tau a(t)b(t)v^2(l,t)dt-$$

$$-b(0)v(l,0)\int_0^\tau a(t)A(t,0)v(l,t)dt + \int_0^\tau a(t)v(l,t)\int_0^t \gamma(\eta)A(t,\eta)v(l,\eta)d\eta dt-$$

$$-v(l,0)\int_0^\tau v(l,t)a(t)\int_0^t A(t,\eta)\gamma(\eta)d\eta dt-$$

$$-\int_0^\tau a(t)v(l,t)\int_0^t A(t,\eta)\int_0^l S(x,\eta)v_\eta(x,\eta)dxd\eta dt-$$

$$-\int_0^\tau v(l,t)a(t)\int_0^t A(t,\eta)\int_0^\eta\int_0^l H(x,\eta,\xi)v_\xi(x,\xi)dxd\xi d\eta dt\,.$$

Теперь приступим к выводу оценки, для чего воспользуемся неравенством Коши, а также неравенством

$$v^2(l,t) \le \varepsilon\int_0^l v_x^2(x,t)dx + c(\varepsilon)\int_0^l v^2(x,t)dx, \tag{16}$$

справедливым для всех $t \in [0,T]$, которое выводится из равенства

$$v(l,t) = \int_x^l v_\xi(\xi,t)d\xi + v(x,t).$$

Нам также будет полезно неравенством

$$v^2(x,t) \le \tau\int_0^\tau v_t^2(x,t)dt, \tag{17}$$

которое вытекает из представления функции $v(x,t)$. Получим:

$$\int_0^l [u^2(x,\tau) + v_x^2(x,0)]dx \le m\varepsilon\int_0^l v_x^2(x,0)dx + M\int_0^\tau\int_0^l v_t^2(x,t)dxdt, \tag{18}$$

где числа m, M зависят от $a_0, b_0, c_0, \gamma_0, h_0, s_0$. Выбрав $\varepsilon = \frac{1}{2m}$, получаем возможность перенести первое слагаемое правой части в левую. Тогда справедливо

$$\int_0^l u^2(x,\tau)dx \le N\int_0^\tau\int_0^l v_t^2(x,t)dxdt,$$

применив к которому лемму Гронуолла, (учитывая, что $v_t(x,t) = u(x,t)$), приходим к утверждению о единственности решения задачи.

Доказательство существования решения задачи проведено по известной схеме: построена последовательность приближенных решений методом Галеркина; доказана ограниченность полученного множества приближенных решений в пространстве $W_2^1(Q)$, что позволило выделить слабо сходящуюся в $W_2^1(Q)$ подпоследовательность; показано, что предел выделенной подпоследовательности и является искомым решением.

Не останавливаясь на подробных вычислениях, отметим особенность реализации этой схемы в условиях рассматриваемой задачи: при построении приближенных решений мы приходим к системе интегродифференциальных уравнений, которая редуцируется к системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Априорная оценка получена с помощью техники, продемонстрированной при доказательстве единственности решения. Возможность предельного перехода показывается стандартным образом. ■

Замечание 1. Полученные результаты нетрудно распространить на случай более общего уравнения

$$u_{tt} - (a(x,t)u_x)_x + c(x,t)u = f(x,t)\,.$$

Если $a(x,t) \in C(\bar{Q}), a_t(x,t) \in C(\bar{Q})$, то можно показать, что полученные выше оценки справедливы, однако вывод их еще более громоздок.

Замечание 2. Можно рассматривать задачу с двумя нелокальными условиями

$$\int_0^l K_i(x,t)u(x,t)dx = 0\,.$$

В этом случае условия $K(l,t) =\neq 0,\ K_x(0,t) = 0$ должны быть заменены условием

$$K_1(0,t)K_2(l,t) - K_1(l,t)K_2(0,t) \neq 0.$$

Литература

1. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики / М.: Наука, 1973.
2. Стеклов В.А. Задача об охлаждении неоднородного твердого тела / Сообщ. Харьковского мат. о-ва/ – 1986. – 5;(3-4). – С.136-181.
3. Дмитриев В.Б. Нелокальная задача с интегральными условиями для волнового уравнения // Вестник СамГУ. – 2006. – 2;42. – С.15-27.
4. Кожанов А.И. О разрешимости некоторых пространственно нелокальных краевых задач для линейных параболических уравнений //Вестник СамГУ. – 2008. – 3;62. – С.165-174.
5. Пулькина Л.С., Дюжева А.В. Нелокальная задача с переменными по времени краевыми условиями Стеклова для гиперболического уравнения // Вестник СамГУ. – 2010. – 4;78. – С.56-64.
6. Кожанов А.И., Пулькина Л.С. О разрешимости некоторых граничных задач со смещением для линейных гиперболических уравнений // Математический журнал института математики МО и Н РК, Алматы. – 2009. – 2;32. – С.78-92.

NONLOCAL PROBLEM FOR HYPERBOLIC EQUATION WITH FIRST INTEGRAL CONDITION

A.V. Duzheva, L.S. Pulkina

Samara State University,
Academician Pavlov St., 1, Samara, 443011, Russia, e-mail: aduzheva@rambler.ru, louise@samdiff.ru

Abstract. In this article, we consider a nonlocal problem with integral condition of the first kind . The main goal is to prove equivalence of a nonlocal problem with integral conditions of the first kind and nonlocal problem with integral conditions of the second kind in special form.

Key words: hyperbolic equation, nonlocal problem, integral conditions, generalized solution.