УДК 517.9

НЕКОТОРЫЕ ФОРМУЛЫ СРЕДНЕГО ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ

И.П. Половинкин [18]

Воронежский государственный университет,
Университетская пл., 1, Воронеж, 394006, Россия, e-mail: polovinkin@yandex.ru [19]

Аннотация. Рассмотрены некоторые способы получения формул среднего для уравнений со спектральным параметром из известных формул среднего.

Ключевые слова: формула среднего, теорема о среднем.

Определение. *Пусть $P(w)$ – многочлен порядка m. Финитное распределение (см. [1]) Φ назовем сопровождением уравнения*

$$P(D)u = 0$$

с дифференциальным оператором $P(D)$, если для любого решения $u(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ имеет место равенство

$$\langle \Phi, u \rangle = 0\,,$$

называемое формулой среднего для этого уравнения.

Далее, $\Delta = \sum_{k=1}^n \partial^2/\partial x_k^2$ – оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$, $\epsilon(\rho) = 1/(|S_n|(2-n)\rho^{n-2})$, если $n \geq 3$, $\epsilon(\rho) = \ln\rho/(2\pi)$, если $n = 2$, $\epsilon(|x|)$ — фундаментальное решение оператора Лапласа, $S_R(x_0)$ – сфера в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке x_0 и радиусом R, $B_R(x_0)$ – шар с границей $S_R(x_0)$, $|S_n|$ – площадь сферы $S_1(0)$. Через $\delta(x - x_0)$ обозначается мера Дирака, сосредоточенная в точке x_0, через $\delta_{S_R(x_0)}(x)$ – мера Дирака, сосредоточенная на сфере $S_R(x_0)$.

Теорема 1 [2]. *Для того, чтобы финитное распределение Φ являлось сопровождением оператора $P(D)$, необходимо и достаточно, чтобы имело место представление $\hat{\Phi}(w) = P(-w)\hat{\psi}(w)$, $w \in \mathbb{C}^n$, где $\hat{\psi}(w)$ – целая аналитическая функция, $\hat{\Phi}(w)$ – образ Фурье распределения Φ.*

Далее $P(w)$ – сумма одночленов с одинаковой четностью.

Теорема 2 [2]. *Пусть известно некоторое сопровождение $\Phi(x)$ оператора $P(D)$. Пусть $u_0(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ – решение в $\mathbb{R}^n$ уравнения $P(D)u_0 + \lambda u_0 = 0$. Тогда справедлива формула среднего $\langle \Phi + (-1)^m \lambda\psi, u_0 \rangle = 0$, где $\psi(x)$ – прообраз Фурье функции $\hat{\psi}(w)$.*

Эти теоремы позволяют вывести формулу среднего для собственных функций оператора, зная формулу среднего для самого оператора. Ниже приводится пример, в котором предложенная схема реализуется.

Теорема 3. *Решение уравнения Гельмгольца*

$$\Delta u + \lambda u = 0$$

[18] Половинкин И.П., канд.физ.-мат. наук, доцент Воронежского государственного университета.

[19] Старооскольский технологический институт (филиал «Московского института стали и сплавов»), мк р-он Макаренко, 42, г. Старый Оскол, Белгородская область, 309516, Россия

удовлетворяет формуле среднего значения

$$u(x_0) - \frac{1}{|S_n|R^{n-1}} \int\limits_{S_R(x_0)} u(y)\,dS_y + \lambda \int\limits_{B_R(x_0)} (\epsilon(|x-x_0|) - \epsilon(R))\,u(y)\,dy = 0\,.$$

□ Хорошо известна формула среднего для гармонической функции

$$u(x_0) = \frac{1}{|S_n|R^{n-1}} \int\limits_{S_R(x_0)} u(x)\,dS_x\,.$$

Из нее следует, что распределение

$$\Phi(x) = \delta(x-x_0) - \frac{1}{|S_n|R^{n-1}} \delta_{S_R(x_0)}(x)$$

является сопровождающим оператор Лапласа Δ. Поэтому для оператора $(\Delta+\lambda)$ можно указать сопровождающее распределение вида $\Phi_0 = \Phi + \lambda\psi$, где

$$\psi(x) = \left(-\frac{\widehat{\Phi}(\xi)}{|\xi|^2}\right)^{\vee} = \epsilon(|x|) * \Phi(x)\,.$$

Имеем

$$\psi(x) = \epsilon(|x|) * \left(\delta(x-x_0) - \frac{1}{|S_n|R^{n-1}} \delta_{S_R(x_0)}(x)\right) =$$

$$= \epsilon(|x-x_0|) - \frac{1}{|S_n|R^{n-1}} \epsilon(|x|) * \delta_{S_R(x_0)}(x)\,.$$

Вычислим второе слагаемое. Пусть

$$g(x) = \frac{1}{|S_n|R^{n-1}}\, \epsilon(|x|) * \delta_{S_R(x_0)}(x) = \frac{1}{|S_n|R^{n-1}} \int\limits_{S_R(x_0)} \epsilon(|x-y|)\,dS_y\,.$$

Если $|x-x_0| > R$, то функция $v(y) = \epsilon(|x-y|)$ гармонична в окрестности шара (круга) $|y-x_0| \le R$. Поэтому по теореме о среднем гармонической функции $g(x) = \epsilon(|x-x_0|)$, а значит $\psi(x) = 0$.

Пусть теперь $|y-x_0| < R$. Обозначим через $\widetilde{x}$ точку, симметричную точке x относительно сферы $S_R(x_0)$, то есть точку, лежащую на луче x_0x, для которой

$$|x-x_0| \cdot |\widetilde{x}-x_0| = R^2\,,$$

Последнее равенство означает еще и подобие треугольников $x\,x_0\,y$ и $y\,x_0\,\widetilde{x}$, что позволяет переписать его в расширенном виде:

$$\frac{|\widetilde{x}-x_0|}{R} = \frac{R}{|x-x_0|} = \frac{|y-\widetilde{x}|}{|y-x|}\,.$$

Отсюда

$$|y-x| = \frac{|x-x_0| \cdot |y-\widetilde{x}|}{R}\,,$$

а, следовательно,

$$g(x) = \frac{1}{|S_n|R^{n-1}} \int\limits_{S_R(x_0)} \epsilon\left(\frac{|x-x_0|\cdot|y-\widetilde{x}|}{R}\right) dS_y\,.$$

Функция $\epsilon\left(|x-x_0|\cdot|y-\widetilde{x}|/R\right)$, рассматриваемая как функция переменной y, является гармонической в окрестности шара (круга) $|y-x_0|\le R$. Поэтому по теореме о среднем гармонической функции

$$g(x) = \epsilon\left(\frac{|x-x_0|\cdot|x_0-\widetilde{x}|}{R}\right) = \epsilon(R)\,.$$

Поэтому при $|y-x_0|<R$

$$\psi(x) = \epsilon(|x-x_0|) - \epsilon(R)\,.$$

Отсюда вытекает утверждение теоремы. ■

Еще один способ получения формул среднего значения основан на методе спуска Адамара. Приведем пример его использования. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c^2 u = 0\,.$$

Пусть функция $u(x,t)$ является регулярным решением этого уравнения. Тогда функция

$$v(x,z,t) \equiv e^{cz}u(x,t)$$

является регулярным решением двумерного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\,,$$

что проверяется непосредственной подстановкой. Из формулы Пуассона решения задачи Коши для волнового уравнения с двумя пространственными переменными вытекает равенство

$$u(x,t)+u(x,-t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{x-t}^{x+t} u(\xi,0)\,d\xi \int\limits_{z-\sqrt{t^2-(\xi-x)^2}}^{z+\sqrt{t^2-(\xi-x)^2}} \frac{e^{c(\eta-z)}\,d\eta}{\sqrt{t^2-(\xi-x)^2-(\eta-z)^2}}\,.$$

Внутренний интеграл в последней формуле вычисляется и с учетом этого мы получим формулу среднего для функции $u(x,t)$

$$u(x,t)+u(x,-t) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{x-t}^{x+t} u(\xi,0)\Big(I_0\big(c\sqrt{t^2-(\xi-x)^2}\,\big) - L_0\big(c\sqrt{t^2-(\xi-x)^2}\,\big)\Big)\,d\xi\,,$$

где

$$I_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(z/2)^{2m+\nu}}{m!\Gamma(m+\nu+1)}$$

– модифицированная функция Бесселя первого рода порядка ν,

$$L_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(z/2)^{2m+\nu+1}}{\Gamma(m+3/2)\Gamma(m+\nu+3/2)}$$

– модифицированная функция Струве порядка ν.

Литература

1. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т.1 / М.: Мир, 1986. – 464 с.
2. Мешков В.З., Половинкин И.П. О получении новых формул среднего значения для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами // Дифференциальные уравнения. – 2011. – 47;12. – С.1724-1731.

SOME MEAN VALUE FORMULAS FOR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH SPECTRAL PARAMETER

I.P. Polovinkin

Voronezh State University,

Universitetskaya pl., 1, Voronezh, 394006, Russia, e-mail: polovinkin@yandex.ru [20]

Abstract. Some methods of mean value formulas obtaining based on known ones are proposed. It is done for equations with a spectral parameter.

Key words: mean value formulas, mean value theorems.

[20]Technological Institute (department of Moscow Institute of Steel and Alloys) at Stary Oskol, district Makarenko, 42, Stary Oskol, Belgorod region, 309 516, Russia.