КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 511

БИНАРНАЯ АДДИТИВНАЯ ЗАДАЧА С ПРОСТЫМИ ЧИСЛАМИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Н.А. Зинченко

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: zinchenko@bsu.edu.ru

Аннотация. Решена бинарная задача с простыми числами специального вида.

Ключевые слова: бинарная аддитивная задача, простые числа специального вида.

В 1940 году И.М. Виноградов, применив свой метод, в [1] решил задачу о распределении чисел вида $\{f\sqrt{p}\}$, где p простые числа, $p \le N$, f – действительное число, $0 < f < 1$.

В 1986г. С.А. Гриценко в [2], используя подход Ю.В. Линника, вывел асимптотическую формулу для числа таких простых чисел p, что

$$p \le N, \ \left\{\frac{1}{2}p^{1/c}\right\} < \frac{1}{2}\,, \tag{1}$$

где $1 < c \le 2$.

В 1988 г. С.А. Гриценко в [3] решил тернарную проблему Гольдбаха и проблему Варинга—Гольдбаха с простыми числами вида (1). Обе эти задачи были решены по схеме решения тернарной задачи.

В работах автора [5], [6] и [7] решен ряд бинарных аддитивных задач с полупростыми числами из промежутков вида $[(2m)^c, (2m+1)^c)$, где $m \in N$, и $c \in (1,2]$, то есть, удовлетворяющих неравенствам (1).

В настоящее время некоторые классические бинарные аддитивные задачи, такие как проблема делителей Титчмарша, проблема Харди-Литтлвуда и другие, в простых числах, удовлетворяющих неравенствам (1), не решены. Их решение представляет, на наш взгляд, большой интерес.

В настоящей работе впервые дается решение одной из бинарных аддитивных задач с простыми числами, удовлетворяющими неравенствам (1). Заметим, что эта задача несколько «проще» выше перечисленных нерешенных задач.

Рассмотрим известную теоретико-числовую функцию $\sigma_a(n) = \sum_{d|n} d^a$.

Пусть $\varepsilon > 0$, тогда сумма $\sum\limits_{p\le x} \sigma_{-\varepsilon}(p-1)$ представляет собой аналог суммы $\sum\limits_{p\le x} \sigma_0(p-1)$, получение асимптотической формулы для которой составляет проблему делителей Титчмарша. Мы накладываем на простые числа, по которым ведется суммирование дополнительное ограничение: они должны удовлетворять неравенствам (1).

Таким, образом, мы изучаем сумму вида

$$\sum_{p\le x, \{\frac{1}{2}p^{1/c}\}\le\frac{1}{2}} \sigma_{-\varepsilon}(p-1)\,. \tag{2}$$

Сумму (2) можно рассматривать как число решений диофантова уравнения

$$\begin{cases} p-1=uv, \\ p\le x \end{cases}$$

в простых числах p, удовлетворяющих неравенствам (1) и натуральных числах u и v, причем каждое решение этого уравнения берется с весом $\sigma_{-\varepsilon}(p-1)$.

Задачу получения асимптотики для числа решений такого рода диофантова уравнения в теории чисел принято называть бинарной аддитивной задачей.

В настоящем сообщении статье получена асимптотическая формула для для суммы (2).

Теорема. *Пусть $c>1$ – произвольное число, $\varepsilon>0$ и $\sigma_a(n)=\sum_{d|n}d^a$.*
Тогда справедлива асимптотическая формула

$$\sum_{p\le x,\{\frac12 p^{1/c}\}\le\frac12}\sigma_{-\varepsilon}(p-1)=\frac12 c_0\mathrm{Li}(x)+O_{\varepsilon,c}(x\ln^{-c}x)\,,$$

где

$$c_0=\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{\varphi(q)q^{\varepsilon}}\ ,$$

а $\varphi(n)$ – значение функции Эйлера.

□ Пусть $\Delta=(\ln x)^{-c-1}$, $r=[\ln x]$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ – «стаканчики» Виноградова, соответствующие параметрам $\alpha=\Delta$, $\beta=1-\Delta$, r, Δ и $\alpha=-\Delta$, $\beta=1+\Delta$, r, Δ, соответственно. Тогда

$$D_1(x)\le\sum_{p\le x}\sigma_{-\varepsilon}(p-1)\le D_2(x)\,, \tag{3}$$

где

$$D_\nu(x)=\sum_{p\le x}\sigma_{-\varepsilon}(p-1)\psi_\nu\left(\frac12 p^{1/c}\right)\,,\qquad \nu=1,2\,.$$

Выведем асимптотическую формулу для $D_1(x)$.

По определению имеем

$$D_1(x)=\sum_{p\le x}\psi_1\left(\frac12 p^{1/c}\right)\sum_{q|(p-1)}q^{-\varepsilon}=\sum_{q\le x-1}q^{-\varepsilon}\sum_{\substack{p\le x,\\ p\equiv1(\mathrm{mod}\,q)}}\psi_1\left(\frac12 p^{1/c}\right)=$$

$$=\sum_{q\le x^{0,01(1-c^{-1})}}q^{-\varepsilon}\sum_{\substack{p\le x,\\ p\equiv1(\mathrm{mod}\,q)}}\psi_1\left(\frac12 p^{1/c}\right)+O\Big(x^{1-0,01(1-c^{-1})\varepsilon}\Big)\,.$$

Разложим $\psi_1(x)$в ряд Фурье и воспользуемся свойствами коэффициентов Фурье:

$$D_1(x)=\sum_{q\le x^{0,01(1-c^{-1})}}\ \sum_{|m|\le\Delta^{-1}\ln x}c_m\sum_{\substack{p\le x,\\ p\equiv1(\mathrm{mod}\,q)}}e^{i\pi m p^{1/c}}+O\Big(x^{1-0,01(1-c^{-1})\varepsilon}\Big)\,.$$

Выделим нулевой коэффициент:

$$D_1(x) = \Big(\frac{1}{2} - 2\Delta\Big) \sum_{q \le x^{0,01}} q^{-\varepsilon}\pi(x,q,1) +$$

$$+ O\Big(\sum_{q \le x^{0,01(1-c^{-1})}} \sum_{1 \le m \le \Delta^{-1}\ln x} m^{-1} \Big| \sum_{\substack{p \le x\,, \\ p \equiv 1 (\operatorname{mod} q)}} e^{\pi i m p^{1/c}} \Big| \Big) + O\Big(x^{1-0,001\varepsilon}\Big)\,.$$

Для оценки первого остатка преобразуем внутреннюю сумму:

$$\sum_{\substack{p \le x\,, \\ p \equiv 1 (\operatorname{mod} q)}} e^{i\pi m p^{1/c}} = \sum_{p \le x} e^{i\pi m p^{1/c}} \quad q^{-1} \sum_{b=1}^{q} e^{2\pi i \frac{p-1}{q} b} =$$

$$= \frac{1}{q} \sum_{b=1}^{q} e^{-2\pi i \frac{b}{q}} \sum_{p \le x} e^{i\pi m p^{1/c} + 2\pi i \frac{b}{q} p}\,.$$

В статье С.А. Гриценко [7] доказано, что при любых $0 < m \le 2x^{(1-c^{-1})/6} \ln x$ и при любых действительных α_1 справедлива оценка

$$|\sum_{p \le x} e^{\pi i m p^{1/c} + 2\pi i \alpha_1 p}| = O(x^{1-(1-1/c)/6} \ln^{4,5} x)\,.$$

Пользуясь этой формулой, получаем, что

$$D_1(x) = \Big(\frac{1}{2} - 2\Delta\Big) \sum_{q \le x^{0,01}} q^{-\varepsilon}\pi(x,q,1) + O(x^{1-0,01(1-1/c)\varepsilon})\,.$$

Применим теорему Бомбьери-Виноградова

$$\sum_{q \le x^{0,01(1-1/c)}} q^{-\varepsilon}\pi(x,q,1) = \sum_{q \le x^{0,01(1-1/c)}} \frac{\mathrm{Li}(x)}{\varphi(q)} q^{-\varepsilon} +$$

$$+ O\Big(\sum_{q \le x^{0,01}} \Big| \pi(x,q,1) - \frac{\mathrm{Li}(x)}{\varphi(q)} \Big| \Big) = \mathrm{Li}(x) \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(q) q^{-\varepsilon}} + O(x \ln^{-c} x)\,.$$

Итак, мы получили, что

$$D_1(x) = \Big(\frac{1}{2} - 2\Delta\Big) \mathrm{Li}(x) \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(q) q^{\varepsilon}} + O(x \ln^{-c} x) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(q) q^{\varepsilon}} + O(x \ln^{-c} x).$$

Такая же формула справедлива и для $D_2(x)$, что доказывается аналогично. Теперь утверждение теоремы сразу следует из неравенств (3). ■

Литература

1. Виноградов И.М. Некоторое общее свойство распределения простых чисел // Мат. сборник. – 1940. – 7. – С.365-372.
2. Гриценко С.А. Об одной задаче И.М. Виноградова // Математические заметки. – 1986. – 39;5. – С.625-640.
3. Гриценко С.А. Тернарная проблема Гольдбаха и проблема Гольдбаха-Варинга с простыми числами, лежащими в промежутках специального вида //УМН. – 1988. – 43;4(262). – С.203-204.
4. Зинченко Н.А. Бинарная аддитивная задача с полупростыми числами специального вида // Чебышевский сборник. – 2005. – VI;2(14). – С.145-162.
5. Зинченко Н.А. Две бинарные аддитивные задачи // Сибирские электронные математические известия. – 2006. – 3. – С.352-354.
6. Зинченко Н.А. Об одной аддитивной бинарной задаче // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика, информатика. – 2007. – 7;1. – С.9-13.
7. Гриценко С.А. Три аддитивные задачи // Изв. РАН, Сер. матем. – 1992. – 56;4. – С.1198-1216.

BINARY ADDITIVE PROBLEM WITH SPECIFIC PRIME NUMBERS

N.A. Zinchenko

Belgorod State University,
Pobedy str., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: zinchenko@bsu.edu.ru

Abstract. The binary additive problem with specific prime numbers is solved.

Key words: binary additive problem, specific prime numbers.