УДК 532.5.0727.12

ТЕОРИЯ ФИЛЬТРА ДАРСИ

В.П. Бушланов, И.В. Бушланов, Е.Н. Сентякова

Государственный морской университет имени адмирала Ф.Ф.Ушакова,
пр.Ленина, 93, Новороссийск, 353925, Россия, e-mail: bvp@ngs.ru

Аннотация. Из уравнения живых сил, полученного стандартным способом из уравнений Навье-Стокса несжимаемой жидкости, с точностью до главных членов по числу Пуайзеля получена теоретическая формула для коэффициента проницаемости в классическом опыте Дарси. Из формулы следует, что величина коэффициента проницаемости обратно пропорциональна квадрату удельной поверхности и безразмерной средней скорости диссипации кинетической энергии жидкости в фильтре. Показано, что если силы инерции малы, то скорость диссипации кинетической энергии в опыте Дарси минимальна, а коэффициент проницаемости конкретного фильтра есть функция только геометрии фильтра.

Ключевые слова: закон Дарси, коэффициент проницаемости, удельная поверхность.

1. Введение. Классический закон фильтрации Дарси имеет следующий вид: $\boldsymbol{V} = (k/\mu)\,\nabla P$, где $\mu, \boldsymbol{V}, P$ – соответственно коэффициент динамической вязкости, средние скорость и давление фильтруемой жидкости, k – коэффициент проницаемости. Схема классического опыта Дарси изображена на рис. 1 (из [1]). Коэффициент k определяется экспериментально с использованием представлений о модельной пористой среде и некоторых вспомогательных гипотез и считается, что k зависит от пористости и топологии открытых пор. Например, в [2] приведено выражение $k = d_M^2\,\mathrm{Sl}(\alpha_i, э)$, где d_M – эффективный диаметр частиц, слагающих пористую среду; Sl – безразмерный коэффициент (число Слихтера), зависящий от пористости породы α_i и параметра структуры порового пространства э (который в свою очередь зависит от формы слагающих породу частиц и от, так называемого, «коэффициента извилистости» ξ). Согласно же гипотезе Козени-Кармана [3], $k = \alpha_i^2/\left[K\,(1-\alpha_i^2)\,S_{12}^2\right]$, где S_{12} – удельная поверхность пор, K – коэффициент формы. Можно ли теоретически определить коэффициент проницаемости для классического опыта Дарси? В предлагаемой работе с точностью до главных членов по числу Пуайзеля Po$=\left(R/r\right)^2 >> 1$, где $r = 2\alpha_i/S_{12}$ – средний поперечный размер пор, R – характерный гидравлический радиус, из уравнений Навье-Стокса получена теоретическая формула для коэффициента проницаемости вида $k = \tilde{k}/\left(S_{12}\right)^2$, где $\tilde{k}$ – безразмерный коэффициент обратно пропорциональный безразмерной средней скорости диссипации кинетической энергии жидкости.

2. Уравнение живых сил. Уравнение движения для скорости $v = \{v^1, v^2, v^3\}$ несжимаемой жидкости, содержащейся внутри пор, получим стандартным способом из уравнений Навье-Стокса:

$$\nabla^k v^k = 0\,, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v^m}{\partial t} + \nabla^k(v^m v^k) = \frac{1}{\rho^0}\nabla^k\sigma^{km} + g^m\,, \tag{2}$$

где $\sigma^{kq} = \left(-p\delta^{kq} + 2\mu\mathcal{E}^{kq}\right)$, $\mathcal{E}^{kq} = \left(\nabla^k v^q + \nabla^q v^k\right)/2$, ρ^0 – плотность несжимаемой жидкости, t – время, $\nabla^k = \partial/\partial x^k$ в декартовой системе координат $x = \{x^1, x^2, x^3\}$, σ^{kq} – тензор напряжений в жидкости, $g = \{g^1, g^2, g^3\}$ – вектор ускорения силы тяжести, p – давление жидкости. Все физические величины здесь относятся к жидкости внутри пор.

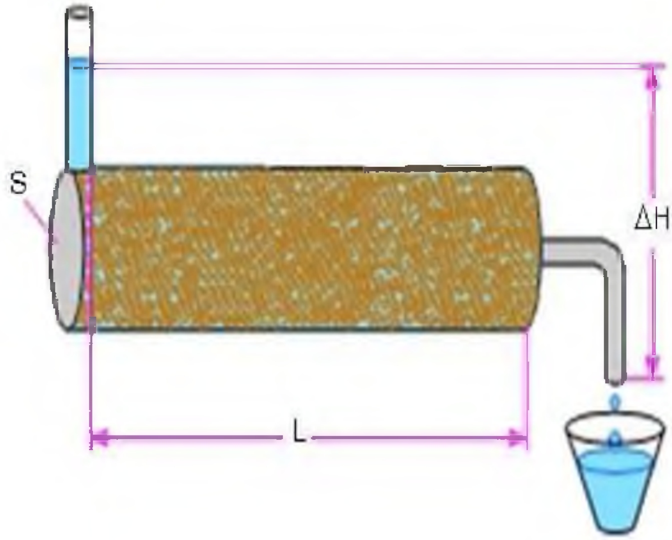

Рис. 1

Введем функцию напора $\Phi = -p/\rho^0 - v^2/2 + \boldsymbol{gx}$ и, учитывая уравнение (1) запишем уравнение (2), в следующем эквивалентном виде:

$$\frac{\partial v^m}{\partial t} + (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v})^m = \nabla^m \Phi + 2\nu \nabla^q \mathcal{E}^{qm}\,, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{\Omega} = \operatorname{rot} \boldsymbol{v}$, $\nu = \mu/\rho^0$. Умножим скалярно уравнение (3) на вектор скорости $\boldsymbol{v}$ и проинтегрируем по объему жидкости W содержащейся в порах и в подводящей и отводящей трубках рис. 1. С учетом уравнения неразрывности и тождества $\mathcal{E}^{pq}\left(\nabla^p v^q - \nabla^q v^p\right) = 0$, получим

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \boldsymbol{v}^2}{\partial t} = (\nabla, (\Phi \boldsymbol{v})) + 2\nu \nabla^q \left(v^p \mathcal{E}^{pq}\right) - 2\nu \left(\mathcal{E}^{pq}\right)^2 . \tag{4}$$

Проинтегрируем (4) по объему W и в первых двух интегралах в правой части перейдем от объемных интегралов к поверхностным. С учетом равенства нулю скорости на твердых стенках трубок и на поверхности пор получим

$$\begin{gathered}\frac{W}{2}\frac{\partial \left\langle \boldsymbol{v}^2\right\rangle_W}{\partial t} + 2\nu W \left\langle \left(\mathcal{E}^{pq}\right)^2\right\rangle_W = \\ = \int_{S_1+S_2} \left[(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{n})\,\Phi + \nu\,(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{v} \times n) + \nu\,(\boldsymbol{n}, \nabla)\,\boldsymbol{v}^2\right] ds\,,\end{gathered} \tag{5}$$

где S_1, S_2 – соответственно плоские торцевые поверхности подводящей и отводящей трубок, $\langle\cdot\rangle_W$ – знак осреднения по объему жидкости W.

3. Безразмерная форма уравнения живых сил. Введем безразмерные (с волной) параметры следующим образом: $\boldsymbol{x} = r\tilde{\boldsymbol{x}}$, r – средний радиус сечения каналов открытых пор, $\bar{x} = R\tilde{\boldsymbol{x}}$ – «средний» радиус-вектор для отдельно взятой открытой поры, R – размер порядка размера фильтра Дарси, $r \ll R$, $t = \tilde{t}R/V_0$, $\Phi = (\Phi_2 - \Phi_1)\,\tilde{\bar{\Phi}} = \bar{\Phi}$ – усредненная по отдельно взятой поре функция напора, $v = V_0\tilde{v}$, $\rho = \rho_0\tilde{\rho}$, где V_0 – размер скорости, $\Phi_2 - \Phi_1$ разность напоров на характерной длине гидравлического радиуса $R = L$, где L – длина фильтра, где $G\Phi_k/\rho_0 = \displaystyle\int_{\tilde{S}_k} (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{n})\,\Phi ds$, $k = 1, 2$ и G – массовый расход жидкости.

Покажем, что r порядка $2\alpha_i/S_{12}$.

1). Пусть пористая среда состоит из каналов, а N число каналов в единице объема, l - средняя длина каналов. Пористость и удельная поверхность соответственно равны $\alpha_i = \pi r^2 lN, S_{12} = 2\pi rlN$. Из последних соотношений имеем $r = 2\alpha_i/S_{12}$.

2) Пусть пористая среда составлена из отдельных частиц (например, песок, глина, волокна и т.п.). Искомая оценка получится из уравнения $\alpha_i = S_{12}r/2$, которое выражает тот факт, что величина порового пространства равна половине удельной поверхности умноженной на величину среднего расстояния между поверхностями частиц. Уравнение (5) в безразмерном виде запишется следующим образом (волну над безразмерными величинами для упрощения записи опустим):

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\left\langle \boldsymbol{v}^2\right\rangle_W}{\partial t} + 2\frac{R^2}{r^2}\frac{1}{\mathrm{Re}}\left\langle(\mathcal{E}^{pq})^2\right\rangle_W =$$

$$= \frac{R^2}{\alpha S}\int_{S_1+S_2}\left[\mathrm{Eu}\cdot\Phi\cdot(\boldsymbol{v}\boldsymbol{n}) + \frac{R}{r}\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n}\right) + \frac{R}{r}\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\boldsymbol{n}, \nabla\right)\boldsymbol{v}^2\right] ds\,, \tag{6}$$

где $\mathrm{Eu} = (\Phi_2 - \Phi_1)/V_J^2$, $\mathrm{Re} = R\rho_0 V_0/\mu$, соответственно, безразмерные числа Эйлера и Рейнольдса, где S – площадь сечения фильтра, α – средняя пористость по всему объему фильтра, $W = \alpha RS$ (для простоты пренебрегли объемом трубок по сравнению с объемом пор фильтра). Выберем $r = 1/S_{12}$, $V_0 = \rho_0(\Phi_2 - \Phi_1)/(R\mu S_{12}^2)$. Заметим, что выбранный размер скорости имеет вид закона Дарси. Числа Рейнольдса и Пуайзеля соответственно равны $\mathrm{Re} = \rho_0^2(\Phi_2 - \Phi_1)/(\mu^2 S_{12}^2)$, Po$= \rho_0(\Phi_2 - \Phi_1)R/(\mu_i V_0) = (RS_{12})^2 = (R/r)^2$, поэтому $\mathrm{Eu} = (RS_{12})^2/$ Re$=$ Po/Re. Так как $r \ll R$, то $\mathrm{Po} = (RS_{12})^2 \gg 1$.

Покажем, что при фильтрации в опыте Дарси рис. 1 средняя безразмерная скорость диссипации кинетической энергии приближенно равна среднему безразмерному квадрату вихря скорости. Из векторного тождества $\nabla\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = \nabla^2\boldsymbol{v} + \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}$, учитывая (1) имеем $2(\boldsymbol{e}^p, \nabla)\mathcal{E}^{pq} = \Delta\boldsymbol{v} = -\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\Omega}$. Умножая полученное равенство скалярно на вектор $\boldsymbol{v}$ с учетом тождества $(\boldsymbol{v}, \mathrm{rot}\,\boldsymbol{\Omega}) = (\boldsymbol{\Omega})^2 + (\nabla, (\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}))$, получим уравнение $-2\nabla^q(v^p\mathcal{E}^{pq}) + 2(\mathcal{E}^{pq})^2 = (\boldsymbol{\Omega})^2 + (\nabla, (\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}))$.

Проинтегрируем последнее уравнение по объему W, учитывая равенство нулю скоростей на поверхностях трубок и пор. Перейдем в первом слагаемом левой части равенства и втором слагаемом правой части к поверхностным интегралам, тогда получим после обезразмеривания следующее уравнение:

$$\left\langle \left(\tilde{\mathcal{E}}^{pq}\right)^2 \right\rangle_W = \left\langle \left(\tilde{\boldsymbol{\Omega}}\right)^2 \right\rangle_W + \mathrm{Po}^{-1/2} \int_{S_1+S_2} \left[\left(\boldsymbol{n}, \tilde{\nabla}\right) \tilde{\boldsymbol{v}}^2 + 2\left(\tilde{\boldsymbol{\Omega}}, \boldsymbol{n} \times \tilde{\boldsymbol{v}}\right) \right] d\tilde{s}\,, \tag{7}$$

Так как на торцах трубок вектора скорости и нормали почти параллельны то второй член в правой части равен произведению $\mathrm{Po}^{-1/2}$ на малую величину безразмерного поверхностного интеграла. Пренебрегая указанным членом в уравнении (7), приближенно получим

$$\left\langle \left(\tilde{\mathcal{E}}^{pq}\right)^2 \right\rangle_W = \left\langle \left(\tilde{\boldsymbol{\Omega}}\right)^2 \right\rangle_W \,, \tag{8}$$

что и требовалось доказать.

4. Приближение при больших значениях числа Пуайзеля. Сохраняя в уравнении (6) только главные члены по числу Пуайзеля (отметим к тому же, что в торцевых сечениях трубок векторы скоростей и нормалей параллельны и производные квадратов скоростей вдоль оси трубок малы), выбирая размер производных скорости как V/r, где $V = G/(\rho_0 \alpha S)$ и $r = 2\alpha/S_{12}$, и возвращаясь к размерным переменным, получим уравнение Дарси:

$$V = \frac{k}{\nu_i}\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{R}\,, \text{где } \; k = \frac{4\alpha^2}{S_{12}^2} \Big/ \left\langle 2\left(\tilde{\mathcal{E}}^{pq}\right)^2 \right\rangle_W \,. \tag{9}$$

5. Выводы. Проанализируем формулу (9). Порядок величины безразмерного коэффициента проницаемости $\tilde{k} = kS_{12}^2$ определяется знаменателем дроби, который равен среднему по объему жидкости значению безразмерной скорости диссипации кинетической энергии. Если размер модуля производной скорости принятый нами равным $G/(r\rho_0\alpha S)$ «угадан» верно, то безразмерная скорость диссипации порядка единицы, а значит в указанном случае $\tilde{k} \sim 4\alpha^2$. Уравнение (9) показывает, что коэффициент проницаемости k определяется не только топологией пор фильтра, но и средней безразмерной скоростью диссипации кинетической энергии (или учитывая (8) средним безразмерным квадратом вихря скорости), и что есть принципиальная возможность определить указанный коэффициент путем прямых численных расчетов на основе решений уравнения Навье-Стокса.

Докажем следующее утверждение: для фильтра в опыте Дарси, изображенном на рис. 1, течение с малыми силами инерции обладает наименьшей общей скоростью диссипации из всех других течений несжимаемой жидкости в той же области, если расходы жидкости для всех течений равны, давления в течении с минимальной скоростью диссипации на торцах постоянны и скоростями $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ на торцах (соответственно для течений с минимальной скоростью диссипации энергии и указанного всякого другого течения) параллельны оси, а на поверхностях трубок и пор скорости равны нулю. Схема доказательства аналогичная [4] (стр. 290). Имеем

$$\int_W \left(\mathcal{E}_2^{pq} - \mathcal{E}_1^{pq}\right)\mathcal{E}_1^{pq} dw = \int_W \left(\mathcal{E}_2^{pq} - \mathcal{E}_1^{pq}\right)\nabla^p v_1^q dw =$$

$$= 1/2 \int_{S_1+S_2} \left[\Big((\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1), (\boldsymbol{n}, \nabla) \boldsymbol{v}_1 \Big) + \Big(\boldsymbol{n}, ((\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1), \nabla) \boldsymbol{v}_1 \Big) \right] ds -$$

$$-1/2 \int_W \Big((\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1), \Delta \boldsymbol{v}_1 \Big) dw = 1/(2\mu) \int_W \Big((\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1), (\nabla p - \rho^0 \boldsymbol{g}) \Big) +$$

$$+ \int_{S_1+S_2} (\boldsymbol{n}, (\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1)) (\boldsymbol{n}, \nabla) (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{v}_1) \, ds = 1/(2\mu) \int_{S_1+S_2} p \Big(\boldsymbol{n}, (\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1) \Big) ds = 0$$

, где было учтено постоянство давлений на торцах и равенство расходов на торцах, и что $(\boldsymbol{n}, \nabla)(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{v}_1) = 0$ из уравнения неразрывности на плоских торцах трубок, в котором производные нулевых касательных компонент скоростей вдоль плоских торцов равны нулю. Отсюда следует доказываемое:

$$2\mu \int_W \varepsilon_2^{pq} \varepsilon_2^{pq} dw = 2\mu \int_W \left[\varepsilon_1^{pq} \varepsilon_1^{pq} + (\varepsilon_2^{pq} - \varepsilon_1^{pq})(\varepsilon_2^{pq} - \varepsilon_1^{pq}) \right] dw \,. \qquad (10)$$

Таким образом, в классическом опыте Дарси для стационарных течений в пористой среде с малыми силами инерции реализуется течение с минимальной скоростью диссипации кинетической энергии и из (9) – при заданном перепаде напора с минимальным расходом жидкости (или другой вариант – с заданным расходом реализуется минимальный перепад напора).

Покажем, что в законе Дарси (в уравнении (9)) $k =$const для течений несжимаемой жидкости с малыми силами инерции и данной топологией пор. Уравнения и граничные условия течения с малыми силами инерции имеют вид:

$$\nabla^k v^k = 0 \,, \quad 0 = \frac{1}{\rho^0} \nabla^k \sigma^{km} + g^m = \nabla^m \Phi_\delta + \nu \Delta \, v^m \,, \qquad (11)$$

где $\Phi_\delta = -p/\rho^0 + \boldsymbol{g}\boldsymbol{x}$.

Положим $v = 0$ на поверхности пор и боковой поверхности трубок; $v = V_p$ на торцах S_1, S_2 трубок, где $\boldsymbol{V}_p = \left\{ \dfrac{2G}{\rho_0 \pi Y^2} \left(1 - \dfrac{y^2}{Y^2} \right), 0, 0 \right\}$ - скорость течения Пуайзеля в соответствующей трубке, y – расстояние до оси, Y- радиус трубки (для простоты здесь трубки одного радиуса) и $G = \alpha \rho_0 S V$ – расход в трубке и фильтре. При этом $\Phi_\delta = \Phi_1$ на S_1 и $\Phi_\delta = \Phi_2$ на S_2.

Введем новую функцию $\Phi_\Delta = \Phi_\delta - \Phi_1$ и проведем обезразмеривание уравнений (11) и граничных условий, выбирая размеры скоростей и расстояний такие же, как при получении уравнения Дарси (9), тогда получим следующие безразмерные (волну у безразмерных параметров опустим) уравнения и граничные условия:

$$\nabla^k v^k = 0 \,, \quad 0 = \frac{4\alpha^2}{\tilde{k}} \left(\frac{R}{r} \right) \nabla \Phi_\Delta + \Delta \boldsymbol{v} \,, \qquad (12)$$

где $\boldsymbol{v} = 0$ на поверхности пор и боковой поверхности трубок; $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V}_p$ на торцах S_1, S_2 трубок, где $\boldsymbol{V}_p = \left\{ \dfrac{2\alpha S}{\pi Y^2} \left(1 - \dfrac{y^2}{Y^2} \right), 0, 0 \right\}$, $\Phi_\Delta = 0$ на S_1 и $\Phi_\Delta = 1$ на S_2.

Полученные безразмерные уравнения (12) и граничные условия зависят только от геометрических параметров фильтра и конкретной топологии пор (не зависят от расхода и перепада напора). Поэтому, решая полученную безразмерную задачу, находим безразмерную среднюю диссипацию кинетической энергии, а значит согласно (9) и коэффициент проницаемости k, зависящий только от геометрии фильтра и конфигурации пор, что и требовалось показать.

Введем для фильтра Дарси на рис. 1 понятие эквивалентного фильтра. Пусть имеем фильтр как в классическом опыте Дарси (фильтр Дарси). Поставим ему в соответствие фильтр, в котором поры образованы одинаковыми параллельными цилиндрами радиуса a (назовем его эквивалентный фильтр) и в котором точно такие же R, S, Y, α, расход жидкости G и коэффициент проницаемости $k = \nu V / \left[\frac{(\Phi_2 - \Phi_1)}{R}\right]$. В цилиндрических каналах имеем течение Пуайзеля, поэтому: $\alpha\rho_0 SV = G = \frac{\pi S N a^4}{8\nu}\frac{\rho_0(\Phi_2 - \Phi_1)}{R}$, где N – число окружностей (пересечений цилиндров с торцевыми сечениями фильтра) на единицу площади, $\alpha = \pi N a^2$. Отсюда находим

$$k = \nu V / \left[\frac{(\Phi_2 - \Phi_1)}{R}\right] = \frac{a^2}{8}\ . \tag{13}$$

Из (12) находится радиус цилиндрических каналов $a = 2\sqrt{2k}$ эквивалентного фильтра, или другими словами, параметром a можно выбрать параметр k такой же как в фильтре Дарси. В эквивалентном фильтре удельная поверхность равна

$$S_{12Э} = 2\pi a N = \alpha/\sqrt{2k}\ , \tag{14}$$

а безразмерный коэффициент проницаемости и безразмерная средняя скорость диссипации кинетической энергии соответственно равны

$$\tilde{k}_Э = S_{12Э}^2 k = \alpha^2/2\ , \qquad \left\langle 2\left(\tilde{\varepsilon}^{pq}\right)^2\right\rangle_{WЭ} = 8\ .$$

Таким образом, в эквивалентном фильтре и фильтре Дарси: совпадают коэффициенты проницаемости k, пористость α, средние скорости диссипации кинетической энергии

$$V^2 \left\langle 2\left(\tilde{\varepsilon}^{pq}\right)^2\right\rangle_W \Big/ \left(\frac{4\alpha^2}{S_{12}^2}\right) = \frac{1}{k}\left(\frac{G}{\alpha\rho_0 S}\right)^2\ ; \tag{16}$$

совпадают все геометрические параметры, кроме удельной поверхности S_{12}, которая в эквивалентном фильтре определяется из (14), а в фильтре Дарси равна

$$S_{12} = S_{12Э} 2\sqrt{2} \Big/ \sqrt{\left\langle 2\left(\tilde{\varepsilon}^{pq}\right)^2\right\rangle_W}\ .$$

Таким образом, в задачах фильтрации, где не используется параметр удельной поверхности, реальную пористую среду можно заменить эквивалентной, используя понятие эквивалентного фильтра. Отметим, что при малых силах инерции и в эквивалентном фильтре также реализуется течение с минимумом средней скорости диссипации кинетической энергии.

Удивительно то, что согласно (16) во всех реальных фильтрах Дарси с различными величинами удельной поверхности S_{12} (и с разной топологией пор!), но с одинаковыми коэффициентами проницаемости и средней скоростью течения V, в течениях с малыми силами инерции реализуется одна и та же величина средней скорости диссипации кинетической энергии.

Литература

1. Ентов В.М. Теория фильтрации // Соровский образовательный журнал. – 1998. – 2. – С.121-128.
2. Лейбензон Л.С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде / М-Л: ОГИЗ. Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1947. – 244 с.
3. Гольдберг В.М., Скворцов Н.П. Проницаемость и фильтрация в глинах / М.: Недра, 1986. – 160 с.
4. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости / М: Мир, 1973. – 758 с.

DARSI's FILTER THEORY

V.P. Bushlanov, I.V. Bushlanov, E.N. Sentyakova

Sea State University of F.F. Ushakov,
Lenina Av., 93, Novorossiysk, 353925, Russia, e-mail: bvp@ngs.ru

Abstract. From equation of manpowers obtained by the standard way on the basis of Nave-Stokes' equation described incompressible liquid motion, to within the main term corresponding to the case of large Poiseuille's number, theoretical formula for permeability factor in classical Darsi experience is obtained. From the formula it follows that the value of permeability factor is inversely proportional to the squared specific surface and to dimensionless average dissipation velocity of liquid kinetic energy in the filter. It is shown that the velocity of kinetic energy dissipation in Darsi's experience is minimal if inertia force is small and also the permeability factor of the concrete filter only depends on the filter geometry.

Key words: Darsi's law, permeability factor, specific surface.