УДК 517.958:531.72, 517.958:539.3(4)

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ДИФФУЗИИ - КОНВЕКЦИИ В ПОРОУПРУГОЙ СРЕДЕ НА МИКРОСКОПИЧЕСКОМ УРОВНЕ [2)]

А.М. Мейрманов, Р.Н. Зимин, О.В. Гальцева, О.А. Гальцев
Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия, e-mail: reshat85@mail.ru

Аннотация. В работе рассматривается начально-краевая задача для системы, состоящей из уравнений Стокса, описывающих движение несжимаемой вязкой жидкости в поровом пространстве твердого «скелета» и уравнений Ламе. Рассматриваемая система дополняется конвективным уравнением диффузии для примеси в жидкости. Считается, что плотность жидкости зависит от концентрации примеси. Доказывается существование по крайней мере одного обобщенного решения.

Ключевые слова: система уравнений Стокса и Ламе, конвективное уравнение диффузии.

1. Постановка задачи

Пусть $\Omega \in R^3$ ограниченная связная область с липшицевой границей S, полученная периодическим повторением элементарной ячейки $\varepsilon\overline{Y}$, где $\varepsilon > 0$ малый параметр,

$$\overline{Y} = Y_f \cup Y_s \cup \gamma \cup \partial Y, \quad Y = (0,1) \times (0,1) \times (0,1), \quad \varepsilon Y = (0,\varepsilon) \times (0,\varepsilon) \times (0,\varepsilon)\,,$$

где $\gamma = \partial Y_f \cap \partial Y_s$ – липшицева граница между множествами Y_f и Y_s. Область Y_f будем считать симметричной относительно поворотов на $\pi/2$ (рис. 1.).

Через $\overline{\Omega}{}^{\varepsilon}_f$ обозначим периодическое повторение элементарной ячейки $\varepsilon\overline{Y}_f$, а через $\overline{\Omega}{}^{\varepsilon}_s$ – периодическое повторение $\varepsilon\overline{Y}_s$. Тогда

$$\Omega = \Omega^{\varepsilon}_f \cup \Omega^{\varepsilon}_s \cup \Gamma^{\varepsilon}\,,$$

где $\Gamma^{\varepsilon} = \partial\Omega^{\,\varepsilon}_f \cap \partial\Omega^{\,\varepsilon}_s$ – периодическое повторение границы $\varepsilon\gamma$.

В области Ω рассматривается следующая система дифференциальных уравнений:

$$\nabla\cdot\Big(\chi^{\,\varepsilon}\mu_0\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\,\varepsilon}}{\partial t}\Big)+(1-\chi^{\,\varepsilon})\lambda_0\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}^{\,\varepsilon})-p^{\,\varepsilon}\mathbb{I}\Big)+\rho(\varphi(c^{\,\varepsilon}))\boldsymbol{F}=0\,,\ \ \boldsymbol{x}\in\Omega\,,\quad t>0\,,\qquad (1)$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{w}^{\,\varepsilon}=0,\quad \boldsymbol{x}\in\Omega,\quad t>0, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial c^{\,\varepsilon}}{\partial t}=\nabla\cdot\Big(D_0\nabla c^{\,\varepsilon}-\varphi(c^{\,\varepsilon})\,\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\,\varepsilon}}{\partial t}\Big),\ \ \boldsymbol{x}\in\Omega^{\varepsilon}_f,\quad t>0\,, \qquad (3)$$

[2]Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (госконтракт №02.740.11.0613).

дополненная следующими начальными и граничными условиями:

$$\boldsymbol{w}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)=0 \quad \text{при} \quad \boldsymbol{x}\in S=\partial\Omega, \quad t>0\,; \tag{4}$$

$$D_0\frac{\partial c^{\varepsilon}}{\partial \boldsymbol{n}}-\varphi(c^{\varepsilon})\,\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{n}=0 \ \text{ при } \ \boldsymbol{x}\in\Gamma^{\varepsilon}\,,\ t>0\,; \tag{5}$$

$$\int_{\Omega} p^{\varepsilon}\,d\boldsymbol{x}=0\,, \qquad t>0\,; \tag{6}$$

$$\chi^{\varepsilon}\boldsymbol{w}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},0)=0 \quad \text{при} \quad \boldsymbol{x}\in\Omega\,; \tag{7}$$

$$c^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},0)=c_0(\boldsymbol{x}) \text{ при } \boldsymbol{x}\in\Omega^{\varepsilon}_{f}\,, \tag{8}$$

где функция $\varphi(c^{\varepsilon})\in\mathbb{C}^2(-\infty,\infty)$, такая что

$$\varphi(c^{\varepsilon})=\begin{cases} -1/2 & , \quad c^{\varepsilon}<-1/2\,;\\ c^{\varepsilon} & , \quad 0\le c^{\varepsilon}\le 1\,;\\ 3/2 & , \quad c^{\varepsilon}>3/2\,, \end{cases}$$

$\boldsymbol{w}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)=(w^{\varepsilon}_1(\boldsymbol{x},t)\,,w^{\varepsilon}_2(\boldsymbol{x},t)\,,w^{\varepsilon}_3(\boldsymbol{x},t))$ – вектор перемещения сплошной среды, $p^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)$ – давление в сплошной среде, $c^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)$ – концентрация примеси, $\mathbb{D}(x,\boldsymbol{v})$ – симметрическая часть градиента вектора $\boldsymbol{v}$ (тензор напряжений), $\mathbb{I}$ – единичная матрица, $\chi^{\varepsilon}(\boldsymbol{x})$ – характеристическая функция порового пространства,

$$\rho(c^{\varepsilon})=\chi^{\varepsilon}\delta\varphi(c^{\varepsilon})\,,$$

μ_0 – безразмерная вязкость жидкости, λ_0 – безразмерная постоянная Ламэ, δ – положительная постоянная, $\boldsymbol{n}$ – единичный вектор внешней нормали к Γ^{ε}, D_0 – коэффициент диффузии.

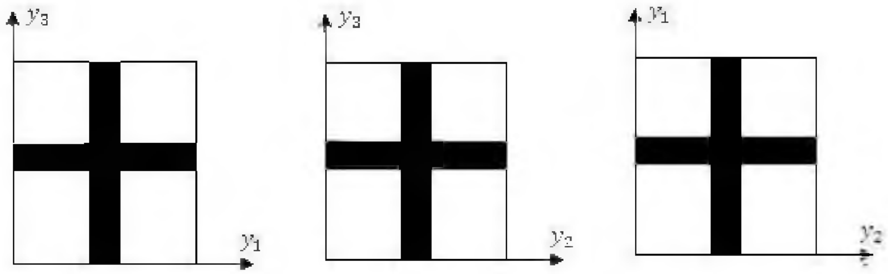

Рис. 1. Проекции на взаимно-ортогональные плоскости геометрии элементарной ячейки

Обзор результатов по данной задаче можно найти в ([6]).

2. Основной результат

Определение 1. *Тройка $\{\boldsymbol{w}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t),\ p^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t),\ c^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)\}$ называется обобщенным решением задачи (1)-(8) в области $\Omega_T=\Omega\times(0,T)$, если*

1) $p^{\varepsilon}\in L^2(\Omega_T)$, $\quad \boldsymbol{w}^{\varepsilon}\in W_2^{1,1}(\Omega_f^{\varepsilon}\times(0,T))\bigcap W_2^{1,0}(\Omega_s^{\varepsilon}\times(0,T))$,
$c^{\varepsilon}\in L_{\infty}(\Omega_f^{\varepsilon}\times(0,T))\ \bigcap\ W_2^{1,0}(\Omega_f^{\varepsilon}\times(0,T))$;

2) почти всюду в области Ω_T выполнены уравнение (2) и условие (6);

3) $\boldsymbol{w}^{\varepsilon}$, p^{ε} и c^{ε} удовлетворяют интегральным тождествам

$$\int_{\Omega_T}\Big[\chi^{\varepsilon}\mu_0\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\Big):\mathbb{D}(x,\boldsymbol{\phi})+(1-\chi^{\varepsilon})\lambda_0\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}^{\varepsilon}):\mathbb{D}(x,\boldsymbol{\phi})-p^{\varepsilon}\nabla\cdot\boldsymbol{\phi}\Big]\,dxdt=$$
$$\int_{\Omega_T}\rho(\varphi(c^{\varepsilon}))\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\phi}\,dxdt \qquad (9)$$

для произвольной гладкой вектор-функции $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x},t)$, равной нулю на границе S и при $t=T$, и

$$\int_0^T\int_{\Omega_f^{\varepsilon}}\Big(c^{\varepsilon}\,\frac{\partial\psi}{\partial t}+\varphi(c^{\varepsilon})\,\frac{\partial\boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\cdot\nabla\psi-D_0\nabla c^{\varepsilon}\cdot\nabla\psi\Big)\,dxdt=-\int_{\Omega_f^{\varepsilon}}c_0(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x},0)dx \qquad (10)$$

для произвольной гладкой функции $\psi(\boldsymbol{x},t)$, равной нулю при $t=T$.

Здесь используется обозначение: $A:B\equiv tr(AB^T)$, где A и B – квадратные матрицы.

Верна следующая

Теорема 1. *Пусть*

$$0\leqslant c_0(\boldsymbol{x})\leqslant 1\,, \qquad (11)$$

$$\int_{\Omega_T}\Big|\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial t}\Big|^2dxdt\leqslant F^2\,,\quad \max_{\Omega_T}\boldsymbol{F}\leqslant F\,. \qquad (12)$$

Тогда задача (1)-(8) имеет хотя бы одно обобщенное решение и для него справедливы оценки:

$$\max_{0<t<T}\lambda_0\int_{\Omega}(1-\chi^{\varepsilon})|\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}^{\varepsilon})|^2dx+\int_{\Omega_T}\left(\mu_0\chi^{\varepsilon}\left|\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\Big)\right|^2+|p^{\varepsilon}|^2\right)dxdt\leqslant MF^2\,, \qquad (13)$$

$$\max_{0<t<T}\int_{\Omega_f^{\varepsilon}}|c^{\varepsilon}|^2dx+D_0\int_0^T\int_{\Omega_f^{\varepsilon}}|\nabla c^{\varepsilon}|^2dxdt\leqslant MF^2\,. \qquad (14)$$

3. Доказательство Теоремы 1

Для упрощения записи, если не оговорено противное, индекс ε опускаем.

Рассмотрим следующую вспомогательную начально-краевую задачу, состоящую из системы уравнений Стокса и системы уравнений Ламэ

$$\nabla\cdot\Big(\mu_0\chi\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}\Big)+\lambda_0(1-\chi)\mathbb{D}(x,\boldsymbol{u})-q\mathbb{I}\Big)+\chi\,\delta\,\varphi\,(c)\,\boldsymbol{F}=0\,, \tag{15}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0 \tag{16}$$

в области Ω при $t>0$, и конвективного уравнения диффузии

$$\frac{\partial c}{\partial t}=\nabla\cdot\left(D_0\nabla c-\varphi(c)\,\mathbb{M}^{(h)}\Big(\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}\Big)\right) \tag{17}$$

для концентрации примеси в области Ω_f при $t>0$.

Задача дополняется следующими начальными и граничными условиями

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)=0\quad\text{при}\,\boldsymbol{x}\in S\,; \tag{18}$$

$$\int_{\Omega}q\,dx=0\,, \tag{19}$$

$$D_0\frac{\partial c}{\partial\boldsymbol{n}}-\varphi(c)\,\mathbb{M}^{(h)}\Big(\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}\Big)\cdot\boldsymbol{n}=0\quad\text{при}\,\boldsymbol{x}\in\Gamma\,; \tag{20}$$

$$\chi\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},0)=0\quad\text{при}\ \boldsymbol{x}\in\Omega\,; \tag{21}$$

$$c(\boldsymbol{x},0)=c_0(\boldsymbol{x})\quad\text{при}\,\boldsymbol{x}\in\Omega_f\,, \tag{22}$$

где

$$\mathbb{M}^{(h)}(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t))=\frac{1}{h^4}\int_t^{t+h}d\tau\int_{R^3}\eta\left(\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}{h}\right)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y},\tau)\,d\boldsymbol{y}$$

– оператор сглаживания по переменным $\boldsymbol{x}$ и t и ядро усреднения $\eta(s)\in\mathbb{C}(R^3)$ – четная неотрицательная функция, $\eta(\boldsymbol{x})=0$, если $|\boldsymbol{x}|\geqslant 1$; $\int_{|\boldsymbol{x}|\leqslant 1}\eta(|\boldsymbol{x}|)\,ds=1$. Сглаженные функции являются гладкими, финитными и при $h\to 0$ сходится по норме $L_2(\Omega'_{T-\beta})$ в любой строго внутренней подобласти $\Omega'_{T-\beta}\subset\Omega_T$, $h\leqslant\beta$ (см. [1]).

Для решения задачи (15) – (22) воспользуемся теоремой Шаудера о неподвижной точке. А именно, фиксируем множество $\mathfrak{M}=\{\bar{c}(\boldsymbol{x},t)\in L_2(\Omega_f\times(0,T))\}$. Пусть $\boldsymbol{v}=\mathbb{E}_{\Omega_f}(\partial\boldsymbol{u}/\partial t)$ есть продолжение $\partial\boldsymbol{u}/\partial t$ из области Ω_f в Ω такое, что

$$\boldsymbol{v}=\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t},\quad\boldsymbol{x}\in\Omega_f,$$

$$\int_{\Omega}|\boldsymbol{v}|^2dx\le C\int_{\Omega_f}\Big|\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}\Big|^2dx,$$

$$\int_{\Omega}|\mathbb{D}(x,\boldsymbol{v})|^2dx\le C\int_{\Omega_f}\Big|\mathbb{D}(x,\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t})\Big|^2dx$$

с постоянной C не зависящей от ε.

В первую очередь решим задачу (15), (16), (18) (19), (21) с $\rho = \rho(\varphi(\bar{c}))$, где $\bar{c} \in \mathfrak{M}$. Полученное решение определяет оператор $\bar{\boldsymbol{u}} = \mathbb{A}(\bar{c})$, действующий из пространства $\mathfrak{M}$ в пространство $\mathfrak{N}$ с нормой

$$\|\boldsymbol{u}\|^2_{\mathfrak{N}} = \max_{0<t<T} \int_{\Omega} (1-\chi)|\mathbb{D}(x,\boldsymbol{u})|^2 dx + \int_{\Omega_T} \chi |\mathbb{D}(x, \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t})|^2 dxdt\,.$$

Вектор функции из $\mathfrak{N}$ так же удовлетворяют условиям

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = 0\,,\ \boldsymbol{x} \in S\,,$$

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},0) = 0\,,\ \boldsymbol{x} \in \Omega_f\,.$$

Легко показать, что справедливы следующие неравенства

$$\|\boldsymbol{u}\|^2_{2,\Omega_T} + \|\nabla \boldsymbol{u}\|^2_{2,\Omega_T} \leq C\|\boldsymbol{u}\|_{\mathfrak{N}}\,,$$

$$\left\|\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\right\|_{2,\,\Omega_f\times(0,T)} \leq C\|\boldsymbol{u}\|_{\mathfrak{N}}\,. \tag{23}$$

Подставляя $\bar{\boldsymbol{u}} = \mathbb{A}(\bar{c})$ в уравнение (17) приходим к следующей начально-краевой задаче об определении функции $c(\boldsymbol{x},t)$:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot \big(D_0 \nabla c - \varphi(c)\, \mathbb{M}^{(h)}(\bar{\boldsymbol{v}})\big)\,, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega_f\,, \quad t > 0\,, \tag{24}$$

$$D_0 \frac{\partial c}{\partial \boldsymbol{n}} - \varphi(c)\, \mathbb{M}^{(h)}(\bar{\boldsymbol{v}}) \cdot \boldsymbol{n} = 0\,,\ \boldsymbol{x} \in \Gamma\,, \tag{25}$$

$$c(\boldsymbol{x},0) = c_0(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x} \in \Omega_f\,, \tag{26}$$

которая определяет оператор на множестве $\mathfrak{N}$: $c = \mathbb{B}(\bar{\boldsymbol{u}})$. Полученная задача при каждом фиксированном $h > 0$, имеет единственное решение, для которого справедливо энергетическое неравенство

$$\max_{0<t<T} \int_{\Omega_f} |c|^2 dx + D_0 \int_0^T \int_{\Omega_f} |\nabla\, c|^2 dxdt \leqslant M \int_0^T \int_{\Omega_f} |\bar{\boldsymbol{v}}|^2 dxdt\,. \tag{27}$$

Здесь и всюду ниже через M обозначаем постоянные, не зависящие от ε и от параметра сглаживания h.

Суперпозиция

$$c = \mathbb{B} \circ \mathbb{A}(\bar{c}) = \Phi(\bar{c})$$

есть искомый оператор, неподвижные точки которого $c_h = \Phi(c_h)$ определяют решение задачи (15) – (22) $c = c_h$, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_h$, $q = q_h$.

Оценка (27) показывает, что оператор Φ переводит множество $\mathfrak{M}$ в себя:

$$\Phi\,:\ \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}\,.$$

Если мы докажем, что оператор Φ вполне непрерывен, то согласно теореме Шаудера он имеет неподвижную точку. Для этого воспользуемся следующими вспомогательными утверждениями.

Лемма 1. *В условиях Теоремы 1 для каждого фиксированного $\bar{c}(x,t) \in \mathfrak{M}$ задача (15), (16), (18) (19), (21) имеет единственное обобщенное решение $\bar{\boldsymbol{u}}$ и для него справедлива оценка:*

$$\max_{0<t<T} \lambda_0 \int_\Omega (1-\chi)|\mathbb{D}(x,\bar{\boldsymbol{u}})|^2 dx + \int_{\Omega_T} \left(\mu_0\chi\left|\mathbb{D}\left(x,\frac{\partial \bar{\boldsymbol{u}}}{\partial t}\right)\right|^2 + |\bar{q}|^2\right) dxdt \leqslant MF^2 . \tag{28}$$

$\square$ Доказательство существования единственного обобщенного решения задачи (15), (16), (18) (19), (21) и получение оценки (28) повторяет аналогичные доказательства в ([4]), ([5]). $\blacksquare$

Лемма 2. *Оператор $\mathbb{A}$ непрерывный.*

$\square$ Пусть

$$\bar{\boldsymbol{u}}_1 = \mathbb{A}(\bar{c}_1)\,,\ \bar{\boldsymbol{u}}_2 = \mathbb{A}(\bar{c}_2)\,,\ \bar{\boldsymbol{u}} = \bar{\boldsymbol{u}}_1 - \bar{\boldsymbol{u}}_2\,,$$
$$\bar{c} = \bar{c}_1 - \bar{c}_2\,,\ \bar{q} = \bar{q}_1 - \bar{q}_2\,,\ \overline{\varphi(c)} = \varphi(c_1) - \varphi(c_2)\,,$$
$$\bar{\boldsymbol{v}}_1 = \frac{\partial \bar{\boldsymbol{u}}_1}{\partial t}\,,\ \bar{\boldsymbol{v}}_2 = \frac{\partial \bar{\boldsymbol{u}}_2}{\partial t}\,,\ \bar{\boldsymbol{v}} = \bar{\boldsymbol{v}}_1 - \bar{\boldsymbol{v}}_2\,.$$

Тогда для разности $\bar{\boldsymbol{u}}$ имеем:

$$\nabla\cdot(\mu_0\chi\mathbb{D}(x,\bar{\boldsymbol{v}}) + \lambda_0(1-\chi)\mathbb{D}(x,\bar{\boldsymbol{u}}) - \bar{q}\mathbb{I}) = -\chi\delta\overline{\varphi(c)}\boldsymbol{F}\,,\quad \boldsymbol{x}\in\Omega\,,\quad t>0\,, \tag{29}$$

$$\nabla\cdot\bar{\boldsymbol{u}} = 0\,,\quad \boldsymbol{x}\in\Omega\,,\quad t>0\,,$$
$$\bar{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},t) = 0\,,\quad \boldsymbol{x}\in S\,,$$
$$\chi\bar{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},0) = 0\,,\quad \boldsymbol{x}\in\Omega\,,\quad \int_\Omega \bar{q}\,\boldsymbol{x} = 0\,.$$

Умножим уравнение (29) на функцию $\bar{\boldsymbol{v}}$ и проинтегрируем по области Ω

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \lambda_0(1-\chi)|\mathbb{D}(x,\bar{\boldsymbol{u}})|^2 dx + \int_\Omega \mu_0\chi|\mathbb{D}(x,\bar{\boldsymbol{v}})|^2 \leqslant |-\int_\Omega \chi\delta\overline{\varphi(c)}\boldsymbol{F}\cdot\bar{\boldsymbol{v}}dx| = I\,.$$

Функция $\varphi(c)$ является гладкой по определению и для нее справедлива терема Лагранжа, другими словами:

$$I \leqslant M_1 \int_\Omega \chi\delta|\bar{c}\boldsymbol{F}\cdot\bar{\boldsymbol{v}}|dx\,.$$

Применив к последнему последовательно неравенство Гельдера и неравенство Коши, получим

$$I \leqslant \left(\int_\Omega M_2\chi|\bar{c}\boldsymbol{F}|^2 dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega \chi|\bar{\boldsymbol{v}}|^2 dx\right)^{1/2} \leqslant \frac{M_2}{2\eta}\int_\Omega \chi|\bar{c}\boldsymbol{F}|^2 dx + \frac{\eta}{2}\int_\Omega \chi|\bar{\boldsymbol{v}}|^2 dx\,.$$

Оценим второе слагаемое, для этого вектор функцию $\bar{\boldsymbol{v}}$ продолжим из области Ω_f в Ω, как говорилось выше, с сохранением дифференциальных свойств. К продолженной функции применим последовательно неравенство Пуанкаре-Фридрихса, а затем неравенство Корна и воспользуемся свойством продолжения.

В итоге получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\lambda_0(1-\chi)|\mathbb{D}(x,\bar{\boldsymbol{u}})|^2dx+\frac{\mu_0}{2}\int_{\Omega}\chi|\mathbb{D}(x,\bar{\boldsymbol{v}})|^2dx\leqslant$$
$$\frac{M_2}{2\eta}\int_{\Omega_f}|\bar{c}|^2|\boldsymbol{F}|^2dx+\frac{C\eta}{2}\int_{\Omega}\chi|\mathbb{D}(x,\bar{\boldsymbol{v}})|^2dx\,.$$

Возьмем в качестве $\eta=\mu_0/2C$. Тогда

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\lambda_0(1-\chi)|\mathbb{D}(x,\bar{\boldsymbol{u}})|^2dx+\frac{\mu_0}{2}\int_{\Omega}\chi|\mathbb{D}(x,\bar{\boldsymbol{v}})|^2dx\leqslant M\int_{\Omega_f}|\bar{c}|^2|\boldsymbol{F}|^2dx\,. \tag{30}$$

Проинтегрировав (30) по t и учитывая условие (12), имеем

$$\max_{0<t<T}\int_{\Omega}\lambda_0(1-\chi)|\mathbb{D}(x,\bar{\boldsymbol{u}})|^2dx+\frac{\mu_0}{2}\int_{\Omega_T}\chi|\mathbb{D}(x,\bar{\boldsymbol{v}})|^2dx\leqslant MF^2\int_{\Omega_f}|\bar{c}|^2dx\,.$$

Окончательно, учитывая нормы пространств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, получим

$$\|\bar{\boldsymbol{u}}\|_{\mathfrak{N}}\leqslant MF^2\|\bar{c}\|_{\mathfrak{M}}\,,$$

что и означает непрерывность оператора $\mathbb{A}$. ■

Лемма 3. *Оператор $\mathbb{B}$ непрерывный.*

□ Пусть

$$c_1=\mathbb{B}(\bar{\boldsymbol{u}}_1)\,,\;c_2=\mathbb{B}(\bar{\boldsymbol{u}}_2)\,,\quad c=c_1-c_2,\;\bar{\boldsymbol{u}}=\bar{\boldsymbol{u}}_1-\bar{\boldsymbol{u}}_2\,;$$
$$\bar{\boldsymbol{w}}_1=\mathbb{M}^{(h)}\Big(\frac{\partial\bar{\boldsymbol{u}}_1}{\partial t}\Big),\quad \bar{\boldsymbol{w}}_2=\mathbb{M}^{(h)}\Big(\frac{\partial\bar{\boldsymbol{u}}_2}{\partial t}\Big),\quad \bar{\boldsymbol{w}}=\bar{\boldsymbol{w}}_1-\bar{\boldsymbol{w}}_2\,,\quad \overline{\varphi(c)}=\varphi(c_1)-\varphi(c_2)\,.$$

Тогда разность $c(\boldsymbol{x},t)$ является решением следующей начально-краевой задачи:

$$\frac{\partial c}{\partial t}-D_0\triangle c+\nabla\cdot\Big(\bar{\boldsymbol{w}}_1\,\overline{\varphi(c)}-\bar{\boldsymbol{w}}\,\varphi(c_2)\Big)=0\,,\quad \boldsymbol{x}\in\Omega_f\,,\quad t\in(0,T)\,; \tag{31}$$

$$D_0\frac{\partial c}{\partial\boldsymbol{n}}-\Big(\bar{\boldsymbol{w}}_1\,\overline{\varphi(c)}-\bar{\boldsymbol{w}}\,\varphi(c_2)\Big)\cdot\boldsymbol{n}=0\,,\;\boldsymbol{x}\in\Gamma\,,\quad t>0\,;$$
$$c(\boldsymbol{x},0)=0\,,\;\boldsymbol{x}\in\Omega_f\,.$$

Умножим (31) на $c(\boldsymbol{x},t)$ и проинтегрируем по области Ω_f, применяя формулу интегрирования по частям:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega_f}|c|^2dx+D_0\int_{\Omega_f}|\nabla c|^2dx=\int_{\Omega_f}\bar{\boldsymbol{w}}_1\cdot(\overline{\varphi(c)}\nabla c)dx+\int_{\Omega_f}\bar{\boldsymbol{w}}\cdot(\varphi(c_2)\nabla c)dx\,.$$

Функции $\varphi(c_2)$ и $\bar{\boldsymbol{w}}_1$ ограничены по построению. Оценим правую часть:

$$\int_{\Omega_f} \bar{\boldsymbol{w}}_1 \cdot (\overline{\varphi(c)}\nabla c)dx + \int_{\Omega_f} \bar{\boldsymbol{w}} \cdot (c_2\nabla c)dx \leqslant N_1\Big(\int_{\Omega_f}(c\nabla c)dx + \int_{\Omega_f} \bar{\boldsymbol{w}} \cdot \nabla c dx\Big)$$
$$\leqslant \frac{N_1}{2\eta}\Big(\int_{\Omega_f}|c|^2dx + \int_{\Omega_f}|\bar{\boldsymbol{w}}|^2dx\Big) + N_1\eta\int_{\Omega_f}|\nabla c|^2dx\,.$$

Взяв $\eta = D_0/2N_1$, получим следующее неравенство

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_f}|c|^2dx + D_0\int_{\Omega_f}|\nabla c|^2dx \leqslant N_2\left[\int_{\Omega_f}|\bar{\boldsymbol{w}}|^2dx + \int_{\Omega_f}|c|^2dx\right],$$

$$c(\boldsymbol{x},0) = 0\,.$$

Используя неравенство Гронуолла, окончательно имеем:

$$\int_{\Omega_f}|c|^2dx \leqslant N_3\int_0^T\int_{\Omega_f}|\bar{\boldsymbol{w}}|^2dxdt\,.$$

Последнее неравенство, учитывая неравенство (23), можно переписать следующим образом:

$$\|c\|_{\mathfrak{M}} \leqslant N\|\bar{\boldsymbol{u}}\|_{\mathfrak{N}}\,,$$

что и означает непрерывность оператора $\mathbb{B}$. ■

Лемма 4. *Оператор Φ вполне непрерывен.*

□ Оператор Φ является непрерывным, как суперпозиция непрерывных операторов. Из уравнения (20) следует, что взяв последовательность функций $\{\bar{c}^k(\boldsymbol{x},t)\}$, ограниченную, в норме множества $\mathfrak{M}$, получаем последовательность функций ограниченную в $L_\infty\big((0,T);L_2(\Omega_f)\big)\cap W_2^{1,0}(\Omega_f\times(0,T))$ с последовательностью производных по времени $\{\partial c^\varepsilon/\partial t\}$ ограниченной в $L_2\big((0,T);\,W_2^{-1}(\Omega_f)\big)$. Согласно теореме Аубина (см. ([2])) такая последовательность сходится сильно в $L_2(\Omega_f\times(0,T))$. Следовательно, оператор Φ является вполне непрерывным. ■

Так же легко показать, что множество $\mathfrak{M}$ является выпуклым.

Итак, существует неподвижная точка оператора Φ, обозначим ее как c_h,

$$c_h = \Phi(c_h)\,,$$

и пусть $\boldsymbol{u}_h = \mathbb{A}(c_h)$. Тогда c_h является решением следующей задачи:

$$\nabla\cdot\big(\mu_0\chi\mathbb{D}(x,\boldsymbol{v}_h) + \lambda_0(1-\chi)\mathbb{D}(x,\boldsymbol{u}_h) - q_h\mathbb{I}\big) + \chi\delta\varphi(c_h)\boldsymbol{F} = 0,\ \boldsymbol{x}\in\Omega\,,\ t>0\,; \tag{32}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}_h = 0\,,\quad \boldsymbol{x}\in\Omega\,,\quad t>0\,; \tag{33}$$

$$\frac{\partial c_h}{\partial t} = \nabla\cdot\big(D_0\nabla c_h - \varphi(c_h)\,\mathbb{M}^{(h)}(\boldsymbol{v}_h)\big)\,,\quad \boldsymbol{x}\in\Omega_f\,,\quad t\in(0,T)\,; \tag{34}$$

$$\boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x},t) = 0 \quad \text{при } \boldsymbol{x} \in S\,,\ t > 0\,; \tag{35}$$

$$\chi \boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x},0) = 0 \ \text{ при } \ \boldsymbol{x} \in \Omega\,; \tag{36}$$

$$\int_{\Omega} q_h\, dx = 0\,; \tag{37}$$

$$D_0 \frac{\partial c_h}{\partial \boldsymbol{n}} - \varphi(c_h)\,\mathbb{M}^{(h)}(\boldsymbol{v}_h)\cdot \boldsymbol{n} = 0 \ \text{ при } \ \boldsymbol{x} \in \Gamma\,; \tag{38}$$

$$c_h(\boldsymbol{x},0) = c_0(\boldsymbol{x}) \ \text{ при } \ \boldsymbol{x} \in \Omega_f\,, \tag{39}$$

где (34) понимается как интегральное тождество:

$$\int_0^T \int_{\Omega_f} \Big(c_h \,\frac{\partial \psi}{\partial t} + \varphi(c_h)\,\mathbb{M}^{(h)}(\boldsymbol{v}_h)\cdot \nabla\psi - D_0 \nabla c_h \cdot \nabla \psi \Big)\, dxdt = -\int_{\Omega_f} c_0 \psi(\boldsymbol{x},0) dx\,,$$

для произвольной гладкой функции $\psi(\boldsymbol{x},t)$, равной нулю при $t = T$.

Лемма 5. *Решение* ($\boldsymbol{w}$, p, c) *исходной задачи (1)-(8) есть предел при* $h \to 0$ *решений* ($\boldsymbol{u}_h$, q_h, c_h) *задачи (32)-(39).*

□ Умножим (32) на произвольную гладкую вектор-функцию $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x},t)$, равную нулю на границе S и при $t = T$, и проинтегрируем по области Ω_T

$$\int_{\Omega_T} (\mu_0 \chi \mathbb{D}(x,\boldsymbol{v}_h) : \mathbb{D}(x,\boldsymbol{\phi}) + \lambda_0 (1-\chi)\mathbb{D}(x,\boldsymbol{u}_h) : \mathbb{D}(x,\boldsymbol{\phi}) - q_h \nabla\cdot\boldsymbol{\phi})\, dx\, dt =$$
$$\int_{\Omega_T} \chi\delta\varphi\,(c_h)\, \boldsymbol{F}\cdot \boldsymbol{\phi} dxdt\,. \tag{40}$$

Пусть $h \to 0$. Легко видеть, что оценки (27)-(28) справедливы для всех h, с постоянными, не зависящими от h и ε.

Оценки (27), (28) позволяют из последовательностей $\{\boldsymbol{u}_h\}$, $\{q_h\}$ и $\{c_h\}$ выбрать подпоследовательности такие, что

$$\boldsymbol{u}_h \rightharpoonup \boldsymbol{w} \ \text{ слабо в } \ W_2^{1,1}(\Omega_f \times (0,T)) \bigcap W_2^{1,0}(\Omega_s \times (0,T))\,,$$

$$q_h \rightharpoonup p \quad \text{слабо в } \ L_2(\Omega_T)\,,$$

$$c_h \rightharpoonup c \ \text{ слабо в } \ W_2^{1,0}(\Omega_f \times (0,T))\,.$$

Более того, согласно теореме Аубина из [2]

$$c_h \to c \ \text{ сильно в } \ L_2(\Omega_f \times (0,T))\,.$$

В силу непрерывности функции φ, имеем

$$\varphi(c_h) \to \varphi(c) \ \text{ сильно в } \ L_2(\Omega_f \times (0,T))\,.$$

Переходя к пределу в неравенствах (27)-(28), получим требуемые в условии теоремы оценки.

В интегральном тождестве (40) предельный переход стандартный.

Аналогично поступим с уравнением (34), то есть умножим на произвольную гладкую функцию $\psi(\boldsymbol{x},t)$ равной нулю при $t=T$ и проинтегрируем по цилиндру $\Omega_f \times (0,T)$:

$$\int_0^T \int_{\Omega_f} \left(c_h \frac{\partial \psi}{\partial t} + \varphi(c_h)\,\mathbb{M}^{(h)}(\boldsymbol{v}_h) \cdot \nabla \psi - D_0 \nabla c_h \cdot \nabla \psi \right) dxdt = - \int_{\Omega_f} c_0 \psi(\boldsymbol{x},0) dx\,. \quad (41)$$

В слагаемых интегрального тождества (41) предельный переход стандартен. ■

Из доказанных лемм следует утверждение теоремы 1.

Литература

1. Adams R.E. Sobolev spaces / New York: Academic Press, 1975. – 268 p.
2. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / М.: Мир, 1972. – 587 с.
3. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического вида / М.: Мир, 1967. – 736 с.
4. Meirmanov A., Nguetseng's two-scale convergence method for filtration and seismic acoustic problems in elastic porous media // Siberian Mathematical Journal. – 2007. – 48. – P.519-538.
5. Meirmanov A., Homogenized models for filtration and for acoustic wave propagation in thermo-elastic porous media // Euro Journal of Applied Mathematics. – 2008. – 19. – P.259-284.
6. Meirmanov A., Zimin R. Mathematical models of a diffusion-convection in porous media // Submitted to Electronic Journal of Differential Equations. – 2012.

SOLVABILITY OF DIFFUSION AND CONVECTION PROBLEM IN POROUS-ELASTIC MEDIA AT MICROSCOPIC LEVEL

A.M. Meirmanov R.N. Zimin, O.V. Galtseva, O.A. Galtsev

Belgorod State University,
Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: reshat85@mail.ru

Abstract. The model describing the joint motion of incompressible viscous liquid and incompressible elastic skeleton is under consideration. It is assumed that liquid density depends on the admixture concentration. The system is completed by the diffusion- convection equation for the admixture in the liquid domain. Existence of weak solution of initial-boundary problem for the system in bounded domain is proved.

Key words: Stokes' and Lamé's equations, diffusion-convection equation.