УДК 517.983

ОБ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ АБСТРАКТНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА-ПУАССОНА-ДАРБУ

А.В. ГЛУШАК
О.А. ПОКРУЧИН

Белгородский государственный национальный исследовательский университет

e-mail:
Glushak@bsu.edu.ru
pokru4in.oleg@yandex.ru

Устанавливаются свойства решений задачи Коши для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу и доказано необходимое условие ее разрешимости.

Ключевые слова: абстрактная задача Коши, уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу, операторная функция Бесселя, необходимое условие разрешимости.

Пусть A – замкнутый оператор в банаховом пространстве Ес плотной в Еобластью определения D(A). При k>0 рассмотрим абстрактную задачу Коши для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу

$$u''(t)+\frac{k}{t}u'(t)=Au(t), \tag{1}$$

$$u(0)=u_0,\ u'(0)=0. \tag{2}$$

Определение 1.Решением уравнения (1) называется функция u(t), которая при t≥ 0 дважды сильно непрерывно дифференцируема, при t>0 принимает значения, принадлежащие D(A), то есть, $u(t)\in C^2\left(\overline{R}_+,E\right)\cap C\left(R_+,D(A)\right)$, и удовлетворяет уравнению (1).

Определение 2. Задача (1), (2) называется равномерно корректной, если существуют заданная на Екоммутирующая с Аоператорная функция $Y_k(t)$ и числа M≥ 1,ω ≥ 0, такие, что для любого $u_0\in D(A)$ функция $Y_k(t)u_0$ является ее единственным решением и при этом

$$\left\|Y_k(t)\right\|\le M\exp(\omega t),\ \left\|Y_k^{'}(t)u_0\right\|\le M\exp(\omega t)\left\|Au_0\right\|.$$

Функцию $Y_k(t)$ назовем операторной функцией Бесселя (ОФБ) задачи (1), (2), а множество операторов, для которых задача (1), (2) равномерно корректна, обозначим через G_k.

Теорема 1.Пусть задача (1), (2) равномерно корректна, $A\in G_k$, и $u_0\in D(A)$ Тогдаэта задача равномерно корректна и для m>k, то есть $A\in G_m$, при этом соответствующая ОФБ $Y_m(t)$ имеет вид

$$Y_m(t)u_0=\frac{2}{B(k/2+1/2,m/2-k/2)}\int_0^1(1-s^2)^{(m-k-2)/2}s^kY_k(ts)u_0ds,$$

где B(a, b) – бета-функция Эйлера.

Теорема 2. Если задача (1), (2) равномерно корректна и $\operatorname{Re}\lambda > \omega$, то $\lambda^2 \in \rho(A)$ и для любого $x \in E$ справедливо представление

$$\lambda^{(1-k)/2} R(\lambda^2)x = \frac{2^{(1-k)/2}}{\Gamma((k+1)/2)} \int_0^\infty K_\nu(\lambda t) t^{(k+1)/2} Y_k(t) x dt$$

Теорема 3. Пусть задача (1), (2) равномерно корректна и пусть $Y_k(t)$ – ОФБ дляэтой задачи. Тогда оператор Аявляется генератором C_0-полугруппы T(t) и для этойполугруппы справедливо представление

$$T(t)x = \frac{1}{2^k \Gamma((k+1)/2)} \int_0^\infty s^k \exp(-s^2/(4t)) Y_k(s) x ds, \quad x \in E.$$

Теорема 4. Если задача (1), (2) равномерно корректна и $\operatorname{Re}\lambda > \omega$, то λ^2 принадлежит резольвентному множеству ρ(A) оператора A, для дробной степени резольвентысправедливо представление

$$R^{1+k/2}(\lambda^2) = \frac{\sqrt{\pi}\, 2^{-k}}{\Gamma(k/2+1)\Gamma(k/2+1/2)\lambda} \int_0^\infty s^k \exp(-\lambda s) Y_k(s) ds,$$

и при этом выполняются оценки

$$\left\| \frac{d^n}{d\lambda^n} \left(\lambda R^{1+k/2}(\lambda^2) \right) \right\| \le \frac{\sqrt{\pi}\, 2^{-k} M \Gamma(k+n+1)}{\Gamma(k/2+1)\Gamma(k/2+1/2)(\operatorname{Re}-\omega)^{k+n+1}}, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

При исследовании проблемы разрешимости и доказательстве упомянутых выше теорем использовалась следующая литература.

Литература

1. Fattorini H.O. Ordinary differential equations in linear topological space, II. J. Different.Equat. 1969. 6. P.50–70.
2. Голдстейн Дж. Полугруппы линейных операторов и их приложения.Киев: Выща школа, 1989.
3. Васильев В.В., Крейн С.Г., Пискарев С.И. Полугруппы операторов, косинус-оператор функции и линейные дифференциальные уравнения // Итоги науки и техники. Серия Математический анализ. ВИНИТИ. 1990. 28. С.87–202.
4. Васильев В.В., Пискарев С.И. Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве II. Теория косинус оператор-функций // http://www.srcc.msu.su
5. Глушак А.В. Операторная функция Бесселя // ДАН.1997.Т. 352, №5. С.587–589.
6. Левитан Б.М. Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // УМН. 1951. Т. 1. №2(42). С.102–143.
7. BraggL.R. FundamentalsolutionsandpropertiesofsolutionsoftheinitialvalueradialEuler-Poisson-Darboux // J. Math. Mech. 1969. 18. P. 607 – 616.
8. Земанян А.Г. Интегральные преобразования обобщенных функций.М.: Наука, 1974.
9. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.
10. FattoriniH.O. Anoteonfractionalderivativesofsemigroupsandcosinefunctions // PacificJ. Math. 1983. V. 109. № 2. P. 335 – 347.
11. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука, 1986.

ABOUT RESOLVABILITY CONDITIONS OF THE CAUCHY PROBLEMFOR ABSTRACT EULER-POISSON-DARBOUX EQUATION

A.V. GLUSHAK
O.A. POKRUCHIN

Belgorod National Research University

e-mail:
Glushak@bsu.edu.ru
pokru4in.oleg@yandex.ru

Some properties of Cauchy's problem solutions of the Euler-Poisson-Darboux equation and also necessary condition of its solvability are proved.

Keywords: abstract Cauchy problem, Euler-Poisson-Darboux's equation, operational Bessel function, solvability necessary condition.