УДК 517.95

ОБ ОПТИМИЗАЦИОННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

М.Т. ДЖЕНАЛИЕВ
К.Б. ИМАНБЕРДИЕВ
К.А. АЙМЕНОВА

Институт математики, информатики и механики КН МОН РК, КазНУ им. аль-Фараби, Казахстан, г. Алматы

e-mail: muvasharkhan@gmail.com kanzharbek75ikb@gmail.com kakozhan@mail.ru

В ограниченной двумерной прямоугольной области рассматривается граничная задача для бигармонического уравнения. Изучаемая некорректная граничная задача сведена к задаче оптимального управления. В терминах сопряженной граничной задачи установлены условия оптимальности. Найден критерий сильной разрешимости некорректной граничной задачи.

Ключевые слова: бигармоническое уравнения, некорректность, оптимальное управление, функционал оптимальности, регуляризация по Тихонову.

1. Постановка задачи. В области $\Omega = \{x \in (0,2\pi), y \in (0,1)\}$ рассматривается граничная задача:

$$\Delta^2 u = f(x,y),\ \{x \in (0,2\pi),\ y \in (0,1)\} = Q, \qquad (1)$$

$$u^{(j)}(0,y) = u^{(j)}(2\pi, y),\ \ j = \overline{0,3}, \qquad (2)$$

$$u(x,0) = 0, u_y(x,0) = \varphi_1(x), u_{yy}(x,0) = 0, u_{yy}(x,1) = 0, \qquad (3)$$

$u(x,1) \in U_g$, – выпуклое замкнутое множество из $L_2(0,2\pi)$. (4)

Будем предполагать, что данные в задаче (1)–(3) удовлетворяют следующим условиям:

$$f \in L_2(\Omega),\ \varphi_1 \in L_2(0,2\pi). \qquad (5)$$

2. Задача оптимизации. Для решения этой задачи сформулируем в соответствие к задаче (1)–(3) следующую регуляризованную оптимизационную задачу:

$$\Delta^2 u = f(x,y), \qquad (6)$$

$$u^{(j)}(0,y) = u^{(j)}(2\pi, y),\ \ j = \overline{0,3}, \qquad (7)$$

$$u(x,0) = 0,\ u(x,1) = \psi(x),\ \ u_{yy}(x,0) = 0,\ \ u_{yy}(x,1) = 0, \qquad (8)$$

и функционал оптимальности:

$$J_\alpha(\psi) = \int_0^{2\pi} |u_y(x,0) - \varphi_1(x)|^2\, dx + \alpha \int_0^{2\pi} |\psi(x)|^2\, dx \to \min_{\psi \in U_g}. \qquad (9)$$

3. Условие оптимальности в терминах производной по направлению. Решение задачи (6)–(8), (9) обозначим:

$$\overline{\psi}(x) = \arg\min_{\psi \in U_g} J_\alpha(\psi).$$

Согласно результатом работы [3] справедливо следующее

Утверждение 1: $\overline{\psi}(x) \in U_g$ является функцией оптимального управления, только тогда, когда выполняется неравенство:

$$\left\langle J_{\alpha\psi}(\overline{\psi}), \psi - \overline{\psi} \right\rangle \ge 0,\ \ \forall \psi \in U_g \subset L_2(0,2\pi),$$

т.е. выполняется

$$\int_0^{2\pi}[u_y(x,0;\psi)-\varphi_1]u_{y\psi}(x,0;\overline{\psi})[\psi-\overline{\psi}]dx+\alpha\int_0^{2\pi}\overline{\psi}(x)[\psi-\overline{\psi}]dx\geq 0 \quad . \tag{10}$$

4. Сопряженная граничная задача. Введем сопряженную задачу:

$$\begin{cases}\Delta^2 w=0\\ w^{(j)}(0,y)=w^{(j)}(2\pi,y), \quad j=\overline{0,3}\\ w(x,0)=0,\ w(x,1)=0\\ w_{yy}(x,0)=u_y(x,0;\overline{\psi})-\varphi_1,\ \ w_{yy}(x,1)=0\end{cases} \quad , \tag{11}$$

и рассмотрим следующее выражение

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \Delta^2\tilde{u}(x,y)\overline{w(x,y)}dydx=0 \quad ,$$

где $\tilde{u}(x,y)=u(x,y;\psi)-u(x,y;\overline{\psi})$ и $\Delta^2\tilde{u}(x,y)=0$. Преобразуя это выражение, находим:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \Delta^2\tilde{u}(x,y)\overline{w(x,y)}dydx=-2\int_0^{2\pi}[\psi(x)-\overline{\psi}(x)\overline{w_{xxy}(x,1)}dx-$$

$$-\int_0^{2\pi}\tilde{u}_y(x,0)\overline{w_{yy}(x,0)}dx-\int_0^{2\pi}[\psi(x)-\overline{\psi}(x)]\overline{w_{yyy}(x,1)}dx=0. \tag{12}$$

5. Условия оптимальности. Используя равенство $w_{yy}(x,0)=u_y(x,0)-\varphi_1$, перепишем выражение (12) в виде:

$$-2\int_0^{2\pi}[\psi(x)-\overline{\psi(x)}]\overline{w_{xxy}(x,1)}dx-$$

$$-\int_0^{2\pi}\tilde{u}_y(x,0)\overline{[u_y(x,0;\overline{\psi})-\varphi_1]}dx-\int_0^{2\pi}[\psi(x)-\overline{\psi(x)}]\overline{w_{yyy}(x,1)}dx=0 \tag{13}$$

А из соотношений (13) и (10) придем к неравенству:

$$\int_0^{2\pi}[-2w_{xxy}(x,1)-w_{yyy}(x,1)+\alpha\overline{\psi}(x)]\overline{[\psi(x)-\overline{\psi}(x)]}dx\geq 0, \forall\psi\in U_g \quad . \tag{14}$$

Утверждение 2. Чтобы элемент $\overline{\psi}(x)$ был оптимальным решением в задаче (6)–(8) и (9), необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял граничным задачам (6)–(8), (11) и вариационному неравенству (14).

Теперь положим, что $U_g\equiv L_2(0,2\pi)$, т.е. ослабим условие (4). Так как для функций $\psi(x)$ нет ограничений кроме принадлежности ее пространству $L_2(0,2\pi)$.

В работе определяются оптимальные значения Фурье-коэффициентов $\psi(x),\ \ f(x,y)$ при $\alpha\to 0+$, а также критерий существования сильного решения исходной задачи (1)–(3) в терминах коэффициентов Фурье для заданных функций $\varphi_1(x),\ \ f(x,y)$.

Литература

1. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978, 352 с.
2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979, 142 с.
3. Лионс Ж.Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями частными производными. М.: Мир, 1972.
4. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966, 444 с.

ABOUT OPTIMIZATION METAD OF SOLUTION INCORRECTNESS PROBLEM FOR BIHARMONIC EQUATION

M.T. JENALIYEV
K.B. IMANBERDIYEV K.A. AIMENOVA

Institute mathematics, informatics and mechanics SK MES RK, KazNU after by Al-Farabi, Kazakhstan, Almaty

e-mail:
muvasharkhan@gmail.com kanzhar- bek75ikb@gmail.com kako- zhan@mail.ru

There is boundary problem in limited two-dimensional rectangular are a for the biharmonic equation in the thesis. The studied incorrect boundary problem is reduced to a problem of optimum control. In solu- tion terms of the interfaced boundary problem optimality conditions are established. And the criterion of a strong incorrect boundary problem is found.

Keywords: the biharmonic equation, incorrectness, optimum con- trol, optimality functional, regularization according to Tikhonov.