УДК 004.932

ГРАДИЕНТНАЯ ОБРАБОТКА ИЗОБРАЖЕНИЙ НА ОСНОВЕ ВАРИАЦИОННОГО МЕТОДА ОЦЕНКИ ПРОИЗВОДНЫХ

Т.Н. БАЛАБАНОВА
И.И. ЧИЖОВ
В.А. ГОЛОЩАПОВА
Т.С. СТЕЦЮК

Белгородский государственный национальный исследовательский университет

e-mail: sozonova@bsu.edu.ru

В работе изложен новый метод вычисления производных сигнала по его дискретным значениям, основанный на частотных представлениях. А так же применение данного метода для градиентной обработки цифровых изображений с целью повышения их четкости.

Ключевые слова: дифференцирование, четкость изображения, частотные представления, вариационный принцип.

В настоящее время изображения хранятся и используются в цифровом виде. При этом достаточно часто возникает такая проблема, как недостаточная четкость изображений. Ведь изображение визуально несет человеку некую информацию, а если при съемке на качество снимка повлиял некий сбой аппаратуры, то при этом будет потеряна часть информации, даже иногда очень важная для жизни (рентгеновские и УЗИ снимки).

Одной из задач повышения визуального качества изображения является восстановление его четкости и резкости после увеличения в размерах для более подробного рассмотрения границ объектов и мелких деталей. Такие вопросы обработки изображений востребованы как в науке, медицине, так и в технике. Ярким примером являются космоснимки, которые помогают при формировании карт земной поверхности, при наблюдении за различными объектами в тех случаях, когда технические средства не могут предоставить изображения достаточно большого формата.

В таких случаях для увеличения размеров изображения используются различные методы интерполяции, наиболее распространенным среди которых является метод интерполяции кубическими сплайнами.

Масштабированное изображение не всегда обладает необходимой для его дальнейшего использования четкостью. Как правило, при увеличении изображений границы объектов становятся размытыми, мелкие детали снимка приобретают больший размер, но, в тоже время, не всегда их контуры являются четкими. Поэтому возникает необходимость повысить визуальное качество масштабированных изображений, используя градиентную обработку, которая заключается в комплексировании изображения с его оценками производных.

Для повышения четкости изображений наиболее часто применяют пространственные методы, основанные на взятии градиента и лапласиана, первой и второй производной соответственно, операторы Робертсома и Собеля. Каждый из методов дает неоднозначные результаты. Так как если взять любительское фото, космоснимок, рентгеновский и УЗИ снимки, то лапласиан справится с поставленной задачей немного лучше, чем все остальные. Хотя оператор Собеля очень хорошо делает оконтуривание объектов, тем самым придавая изображению большую четкость. Но если на снимке будет присутствовать шум, то Собель ухудшит изображение в несколько раз. Поэтому недостаток градиентных методов, особенно он просматривается на масштабируемых изображениях, это чувствительность к воздействиям так называемых шумов измерений, что приводит к неустойчивостям получаемых оценок производных.

Таким образом, возникает необходимость разработки иных методов интерполяции и численного дифференцирования дискретных двумерных сигналов, к которым можно отнести цифровые изображения.

В данной работе предлагается иной подход к интерполяции и численному дифференцированию цифровых изображений. Основой таких методов является использование принципа минимизации евклидовых норм оценок первых производных из класса функций с финитными областями трансформант Фурье, при дополнительных условиях совпадения соответствующих определённых интегралов (формула Ньютона- Лейбница) с разностями зарегистрированных значений исходной функции. Использование таких принципов позволяет получить устойчивые оценки производных, осуществлять интерполяцию сигналов и использовать разработанные методы для масштабирования и увеличения четкости изображений.

Предлагаемый метод основан на использовании известной из математического анализа формулы, позволяющей выразить дифференцируемую функцию через производную (обозначения очевидны):

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(x)dx, t > t_0.$$

Понятно, что при известном начальном значении и известном способе вычисления производной искомая функция также может быть вычислена с любой заранее оговоренной точностью.

Пусть задан вектор $\vec{u} = (u_0, u_1, ..., u_N)^T$ отсчётов дискретного сигнала, где $u_i = u(i\Delta t), i = 1,...,N$, Δt – интервал дискретизации.

Обозначим $\vec{v} = (v_1, ..., v_N)^T$, где

$$v_i = u_i - u_{i-1}, i = 1,...,N \tag{1}$$

Введём частотные интервалы:

$$\Omega = (-\Omega_2, -\Omega_1) \cup [\Omega_1, \Omega_2) \tag{2}$$

$$\overline{\Omega} = [-\overline{\Omega}_2, -\overline{\Omega}_1) \cup [\overline{\Omega}_1, \overline{\Omega}_2)$$

$$\overline{\Omega}_1 = \Delta t * \Omega_1 = q_1 * \pi; \overline{\Omega}_2 = \Delta t * \Omega_2 = q_2 * \pi \tag{3}$$

В основе дальнейших построений используется представление интерполирующей функций через производную

$$\hat{u}(t) = u_{i-1} + \int_{(i-1)\Delta t}^{t} f(\tau)d\tau \tag{4}$$

для $\Delta t(i-1) \le t \le i\Delta t$.

Тогда для первых разностей исходных данных должно выполняться равенство:

$$v_i = u_i - u_{i-1} = \int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} f(\tau)d\tau \tag{5}$$

$f(\tau)$ - первая производная интерполирующей функции, которая является оценкой первой производной неизвестной функции $u(t)$, выборка из которой обрабатывается.

Для достижения устойчивости оценки первой производной используем представление

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega \in \Omega} F(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega, \tag{6}$$

где $F(\omega)$ – трансформанта Фурье

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

В качестве области определения трансформанты Фурье предлагается использовать частотный интервал, в котором сосредоточена основная доля энергии сигнала.

Соотношение для интерполирующей функции на основе трансформанты Фурье производной можно получить путем подстановки представления (6) в правую часть (4).

$$\widehat{u}(t) = u_{i-1} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\omega\in\Omega} F(\omega)(\exp(j\omega t) - \exp(j\omega\Delta t(i-1)))d\omega / j\omega, \tag{7}$$

так что интерполирующие равенства представимы в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\omega\in\Omega} F(\omega)\frac{\sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)}{\omega\Delta t/2}\exp(j\omega\Delta t(i-0{,}5))d\omega = v_i/\Delta t, \tag{8}$$

Ясно, что такие интерполирующие функции тоже относятся к классу целых. Вместе с тем имеется возможность использовать дополнительные ограничения.

Можно привести достаточно много аргументов использования вариационного принципа

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^2(\tau)d\tau = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\omega\in\Omega}\left|F(\omega)\right|^2 d\omega = \min,$$

Один из аргументов заключается в целесообразности построения функции с наименьшей в смысле евклидовой нормы производной скорости изменения значений.

Другим важным соображением может служить необходимость повышения устойчивости вычислений к воздействиям случайных ошибок измерений (регуляризация).

Искомое решение вариационной задачи (8), (7) представимо в виде

$$F(\omega) \equiv \sum_{i=1}^{N}\beta_i\frac{\sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)}{\omega\Delta t/2}\exp(-j\omega\Delta t(i-0{,}5)), \tag{9}$$

когда $\omega\in\Omega$, и $F(\omega)\equiv 0$ в противном случае.

Общую формулу для вычисления оценки производной получаем при подстановке последнего представления в соотношение (6)

$$f(\tau) = \sum_{k=1}^{N}\beta_k * \frac{1}{\pi}\int\limits_{\overline{\Omega}_1}^{\overline{\Omega}_2}\frac{\sin(x/2)}{(x/2)}\cos(x(\frac{\tau}{\Delta t} - k + 0.5))dx \tag{10}$$

Коэффициенты β должны удовлетворять системе уравнений (8), на основании чего получаем

$$A\vec{\beta} = \vec{v}\,,$$

где $A = \{a_{ik}\}$ – матрица учета исходных данных (УИД), элементы которой определяются из соотношения

$$a_{ik} = \frac{\Delta t}{\pi}\int\limits_{\overline{\Omega}_1}^{\overline{\Omega}_2}\frac{\sin^2(x/2)}{(x/2)^2}\cos(x(i-k))dx; i,k = 1,\ldots,N \tag{11}$$

В общем случае матрица УИД может быть особенной, так что для нахождения коэффициентов β необходимо использовать псевдообращение

$$\vec{\beta} = A^{++}\vec{v} \tag{12}$$

$$A^{++} = G_1 L_1^{-1} G_2^T \ , \tag{13}$$

где G – матрица собственных векторов.

$$AG = GL \ ; G = (\vec{q}_1, ..., \vec{q}_N)$$
$$L = diag(\lambda_1, ..., \lambda_N);$$
$$L_1 = diag(\lambda_1, ..., \lambda_P), \tag{14}$$

если

$$\lambda_{P+1} \cong \lambda_{P+2} \cong ... \cong \lambda_N \cong 0, \tag{15}$$

где Р- оценка ранга матрицы УИД.

$$G = (\vec{q}_1, ..., \vec{q}_P) \tag{16}$$

Если заранее выбрать точки в виде

$$\tau_i = (i - 0.5)\Delta t, i = 1, ..., N, \tag{17}$$

области определения, где необходимо вычислять оценку производной то из (10) получим

$$f_i = f(\tau_i) = \sum_{k=1}^{N} \beta_k \frac{1}{\pi} \int_{\bar{\Omega}_1}^{\bar{\Omega}_2} \frac{\sin(x/2)}{(x/2)} \cos(x(i-k))dx. \tag{18}$$

Или для вектора $\vec{f} = (f_1, ..., f_N)^T, f_i = f(\tau_i)$,

$$\vec{f} = B_1 A^{++} \vec{v}. \tag{19}$$

где $B_1 = \{b_{ik}^1\}$,

$$b_{ik}^1 = \frac{1}{\pi} \int_{\bar{\Omega}_1}^{\bar{\Omega}_2} \frac{\sin(x/2)}{(x/2)} \cos(x(i-k))dx \tag{20}.$$

Старшие производные в тех же точках вычисляются на основе дифференцирования выражения (10)

$$\frac{df(\tau)}{d\tau} = \hat{u}^{(2)}(\tau) = -\sum \beta_k \frac{1}{\pi \Delta t} \int_{\bar{\Omega}_1}^{\bar{\Omega}_2} \frac{\sin(x/2)}{(x/2)} x \sin(x(\frac{\tau}{\Delta t} - k + 0.5))dx. \tag{21}$$

В тех же точках области определения получим

$$B_2 = \{b_{ik}^1\} : b_{ik}^2 = -\frac{1}{\pi \Delta t} \int_{\bar{\Omega}_1}^{\bar{\Omega}_2} \frac{\sin(x/2)}{(x/2)} x \sin(x(i-k))dx. \tag{22}$$

Вектор оценок вторых производных вычисляется на основе соотношения

$$\vec{f}^{(1)} = (f_1^{(1)}, ..., f_N^{(1)})^T = B_2 A^{++} \vec{v} = B_2 \vec{\beta}. \tag{23}$$

В рамках данной работы предлагается использовать новый вариационный метод оценки производных для повышения четкости масштабированных изображений.

За исходные данные были взяты изображения небольшого размера N×M (N, M от 100 до 200 пикселей), в оттенках серого, полученные с помощью цифровой техники. Выбор изображений, содержащих оттенки серого, обусловлен более простотой реализацией алгоритма для данного вида изображений. При повышении четкости цветных изображений подвергается обработке цветовая модель RGB и YCbCr.

На первом этапе эксперимента проводилось увеличение размера изображения при помощи вариационного алгоритма интерполяции в К=2, 3, 5 раз [1]. В результате чего изображение получало большие размеры, однако контуры объектов на масштабированном изображении оказывались нечеткими.

На втором этапе эксперимента осуществлялось повышение четкости масштабированного изображения:

Осуществлялось вычисление матриц $B_x = \{b_{ki}\};\ k = 1,\dots,N;\ i = 1,\dots,N$ и $B_y = \{b_{ki}\};\ k = 1,\dots,M;\ i = 1,\dots,M$ с элементами вида (20) и осуществлялось вычисление второй смешанной производной по выражению

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = B_x A^{-1} \cdot f \cdot B_y A^{-1}$$

где $A_y = \{a_{ij}\}$ – матрица с элементами вида (11),

f – исходное изображение.

Затем к исходному изображению добавлялось значение второй смешанной производной, то есть

$$\hat{f} = f + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

что позволило получить более четкие, в смысле субъективного восприятия, изображения. Результаты эксперимента представлены на рис. 1 – 5.

Рис. 1. Исходное изображение

а)

б)

Рис. 2. Масштабированное изображение (а)
и изображение после градиентной обработки (б)

Рис. 3. Исходное изображение

Рис. 4. Масштабированное изображение

Рис. 5. Масштабированное изображение с повышенной четкостью

Результаты экспериментов показали, что применяя предлагаемый метод повышения визуального качества масштабируемых изображений, в частности повышение четкости цифровых снимков, четко наблюдаются границы перехода от одного объекта к другому. Особенно, нужно отметить, что мелкие объекты и детали на масштабируемых изображениях стали четко просматриваться.

Исследования выполнены при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 – 2013 годы, гос. контракт № 14.740.11.0390.

Литература

1. Жиляков Е.Г. Вариационный метод оценивания производных и интерполяции сигналов по эмпирическим данным / Т.Н. Созонова, И.Ю. Мисливец// «Вестник ВГУ», сер. Системный анализ и информационные технологии, 2006, №2, с. 70-73.

2. К. Де Бор Практическое руководство по сплайнам [Текст]: – М.: Радио и связь, 1985.-304 с.

3. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа [Текст] : справ. рук. / К. Ланцош ; пер. с англ. М. З. Кайнера. – М. : Физматгиз, 1961. – 524 с.

4. Созонова Т.Н. Применение вариационных алгоритмов интерполяции и оценки первой производной для некоторых аспектов обработки изображений [Текст]/ Т.Н. Созонова, Н.С. Титова, Н.В. Щербинина // Научные ведомости БелГУ. Сер. История. Политология. Экономика. Информатика. – 2008. – № 10 (50). Вып. 8/1. – С. 4 – 12.

5. Хургин Я. И. Финитные функции в физике и технике [Текст] / Я. И. Хургин, В. П. Яковлев. – М. : Наука, 1971. – 408 с. : ил.

GRADIENT IMAGE PROCESSING BASED ON THE VARIATIONAL METHOD OF DERIVATIVE ESTIMATION

T.N. BALABANOVA
I.I. CHIZHOV
V.A. GOLOSHAPOVA
T.S. STECUK

Belgorod National Research University

e-mail: sozonova@bsu.edu.ru

The paper describes a new method for signal derivatives calculation from its discrete values, based on frequency representations. An application of the method to gradient processing of digital images aimed at increasing sharpness is covered.

Key words: differentiation, image sharpness, frequency representations, variational principle.