MSC 34B37

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НЕСАМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С СИНГУЛЯРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

А.О. Щербаков

Воронежский Государственный Университет,
пл. Университетская, 1,.Воронеж, 394006, Россия, e-mail: a.o.shcherbakov@gmail.com

Аннотация. Изучаются операторы Штурма-Лиувилля S_θ, $\theta \in [0,1]$, порожденные на промежутке $[0,\omega]$ дифференциальным выражением $l(y) = -y'' + vy$ и краевыми условиями $y(\omega) = e^{i\pi\theta}y(0)$, $y'(\omega) = e^{i\pi\theta}y'(0)$, $\theta \in [0,1]$. Потенциал v есть распределение первого порядка такое, что $v = q' + C$ для $q \in L^2[0,\omega]$ и $C \in \mathbb{C}$. Для исследования спектральных свойств данного оператора применяется метод подобных операторов. Получены результаты об асимптотике спектра, базисности собственных и присоединенных функций, оценки равносходимости спектральных разложений. Доказано, что изучаемый оператор (взятый со знаком минус) является генератором аналитической полугруппы операторов. Получено ее асимптотическое представление.

Ключевые слова: оператор Штурма-Лиувилля, сингулярный потенциал, спектр оператора, асимптотика спектра, спектральные разложения, оценки проекторов, аналитическая полугруппа операторов, метод подобных операторов.

1. Определение оператора. Работа посвящена изучению несамосопряженного оператора Штурма-Лиувилля S_θ, $\theta \in [0,1]$, порожденного на промежутке $[0,\omega]$ дифференциальным выражением

$$l(y) = -y'' + vy\,, \tag{1}$$

с сингулярным потенциалом v, принадлежащим пространству $W_2^{-1}[0,\omega]$, и краевыми условиями

$$y(\omega) = e^{i\pi\theta}y(0), \quad y'(\omega) = e^{i\pi\theta}y'(0)\,, \qquad \theta \in [0,1]\,.$$

Если $v = 0$ (нулевой потенциал), то соответствующий оператор обозначается символом S_θ^0. Он обычно играет роль невозмущенного оператора при изучении оператора S_θ с потенциалом $v \in L^2[0,\omega]$ (см. статьи [1], [2] и имеющиеся там ссылки).

Оператор умножения на сингулярный комплексный потенциал v не является подчиненным оператору S_θ^0, и, в связи с этим, возникают проблемы применения регулярной теории возмущений линейных операторов ([3]). В статье А.М. Савчука и А.А. Шкаликова [4] было дано корректное определение оператора Штурма-Лиувилля в пространстве $L^2[0,\omega]$ со скалярным произведением $(x,y) = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega x(t)\overline{y(t)}\,dt$, $x, y \in L^2[0,\omega]$, в случае сингулярного потенциала $v \in W_2^{-1}[0,\omega]$, представимого в виде

$$v = q' + C\,, \qquad q \in L^2[0,\omega]\,. \tag{2}$$

Так как сдвиг потенциала на постоянную сдвигает спектр на ту же постоянную, то для удобства положим $C = 0$ и $q_0 = 0$. В статье [4] была введена в рассмотрение квазипроизводная

$$y^{[1]} = y' - qy\,,$$

и дифференциальное выражение (1) переписывалось в виде

$$l(y) = -(y^{[1]})' - qy^{[1]} - q^2 y \,. \tag{3}$$

Определим операторы S_θ, $\theta \in [0,1]$, следуя [4], как операторы, порождаемые дифференциальным выражением (3):

$$S_\theta y = l(y)\,, \qquad y \in D(L_\theta)\,, \tag{4}$$

с областью определения

$$D(L_\theta) = \{y \in L^2[0,\omega] : y, y^{[1]} \in W_1^1[0,\omega],\ l(y) \in L^2[0,\omega],$$
$$y(\omega) = e^{i\pi\theta} y(0),\ y'(\omega) = e^{i\pi\theta} y'(0)\}\,,$$

где $W_1^1[0,\omega]$ — банахово пространство абсолютно непрерывных на $[0,\omega]$ комплексных функций.

Изучение оператора Штурма-Лиувилля с сингулярным потенциалом с введенными выше краевыми условиями представляет особый интерес. В работе П. Джакова, Б. Митягина [5] показано, что для изучения спектральных свойств оператора Шредингера S с периодическим потенциалом $v = q' + C$ из $H^{-1}_{loc,\omega}(\mathbb{R})$, $q \in L^2_{loc,\omega}(\mathbb{R})$, определяемого в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ дифференциальным выражением $l(y)$ (формула (3)) и областью определения $D(S) = \{y \in W^1_{1,loc}(\mathbb{R}) : y^{[1]} \in W^1_{1,loc}(\mathbb{R}),\ l(y) \in L^2(\mathbb{R})\}$, достаточно изучить спектральные свойства введенного с помощью формулы (4) семейства операторов S_θ в пространстве $L^2[0,\omega]$. А именно, оператор S есть замкнутый оператор с всюду плотной областью определения в $L^2(\mathbb{R})$ и непрерывным спектром. Операторы S_θ также являются замкнутыми и имеют всюду плотную область определения в $L^2[0,\omega]$. Спектр операторов S_θ дискретен, и непрерывный спектр оператора S представим в виде объединения по всем $\theta \in [0,1]$ дискретных спектров операторов S_θ: $\sigma(S) = \bigcup_{\theta\in[0,1]} \sigma(S_\theta)$.

Изучению оператора Шредингера с сингулярным потенциалом посвящен целый ряд известных работ. В частности, заслуживают внимания исследования А.М. Савчука, А.А. Шкаликова [4], [6], П. Джакова, Б. Митягина [5], [7], [8], Р.О. Гринива, Я.В. Микитюка [9], [10], И.В. Садовничей [11], Т. Каппелера, С. Мора [12].

В силу того, что функции из $L^1[0,\omega]$ представимы в виде $q' + C$, где $q \in W_1^1[0,\omega]$, в класс рассматриваемых операторов также попадают операторы с потенциалом из пространства $L^1[0,\omega]$. Таким образом, все результаты, излагаемые в настоящей статье, справедливы и для оператора $S_\theta y = -y'' + vy$, $v \in L^1[0,\omega]$, $y(\omega) = e^{i\pi\theta} y(0)$, $y'(\omega) = e^{i\pi\theta} y'(0)$, $\theta \in [0,1]$. Среди работ, посвященных исследованию операторов такого вида, следует отметить работы О.А. Велиева [13]- [15].

Для исследования спектральных свойств операторов S_θ будем использовать метод подобных операторов, разработанный А.Г. Баскаковым [16]- [24]. Суть этого метода состоит в преобразовании подобия исследуемого (возмущенного) оператора в оператор, спектральные свойства которого близки к спектральным свойствам невозмущенного оператора. Тем самым существенно упрощается изучение исследуемого оператора.

Для доказательства полученных результатов использовалась схема, подобная используемой в [24] для исследования спектральных свойств оператора Дирака.

Так как функция $q^2 \in L^1[0,\omega]$, то она представима в виде

$$q^2 = p' + \widetilde{C}\,, \qquad p \in W_1^1[0,\omega]\,. \tag{5}$$

Ввиду того, что сдвиг потенциала на постоянную сдвигает спектр на ту же постоянную, положим $\widetilde{C} = 0$ и $p_0 = 0$. Для применения метода удобно преобразовать исходный оператор (4), задаваемый с помощью квазипроизводных, в подобный ему оператор L_θ, определяемый с помощью классических производных:

$$L_\theta y = -y'' + wy' + uy\,, \quad w = 2(p-q)\,, \quad u = (2pq - p^2), \quad y \in D(L_\theta)\,, \tag{6}$$

$$D(L_\theta) = \{y \in W_2^2[0,\omega] : y(\omega) = e^{i\pi\theta}y(0)\,,\ y'(\omega) = e^{i\pi\theta}y'(0)\}, \quad w, u \in L^2[0,\omega]\,.$$

Таким образом, для изучения спектральных свойств операторов S_θ достаточно изучить спектральные свойства операторов L_θ, $\theta \in [0,1]$.

Оператор L_θ в дальнейшем будем рассматривать в виде $A - B : D(L_\theta) \subset L^2[0,\omega] \to L^2[0,\omega]$, где $B = B_1 + B_2$, B_2 — оператор умножения на потенциал $u = 2pq - p^2 \in L^2[0,\omega]$, B_1 — оператор умножения производной на потенциал $w = 2(p-q) \in L^2[0,\omega]$, а $A = L_\theta^0$ — невозмущенный (свободный) оператор Штурма-Лиувилля.

Оператор $A = L_\theta^0 = S_\theta^0$, $\theta \in [0,1]$, является самосопряженным оператором с компактной резольвентой и собственными значениями

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi}{\omega}(2n+\theta)\right)^2, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{7}$$

Соответствующий ортонормированный базис из собственных функций имеет вид

$$e_n(t) = e^{i\frac{\pi}{\omega}(2n+\theta)t}\,, \quad t \in [0,\omega]\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,. \tag{8}$$

При этом для периодических краевых условий (для операторов $L_{per}^0 = L_0^0$, $\theta = 0$) все его собственные значения двукратны за исключением числа $\lambda_0 = 0$. Для антипериодических краевых условий (для оператора $L_{ap}^0 = L_1^0$, $\theta = 1$) все собственные значения двукратны, а при остальных $\theta \neq 0$, $\theta \neq 1$ — однократны.

Символом $\mathbb{J}$ будем обозначать одно из следующих множеств:

$$\mathbb{J} = \begin{cases} \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}\bigcup\{0\}, & \theta = 0, \theta = 1, \\ \mathbb{Z}, & \theta \in (0,1). \end{cases}$$

Пусть e_n^1, e_n^2 — функции вида $e_n^1(t) = e_n(t)$, $e_n^2(t) = e_n(-t)$, $t \in [0,\omega]$, $n \in \mathbb{N}$. Через P_n, $n \in \mathbb{J}$, обозначим проекторы Рисса построенные по оператору S_θ^0 и множествам $\{\lambda_n\}$. Данные проекторы имеют следующий вид:

$$\begin{gathered} P_n x = (x, e_n^1)e_n^1 + (x, e_n^2)e_n^2\,, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad P_0 x = (x, e_0)e_0, \quad \theta = 0, \\ P_n x = (x, e_n)e_n\,, \qquad n \in \mathbb{Z}, \quad \theta \in (0,1), \\ P_n x = (x, e_n^1)e_n^1 + (x, e_n^2)e_n^2\,, \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \quad \theta = 1. \end{gathered} \tag{9}$$

2. Полученные результаты. Пусть $\mathfrak{X}$ — комплексное банахово пространство, $End\,\mathfrak{X}$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathfrak{X}$.

Определение. *Два линейных оператора* $A_i : D(A_i) \subset \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$, $i = 1, 2$, *называются подобными, если существует непрерывно обратимый оператор* $U \in \mathrm{End}\,\mathfrak{X}$ *такой, что* $UD(A_2) = D(A_1)$ *и* $A_1Ux = UA_2x$, $x \in D(A_2)$. *Оператор* U *называется* оператором преобразования *оператора* A_1 *в* A_2.

Теорема 1. *Исходный оператор Шредингера* S_θ *вида* (4), *задаваемый с помощью квазидифференциального выражения, подобен оператору* L_θ *вида* (6), *определяемому с помощью классических производных.*

Теорема 2. *Оператор* $L_\theta = A - B$ *подобен оператору вида* $A - \widetilde{B}$, *где оператор* $\widetilde{B}$ *представим в виде* $\widetilde{B} = \widetilde{B}_2(A^{\frac{1}{2}} + \mu_0 I)$, $\mu_0 \in \rho(A^{\frac{1}{2}})$, *а* $\widetilde{B}_2$ — *оператор Гильберта-Шмидта.*

Пусть $P_{(m)}$, P_n, $n \in \mathbb{J}$, — спектральные проекторы Рисса, построенные по оператору S_θ^0 и множествам $\sigma_m^0 = \{\lambda_j : |j| \le m\}$ и $\{\lambda_n\}$ соответственно (см. (9)).

Теорема 3. *Найдется такое число* $k \in \mathbb{Z}_+$, *что оператор* $L_\theta = A - B$ *подобен оператору, являющемуся прямой суммой операторов конечного ранга, а именно* $A - P_{(k)}\widetilde{X}P_{(k)} - \sum\limits_{\substack{n\in\mathbb{J}\\ |n|\ge k+1}} P_n\widetilde{X}P_n$, *где оператор* $\widetilde{X}$ *представим в виде* $\widetilde{X} = \widetilde{X}_2(A^{\frac{1}{2}} + \mu_0 I)$, $\widetilde{X}_2$ — *оператор Гильберта-Шмидта, а* $\mu_0 \in \rho(A^{\frac{1}{2}})$. *Оператор* $\widetilde{X}$ *является решением основного (нелинейного) уравнения метода подобных операторов (см. формулу (5) из [24]).*

Далее через u_0 будем обозначать нулевой коэффициент Фурье функции $u = 2pq - p^2$ (см. формулы (2), (5)).

Теорема 4. *Существует такое число* $m \in \mathbb{Z}_+$, *что спектр оператора* S_θ *представим в виде объединения*

$$\sigma(S_\theta) = \sigma_0 \bigcup \left(\bigcup_{\substack{n\in\mathbb{J}\\ |n|\ge m+1}} \sigma_n \right) \tag{10}$$

взаимно непересекающихся множеств σ_0, σ_n, $n \in \mathbb{J}$, $|n| \ge m+1$, *где* σ_0 *конечное множество, а элементы множества* σ_n *имеют вид*

$$\left(\frac{\pi}{\omega}(2n+\theta)\right)^2 + u_0 n + n\alpha_n, \tag{11}$$

где $\alpha_n \in l^2$, *то есть суммируема с квадратом. Множества* σ_n *двухточечны для* $\theta = 0$ *и* $\theta = 1$ *и одноточечны для остальных* $\theta \in (0,1)$.

Пусть $\widetilde{P}_{(m)}$, $\widetilde{P}_n$, $n \in \mathbb{J}$, $|n| \ge m+1$, — спектральные проекторы Рисса, построенные по оператору S_θ и множествам $\sigma_{(m)}$, σ_n, $n \in \mathbb{J}$, $|n| \ge m+1$ из теоремы 4 соответственно.

Теорема 5. *Пусть* $m \in \mathbb{Z}_+$ — *число из формулировки теоремы 4. Тогда операторы* S_θ *являются спектральными относительно разложения* (10), *а именно ряд* $\widetilde{P}_{(m)}x + \sum\limits_{\substack{n\in\mathbb{J}\\ |n|\ge m+1}} \widetilde{P}_n x$ *безусловно сходится для любого вектора* $x \in L^2[0,\omega]$. *Таким обра-*

зом, справедливы следующие разложения единицы:

$$I = \sum_{\substack{n\in\mathbb{J}\\|n|\geq m+1}} P_n + P_{(m)}, \quad I = \sum_{\substack{n\in\mathbb{J}\\|n|\geq m+1}} \widetilde{P}_n + \widetilde{P}_{(m)},$$

Для любого подмножества $\Omega \subset \mathbb{J}\backslash\sigma_m^0$ (не обязательно конечного) символом $P(\Omega)$ обозначим спектральный проектор $\sum\limits_{n\in\Omega} P_n$, а через $\widetilde{P}(\Omega)$ — спектральный проектор $\sum\limits_{n\in\Omega} \widetilde{P}_n$.

Через $\|\cdot\|_2$ будем обозначать норму Гильберта-Шмидта.

Теорема 6. *Для любого подмножества $\Omega \subset \mathbb{J}\setminus\sigma_m^0$ справедливы следующие оценки:*

$$\|\widetilde{P}(\Omega) - P(\Omega)\|_2 \leq \mathrm{Const}\cdot\max_{n\in\Omega}\alpha_n,$$

причем $\alpha_n \to 0$, $n\to\infty$. В частности, имеет место равномерная равносходимость спектральных разложений операторов S_θ и S_θ^0:

$$\lim_{n\to\infty}\|\widetilde{P}_{(m)} + \sum_{\substack{|k|=m+1\\k\in\mathbb{J}}}^{n}\widetilde{P}_k - P_{(m)} - \sum_{\substack{|k|=m+1\\k\in\mathbb{J}}}^{n} P_k\|_2 = 0,$$

где $m\in\mathbb{Z}_+$ — число из условий теоремы 4.

Теорема 7. *Пусть $m\in\mathbb{Z}_+$ — число из условий теоремы 4. Тогда*

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{J}\\|n|\geq m+1}}\frac{1}{\beta_n^2}\|\widetilde{P}_n - P_n\|_2^2 < \infty,$$

где β_n — стремящаяся к нулю последовательность.

Теорема 8. *Оператор $-S_\theta$ является секториальным [25] и генерирует аналитическую полугруппу операторов $\widetilde{T}:\mathbb{R}_+\to \mathrm{End}\,L^2[0,\omega]$. Эта полугруппа подобна полугруппе вида $T_{(m)}(t)\bigoplus T^{(m)}(t)$, действующей в $L^2[0,\omega] = \mathcal{H}_{(m)}\bigoplus\mathcal{H}^{(m)}$, где $\mathcal{H}_{(m)} = \mathrm{Im}\,P_{(m)}$, $\mathcal{H}_{(m)} = \mathrm{Im}\,(I-P_{(m)})$, а m — число из условий теоремы 4. Более того, имеет место следующее представление полугруппы $T^{(m)}(t)$ для $x\in L^2[0,\omega]$:*

$$T^{(m)}(t)x = \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\|k|\geq m+1}} e^{-\tilde{\lambda}_k t}(x,e_k)e_k, \quad \theta\in(0,1);$$

$$T^{(m)}(t)x = \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}_+\\k\geq m+1}} e^{-\left((\lambda_k+ku_0)I_{2\times 2}+kC_{k,2\times 2}\right)t}(x,e_k)e_k, \quad \theta=0,\ \theta=1.$$

Здесь $\tilde{\lambda}_k$ — собственные значения оператора S_θ, определяемые формулой (11), $I_{2\times2} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ и $C_{k,2\times2} = \begin{pmatrix}c_k^{11}&c_k^{12}\\c_k^{21}&c_k^{22}\end{pmatrix}$, причем элементы c_k^{ij}, $ij=1,2$, $k\geq m+1$, суммируемы с квадратом.

Литература

1. Марченко В.А., Островский И.В. Характеристика спектра оператора Хилла // Мат. сборник. – 1975. – 97(139):4(8). – С.540-606.
2. Джаков П., Митягин Б.С. Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шрёдингера и Дирака // Успехи математических наук. – 2006. – 61:4. – С.77-182.
3. Като Т. Теория возмущений линейных операторов / М.:Мир, 1972. – 740 с.
4. Савчук А.М., Шкаликов А.А. Операторы Штурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами // Мат. заметки. – 1999. – 66:6. – С.897-912.
5. Djakov P., Mityagin B. Fourier Method for One-dimensional Schrodinger Operators with Singular Periodic Potentials // Topics in Operator Theory. – 2010. – 203. – P.195-236.
6. Савчук А.М., Шкаликов А.А. Операторы Штурма-Лиувилля с потенциалами распределениями // Тр. ММО. – 2003. – 64. – С.159-212.
7. Djakov P., Mityagin B. Spectral gaps of Schrodinger operators with periodic singular potentials // Dynamics of PDE. – 2009. – 6:2. – P.95-165.
8. Djakov P., Mityagin B. Bari–Markus property for Riesz projections of Hill operators with singular potentials // Conference on Functional Analysis and Complex Analysis, Providence, RI, USA: American Mathematical Society. – 2009. – P.59-80.
9. Hryniv R.O., Mykytyuk Ya.V. Schrodinger operators with periodic singular potentials // Methods of functional analysis and topology. – 2001. – 7:4. – P.31-42.
10. Hryniv R.O., Mykytyuk Ya.V. Eigenvalue asymptotics for Sturm–Liouville operators with singular potentials // Journal of Functional Analysis. – 2006. – 238:1. – P.27-57.
11. Садовничая И.В. О равносходимости разложений в ряды по собственным фунциям операторов Штурма-Лиувилля с потенциалами-распределениями // Мат. сборник. – 2010. – 201:9. – С.61-76.
12. Kappeler T., Moehr C. Estimates for Periodic and Dirichlet Eigenvalues of the Schrodinger Operator with Singular Potentials // Journal of Functional Analysis. – 2001. – 186:1. – P.62-91.
13. Велиев О.А. О несамосопряженных операторах Штурма-Лиувилля с матричными потенциалами // Мат. заметки. – 2007. – 81:4. – С.496-506.
14. Велиев О.А. О базисности Рисса собственных и присоединенных функций периодической и антипериодической задач Штурма-Лиувилля // Мат. заметки. – 2009. – 85:5. – С.671-686.
15. Велиев О.А. Uniform convergence of the spectral expansion for a differential operator with periodic matrix coefficients // Bound. Value Probl. – 2008. – 628973.
16. Баскаков А.Г. Замена Крылова-Боголюбова в теории нелинейных возмущений линейных операторов // Препринт. – 1980. – 19. – 44 с.
17. Баскаков А.Г. Методы абстрактного гармонического анализа в теории возмущений линейных операторов // Сиб. мат. журн. – 1983. – 24:1. – С.21-39.
18. Баскаков А.Г. Абстрактный вариант замены Крылова-Боголюбова и некоторые вопросы теории нелинейных возмущений линейных операторов // Труды IX международной конференции по нелинейным колебаниям в 4-х томах. Т.1 / Киев: Наукова думка,1984. – С.75-79.
19. Баскаков А.Г. Замена Крылова-Боголюбова в теории возмущений линейных операторов // Укр. мат. журн. – 1984. – 36:5. – С.606-611.
20. Баскаков А.Г. Метод усреднения в теории возмущений линейных дифференциальных операторов // Диф. уравн. – 1985. – 21:4. – С.555-562.
21. Баскаков А.Г. Теория о расщеплении оператора и некоторые смежные вопросы аналитической теории возмущений // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1986. – 50:4. – С.435-457.
22. Баскаков А.Г. Гармонический анализ линейных операторов / Воронеж: Изд-во Воронежского государственного университета, 1987. – 165 с.
23. Баскаков А.Г. Спектральный анализ возмущённых неквазианалитических и спектральных операторов // Известия РАН. Сер.матем. – 1994. – 58:4. – С.3-32.

24. Баскаков А.Г., Дербушев А.В., Щербаков А.О. Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом // Известия РАН, сер. мат. – 2011. – 75:3. – С.4-28.

25. Engel K-J., Nagel R. One-parameter Semigroups for Linear Evolution Equations / Springer, 2001. – 586 p.

SPECTRAL ANALYSIS OF STURM-LIOUVILLE OPERATOR WITH SINGULAR POTENTIAL

A.O. Shcherbakov

Voronezh State University,
Universitetskaya Sq., 1, Voronezh, 394006, Russia, e-mail: a.o.shcherbakov@gmail.com

Abstract. Sturm-Liouville's operators $S_\theta, \theta \in [0,1]$ defined on $[0,\omega]$ by the differential expression $l(y) = -y'' + vy$ and boundary conditions $y(\omega) = e^{i\pi\theta}y(0)$, $y'(\omega) = e^{i\pi\theta}y'(0)$, $\theta \in [0,1]$ are studied. The potential v is represented by first order distribution such that $v = q' + C$ where $q \in L^2[0,\omega]$ and $C \in \mathbb{C}$. The method of similar operators is used to analyze spectral properties of the operator. The asymptotic of spectrum, existence of basis of eigen and associated functions and the estimates of equiconvergence of spectral decomposition are obtained. It is also established that the operator (with a minus sign) is the generator of analytic semigroup. Its asymptotic is obtained as well.

Key words: Sturm-Liouville operator, singular potential, spectrum of operator, asymptotic of spectrum, spectral decomposition, estimates of spectral projections, analytic operator semigroup, similar operators method.