MSC 65D07

# ПРИБЛИЖЁННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ОТ БЫСТРООСЦИЛЛИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНТЕРФЛЕТАЦИИ

**О.Н. Литвин, О.П. Нечуйвитер**

Украинская инженерно-педагогическая академия,
ул. Университетская, 16, Харьков, 61003, Украина, e-mail: olesya@email.com

**Аннотация.** В статье исследуется кубатурная формула приближенного вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций трех переменных с использованием интерфлетации на классе дифференцируемых функций. Информация о функции задается ее следами и следами ее частных производных на системе взаимно-перпендикулярных плоскостей. Получена оценка погрешности кубатурной формулы.

**Ключевые слова:** интегралы от быстро осциллирующих функций многих переменных, кубатурные формулы, интерфлетация функций.

**Введение.** При изучении известных математических моделей и построении новых все чаще в качестве данных используются не только значения функции в узловых точках, но и следы функции на системе линий или плоскостей. Такие модели возникают, например, при решении задач трехмерной компьютерной томографии или цифровой обработки сигналов. Поэтому построение кубатурных формул с использованием новых информационных операторов является актуальной задачей, которую эффективно позволяет решать аппарат интерлинации и интерфлетации функций [1], [2].

В работе для решения задачи приближенного вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций многих переменных (одной из наиболее важных задач цифровой обработки сигналов) будет построена кубатурная формула с использованием интерфлетации.[2] В качестве данных для такой кубатурной формулы задаются следы неосциллирующего множителя подинтегральной функции и его частных производных до заданного порядка на плоскостях ректангуляции, то есть на плоскостях, которые разделяют область на параллелепипеды.

Исследуемая в работе задача, аналогична задаче приближенного вычисления двумерных осциллирующих интегралов с использованием интерлинации функций [3]. В качестве данных используются следы неосциллирующего множителя подинтегральной функции и его частных производных до заданного порядка на линиях ректангуляции, то есть на линиях, которые разделяют область на прямоугольники. Более детально задача приближенного вычисления двумерных осциллирующих интегралов с использованием интерлинации функций в случае разных информационных операторов изложена в [4], [5]. Приближенное вычисление тройного интеграла (без осцилляции) представлено в [6], а в [7-9] исследованы оценки самих одно- и многомерных осциллирующих интегралов. Задача приближенного вычисления многомерных интегралов от быстро осциллирующих функций с использованием асимптотических методов, методов Файлона, Левина

[2]Этот используемый авторами термин не является общеупотребительным. (Прим. ред.)

рассматривалась в работах [10-12]. Отметим, что в этих методах использовалась информация о значениях неосциллирующего множителя в узловых точках сетки «tartan» [10], о следах неосциллирующего множителя внутри и на границе $n$-мерного куба. В [13] рассматривалось приближенное вычисление 3D коэффициентов Фурье с помощью интерфлетации функций в случае, когда информация о функции задана значениями в точках, а в [14] — следами функции (но не следами ее частных производных) на системе взаимно перпендикулярных плоскостей.

Постановка задачи: для вычисления интеграла вида

$$I\left(f,\omega\right)=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f\left(x,y,z\right)\sin\omega x\sin\omega y\sin\omega z\,dxdydz\,,$$

необходимо построить кубатурную формулу в случае, когда информация о функции $f\left(x,y,z\right)$ и ее частных производных до заданного порядка заданы не более, чем на $N=3\ell$ плоскостях

$$x=x_{i_1},\quad y=y_{i_2},\quad z=z_{i_3},\quad i_1,i_2,i_2=\overline{1,\ell}$$

на классе дифференцированных функций

$$L_q^{2(n+1),2(n+1),2(n+1)}\left(\Omega\right)\,,\qquad 1\le q\le\infty\,,$$

$L_q^p\left(\Omega\right)=\left\{f\left(x,y,z\right)\middle|f^{(\mu_1,\mu_2,\mu_3)}\left(x,y,z\right)\in C\left(\Omega\right),\ 0\le\mu_\lambda\le\nu_\lambda-1,\ \nu_\lambda\ge1,\quad\lambda=1,2,3,\ \mu\ne\nu,\mu=\left(\mu_1,\mu_2,\mu_3\right),\quad\nu=\left(\nu_1,\nu_2,\nu_3\right):\left|\left|f^{(\nu)}\right|\right|_{L_q(\Omega)}\le1\right\}$ с помощью кусочно-полиномиальной интерфлетации.

**1. Операторы кусочно-полиномиальной интерфлетации.** Пусть область $\Omega=[0,1]^3$ разделена на параллелепипеды $\Omega=\bigcup\limits_i\Pi_i$,

$$\Pi_i=\left[x_{i_1},x_{i_1+1}\right]\times\left[y_{i_2},y_{i_2+1}\right]\times\left[z_{i_3},z_{i_3+1}\right],$$

$$i=\left(i_1,i_2,i_3\right),\qquad i_1,i_2,i_2=\overline{1,\ell-1}\,.$$

Рассмотрим оператор

$$E_{i,n}f\left(x,y,z\right)=\sum_{j_1=i_1}^{i_1+1}\sum_{s_1=0}^{n}h_{j_1,s_1}\left(x\right)f^{(s_1,0,0)}\left(x_{j_1},y,z\right)\ +$$

$$+\sum_{j_2=i_2}^{i_2+1}\sum_{s_2=0}^{n}h_{j_2,s_2}\left(z\right)f^{(0,0,s_2)}\left(x,y,z_{j_2}\right)\ +$$

$$+\sum_{j_3=i_3}^{i_3+1}\sum_{s_3=0}^{n}h_{j_3,s_3}\left(z\right)f^{(0,0,s_3)}\left(x,y,z_{j_3}\right)\ +$$

$$+\sum_{j_2=i_2}^{i_2+1}\sum_{s_2=0}^{n} h_{j_2,s_2}(y)\, f^{(0,s_2,0)}(x,y_{j_2},z)\,+$$

$$+\sum_{j_3=i_3}^{i_3+1}\sum_{s_3=0}^{n} h_{j_3,s_3}(z)\, f^{(0,0,s_3)}(x,y,z_{j_3})\,-$$

$$-\sum_{j_1=i_1}^{i_1+1}\sum_{j_2=i_2}^{i_2+1}\sum_{s_1,s_2=0}^{n} h_{j_1,s_1}(x)\, h_{j_2,s_2}(y) f^{(s_1,s_2,0)}(x_{j_1},y_{j_2},z)\,-$$

$$-\sum_{j_1=i_1}^{i_1+1}\sum_{j_3=i_3}^{i_3+1}\sum_{s_1,s_3=0}^{n} h_{j_1,s_1}(x)\, h_{j_3,s_3}(z) f^{(s_1,0,s_3)}(x_{j_1},y,z_{j_3})\,-$$

$$-\sum_{j_2=i_2}^{i_2+1}\sum_{j_3=i_3}^{i_3+1}\sum_{s_2,s_3=0}^{n} h_{j_2,s_2}(y)\, h_{j_3,s_3}(z) f^{(0,s_2,s_3)}(x,y_{j_2},z_{j_3})\,+$$

$$+\sum_{j_1=i_1}^{i_1+1}\sum_{j_2=i_2}^{i_2+1}\sum_{j_3=i_3}^{i_3+1}\sum_{s_1,s_2,s_3=0}^{n} h_{j_1,s_1}(x) h_{j_2,s_2}(y)\, h_{j_3,s_3}(z)\, f^{(s_1,s_2,s_3)}(x_{j_1},y_{j_2},z_{j_3})\ ,$$

$$(x,y,z)\in\Pi_i\subset\Omega, i=(i_1,i_2,i_3)\ ,$$

где $h_{j_1,s_1}(x)\,,h_{j_2,s_2}(y)\,,\ h_{j_3,s_3}(z)$ – полиномиальные базисные интерполяционные сплайны порядка $\nu_\lambda=0,1,2,3,\quad \lambda=1,2,3$ со свойствами:

$$\left.\frac{d^{p_1}h_{j_1,s_1}(x)}{dx^{p_1}}\right|_{x=x_\alpha}=\delta_{p_1,s_1}\delta_{\alpha,j_1}\ ,$$

$$\left.\frac{d^{p_2}h_{j_2,s_2}(y)}{dy^{p_2}}\right|_{y=y_\beta}=\delta_{p_2,s_2}\delta_{\beta,j_2}\ ,$$

$$\left.\frac{d^{p_3}h_{j_3,s_3}(z)}{dz^{p_3}}\right|_{z=z_\gamma}=\delta_{p_3,s_3}\delta_{\gamma,j_3}\ ,$$

$$0\le p_\lambda\le\nu_\lambda,\quad \lambda=1,2,3\,.$$

Для $E_{i,n}f(x,y,z)$ справедливы равенства:

$$\left.\frac{\partial^{p_1}E_{i,n}f(x,y,z)}{\partial x^{p_1}}\right|_{x=x_\alpha}=\left.\frac{\partial^{p_1}f(x,y,z)}{\partial x^{p_1}}\right|_{x=x_\alpha},\quad \alpha\in\{i_1,i_1+1\}\,,$$

$$\left.\frac{\partial^{p_2}E_{i,n}f(x,y,z)}{dy^{p_2}}\right|_{y=y_\beta}=\left.\frac{\partial^{p_2}f(x,y,z)}{dy^{p_2}}\right|_{y=y_\beta},\quad \beta\in\{i_2,i_2+1\}\,,$$

$$\left.\frac{\partial^{p_3}E_{i,n}f(x,y,z)}{dz^{p_3}}\right|_{z=z_\gamma}=\left.\frac{\partial^{p_3}f(x,y,z)}{dz^{p_3}}\right|_{z=z_\gamma},\quad \gamma\in\{i_3,i_3+1\}\,,$$

$$i_1, i_2, i_3 = \overline{1, \ell - 1}\,.$$

Определим оператор

$$E_\Omega f\left(x, y, z\right) = E_{i,n} f\left(x, y, z\right), \quad \left(x, y, z\right) \in \Pi_i \subset \Omega,$$

который будет удовлетворять условиям:

$$E_\Omega f\left(x, y\right) \in C\left(\Omega\right),$$

$$\left.\frac{\partial^{p_1} E_\Omega f\left(x, y, z\right)}{\partial x^{p_1}}\right|_{x=x_\alpha} = \left.\frac{\partial^{p_1} f\left(x, y, z\right)}{\partial x^{p_1}}\right|_{x=x_\alpha},$$

$$\left.\frac{\partial^{p_2} E_\Omega f\left(x, y, z\right)}{dy^{p_2}}\right|_{y=y_\beta} = \left.\frac{\partial^{p_2} f\left(x, y, z\right)}{dy^{p_2}}\right|_{y=y_\beta},$$

$$\left.\frac{\partial^{p_3} E_\Omega f\left(x, y, z\right)}{dz^{p_3}}\right|_{z=z_\gamma} = \left.\frac{\partial^{p_3} f\left(x, y, z\right)}{dz^{p_3}}\right|_{z=z_\gamma},$$

$$0 \le p_\lambda \le \nu_\lambda\,, \quad \lambda = 1, 2, 3;$$

$$1 \le \alpha \le \ell\,, \quad 1 \le \beta \le \ell\,, \quad 1 \le \gamma \le \ell\,.$$

Этот оператор называется кусочно-полиномиальным интерфлетационным оператором, или кусочно-полиномиальным интерфлетантом [1]. Он связывает значения функции $f(x, y, z)$ и ее несмешанных производных на взаимно перпендикулярных плоскостях – границах $\Pi_i$, приближая значения функции $f(x, y, z)$ внутри $\Pi_i$. При этом на границах двух соседних кубов, которые имеют общие грани, ребра или точки, порожденные этим оператором функции сохраняют непрерывные производные до порядка $n$ включительно. Функция $E_\Omega f\left(x, y, z\right)$ имеет значения в точках $\left(x, y, z\right) \in \Pi_i \subset \Omega$, зависящие от следов функции $f\left(x, y, z\right)$ только на границе $\partial\Pi_i$.

Погрешность полиномиальной интерфлетации в каждом из кубов $\Pi_i$ удовлетворяет неравенству

$$\left|f\left(x, y, z\right) - E_\Omega f\left(x, y, z\right)\right| \le \left|Q_i\left(x, y, z\right)\right|,$$

$$\left(x, y, z\right) \in \Pi_i \subset \Omega, i = \left(i_1, i_2, i_3\right),$$

где $Q_i\left(x, y, z\right)$ – «стандартная» функция:

$$Q_i\left(x, y, z\right) =$$

$$= \frac{1}{\left[\left(2\left(n+1\right)\right)!\right]^3} \prod_{j_1=i_1}^{i_1+1} \left(x - x_{j_1}\right)^{n+1} \cdot \prod_{j_2=i_2}^{i_2+1} \left(y - y_{j_2}\right)^{n+1} \cdot \prod_{j_3=i_3}^{i_3+1} \left(z - z_{j_3}\right)^{n+1},$$

$$(x,y,z)\in\Pi_i.$$

Если $f\left(x,y,z\right)\in L_q^{2(n+1),2(n+1),2(n+1)}\left(\Omega\right)$, то

$$\left|f\left(x,y,z\right)-E_\Omega f\left(x,y,z\right)\right|\le\left|Q\left(x,y,z\right)\right|,(x,y,z)\in\Omega\,,$$

$$Q\left(x,y,z\right)=Q_i\left(x,y,z\right),\qquad(x,y,z)\in\Pi_i\,.$$

Оценка есть наилучшей в каждой точке $\Omega$. Поэтому погрешность приближения функции

$$f\left(x,y,z\right)\in L_q^{2(n+1),2(n+1),2(n+1)}\left(\Omega\right)\,,$$

оператором $E_\Omega f\left(x,y,z\right)$ в каждой точке оценивается в зависимости от значения функции

$$Q\left(x,y,z\right)=Q_i\left(x,y,z\right)\,,\qquad(x,y,z)\in\Pi_i\,.$$

**2. Кубатурная формула приближенного вычисления интеграла.**

**Определение.** *Под следом функции $f(x,y,z)$ на плоскостях принимаются следующие функции*

$$\begin{array}{llll} f(x_{i_1},y,z), & 0\le y\le1, & 0\le z\le1, & i_1=1,...,\ell,\\ f(x,y_{i_2},z), & 0\le x\le1, & 0\le z\le1, & i_2=1,...,\ell,\\ f(x,y,z_{i_3}), & 0\le x\le1, & 0\le y\le1, & i_3=1,...,\ell. \end{array}$$

Для вычисления интеграла $I\left(f,\omega\right)$ предлагается формула:

$$\Phi\left(f,\omega\right)=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 E_\Omega f\left(x,y,z\right)\sin\omega\,x\sin\omega\,y\sin\omega zdxdydz\,.$$

Подставляя выражение для оператора-интерфлетанта, получим:

$$\Phi\left(f,\omega\right)=\sum_{i_1=1}^{\ell-1}\sum_{j_1=i_1}^{i_1+1}\sum_{s_1=0}^{n}I_{1,j_1,s_1}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f^{(s_1,0,0)}\left(x_{j_1},y,z\right)\sin\omega y\sin\omega zdydz\,+$$

$$+\sum_{i_2=1}^{\ell-1}\sum_{j_2=i_2}^{i_2+1}\sum_{s_2=0}^{n}I_{2,j_2,s_2}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f^{(0,s_2,0)}\left(x,y_{j_2},z\right)\sin\omega x\sin\omega zdxdz\,+$$

$$+\sum_{i_3=1}^{\ell-1}\sum_{j_3=i_3}^{i_3+1}\sum_{s_3=0}^{n}I_{3,j_3,s_3}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f^{(0,0,s_3)}\left(x,y,z_{j_3}\right)sin\omega x\sin\omega ydxdy\,-$$

$$-\sum_{i_1=1}^{\ell-1}\sum_{i_2=1}^{\ell-1}\sum_{j_1=i_1}^{i_1+1}\sum_{j_2=i_2}^{i_2+1}\sum_{s_1,s_2=0}^{n}I_{1,j_1,s_1}I_{2,j_2,s_2}\int\limits_0^1 f^{(s_1,s_2,0)}\left(x_{j_1},y_{j_2},z\right)\sin\omega zdz\,-$$

$$
-\sum_{i_1=1}^{\ell-1}\sum_{i_3=1}^{\ell-1}\sum_{j_1=i_1}^{i_1+1}\sum_{j_3=i_3}^{i_3+1}\sum_{s_1,s_3=0}^{n} I_{1,j_1,s_1} I_{3,j_3,s_3}\int\limits_0^1 f^{(s_1,0,s_3)}\left(x_{j_1},y,z_{j_3}\right)\sin\omega y dy -
$$

$$
-\sum_{i_2=1}^{\ell-1}\sum_{i_3=1}^{\ell-1}\sum_{j_2=i_2}^{i_2+1}\sum_{j_3=i_3}^{i_3+1}\sum_{s_2,s_3=0}^{n} I_{2,j_2,s_2} I_{3,j_3,s_3}\int\limits_0^1 f^{(0,s_2,s_3)}\left(x,y_{j_2},z_{j_3}\right)\sin\omega x dx +
$$

$$
+\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{\ell-1}\sum_{j_1=i_1}^{i_1+1}\sum_{j_2=i_2}^{i_2+1}\sum_{j_3=i_3}^{i_3+1}\sum_{s_1,s_2,s_3=0}^{n} I_{1,j_1,s_1} I_{2,j_2,s_2} I_{3,j_3,s_3} f^{(s_1,s_2,s_3)}\left(x_{j_1},y_{j_2},z_{j_3}\right),
$$

$$
I_{1,j_1,s_1}=\int\limits_0^1 h_{j_1,s_1}(x)\sin\omega x dx\,,\qquad I_{2,j_2,s_2}=\int\limits_0^1 h_{j_2,s_2}(y)\sin\omega y\, dy\,,
$$

$$
I_{3,j_3,s_3}=\int\limits_0^1 h_{j_3,s_3}(z)\sin\omega z dz\,.
$$

**Теорема.** *Для кубатурной формулы $\Phi(f,\omega)$ вычисления интеграла $I(f,\omega)$ справедлива следующая оценка погрешности приближения*

$$
\left|I(f,\omega)-\Phi(f,\omega)\right| \le \frac{1}{\left[(2(n+1))!\right]^3}\cdot\frac{((n+1)!)^6}{\left[(2n+3)!\right]^3}\cdot\Delta^{6(n+1)},\qquad \Delta=\frac{1}{\ell}\,.
$$

□ Найдем оценку сверху величины $|I(f,\omega)-\Phi(f,\omega)|$:

$$
|I(f,\omega)-\Phi(f,\omega)| =
$$

$$
=\left|\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \left(f(x,y,z)-E_\Omega f(x,y,z)\right)\sin\omega\, x\sin\omega\, y\sin\omega z dxdydz\right| \le
$$

$$
\le \int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 |f(x,y,z)-E_\Omega f(x,y,z)| dxdydz \le
$$

$$
\le \frac{1}{\left[(2(n+1))!\right]^3}\sum_{j_1=1}^{\ell-1}\sum_{j_2=1}^{\ell-1}\sum_{j_3=1}^{\ell-1}\int\limits_{x_{i_1}}^{x_{i_1+1}}\left|\prod_{j_1=i_1}^{i_1+1}\left(x-x_{j_1}\right)^{n+1}\right| dx\,\times
$$

$$
\times\int\limits_{y_{i_2}}^{y_{i_2+1}}\left|\prod_{j_2=i_2}^{i_2+1}\left(y-y_{j_2}\right)^{n+1}\right| dy\int\limits_{z_{i_3}}^{z_{i_3+1}}\left|\prod_{j_3=i_3}^{i_3+1}\left(z-z_{j_3}\right)^{n+1}\right| dz =
$$

$$= \frac{1}{[(2(n+1))!]^3} \frac{((n+1)!)^6}{[(2n+3)!]^3} \Delta^{6(n+1)}, \quad \Delta = \frac{1}{\ell}. \quad \blacksquare$$

**3. Численный эксперимент.** Найдем приближенные значения интегралов $I(f,\omega)$ по формуле $\Phi(f,\omega)$ в случае, когда $L_q^{2,2,2}(\Omega)$, $1 \le q \le \infty$ и $h_{j_1}(x), h_{j_2}(y), h_{j_3}(z)$ – базисные интерполяционные сплайны степени 0, а координаты $x_{j_1}, y_{j_2}, z_{j_3}$ выбираются, как середины соответственных ребер параллелепипеда

$$\Pi_i = [x_{i_1}, x_{i_1+1}] \times [y_{i_2}, y_{i_2+1}] \times [z_{i_3}, z_{i_3+1}],$$

$$i = (i_1, i_2, i_3), \quad i_\nu = \overline{1, \ell - 1}, \quad \nu = 1, 2, 3.$$

Рассмотрим функцию

$$f(x,y,z) = \frac{1}{2^6} \cos(2x + 2y + 2z),$$

для которой вычислим точные значения интегралов:

$$I(f, 2\pi) = -5.83798430329658 \cdot 10^{-5}, \qquad I(f, 4\pi) = -5.72023734380512 \cdot 10^{-6},$$

$$I(f, 6\pi) = -1.62354228903616 \cdot 10^{-6}.$$

Покажем, что $\varepsilon \le \varepsilon_1$, где

$$\varepsilon = |I(f,\omega) - \Phi(f,\omega)|, \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{1728\ell^6}.$$

*Таблица 1*

Приближенное вычисление $I(f,\omega)$ по формуле $\Phi(f,\omega)$.

| $\omega$ | $\ell$ | $\varepsilon$ | $\varepsilon_1$ |
|---|---|---|---|
| $2\pi$ | 5 | $1.0 \cdot 10^{-11}$ | $3.7 \cdot 10^{-8}$ |
| $2\pi$ | 10 | $2.4 \cdot 10^{-13}$ | $5.7 \cdot 10^{-10}$ |
| $4\pi$ | 10 | $1.5 \cdot 10^{-14}$ | $5.7 \cdot 10^{-10}$ |
| $4\pi$ | 17 | $9.2 \cdot 10^{-16}$ | $2.3 \cdot 10^{-11}$ |
| $6\pi$ | 10 | $1.5 \cdot 10^{-15}$ | $5.7 \cdot 10^{-10}$ |
| $6\pi$ | 20 | $8.8 \cdot 10^{-17}$ | $9.0 \cdot 10^{-12}$ |

Таким образом, численный эксперимент подтверждает теоретический результат, связанный с полученной в работе оценкой погрешности кубатурной формулы приближенного вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций трех переменных на классе дифференцируемых функций. Особенностью этой формулы является использование при ее построении следов неосциллирующего множителя подинтегральной функции и следов его частных производных до заданного порядка на системе взаимноперпендикулярных плоскостей.

## Литература

1. Литвин О.М. Методи обчислень. Додаткові розділи. Навчальний посібник / К.: Наукова думка, 2005. – 332 с.
2. Сергиенко И.В., Задирака В.К., Литвин О.Н. Элементы общей теории оптимальных алгоритмов и смежные вопросы / Киев: Наукова думка, 2011. – 404 с.
3. Lytvyn Oleg N., Nechuyviter Olesya P. Methods in the multivariate digital signal processing with using spline-interlineation // Proceeding of the IASTED International Conferences on Automation, Control, and Information Technology (ASIT 2010) (June 15 - 18 2010). – Novosibirsk. – 2010. – P.90-96.
4. Сергиенко И.В., Задирака В.К., Литвин О.Н., Мельникова С.С., Нечуйвитер О.П. Оптимальные алгоритмы вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций и их применение / Т.1 Алгоритмы / - Киев: Наукова думка, 2011. – 448 с.
5. Сергиенко И.В., Задирака В.К., Литвин О.Н., Мельникова С.С.,Нечуйвитер О.П. Оптимальные алгоритмы вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций и их применение / Т.2. Применение / Киев: Наукова думка, 2011. – 348 с.
6. Caliari M., Marchini D. S., Vianello M. Hyperinterpolation in the cube http://profs.sci.univr.it/ caliari/pdf/CDMV08.pdf.
7. Архипов Г.И., Карацуба А.А., Чубариков В.Н. Тригонометрические интегралы // Изв. АН СССР. Сер. Матем. – 1979. – 43, №5. – С.971-1003.
8. Попов Д.А. Оценки с константами для некоторых классов осциллирующих интегралов // УМН. – 1997. – 52, Вып.1. (313). – С.77-148.
9. Чахкиев М.А. Оценки осциллирующих интегралов с выпуклой фазой // Изв. РАН. Сер. Матем. – 2006. – 70. – №1. – С.183-220.
10. Iserles A., Norsett S.P. From high oscillation to rapid approximation III: Multivariate expansions / Technical Report NA2007/01, DAMPT, - University of Cambridge, 2007.
11. Iserles A., Norsett S.P. From high oscillation to rapid approximation IV:Accelerating convergence / Technical Report NA2007/10, DAMPT, - University of Cambridge, 2007.
12. Adcock B. Convergence acceleration of Fourier-like series in one or more dimensions / Tech. Report NA2008/11, DAMPT, - University of Cambridge, 2008.
13. Литвин О.Н., Удовиченко В.М. Трехмерные финитные преобразования Фурье и Хартли с использованием интерфлетации функций / Вестник Национального технического университета «ХПИ». Сборник научных тудов. Тематический выпуск, «Автоматика и приборостроение». – 2005. – 38. – С.90-130.
14. Литвин О.Н., Нечуйвитер О.П. 3D коэффициенты Фурье и интерфлетация функций // Современные проблемы математики, механики, информатики. Сб. статей / Харьков: Изд-во ФОП Вировец А.П. Издательская группа «Апостроф», 2011. – С.354-360.

## CALCULATION OF TRIPLE INTEGRALS OF HIGHLY OSCILLATORY FUNCTIONS WITH USE OF INTERFLATATION

**O.N. Lytvyn, O.P. Nechuiviter**

Ukrainian Engineering Pedagogical Academy
Universitetskaya St., 16, Kharkiv, 61003, Ukraine, e-mail: olesya@email.com

**Abstract.** Cubature formula of the calculation of triple integrals of highly oscillatory functions is investigated by the use of interflatation on the class of differentiable functions. Information about function is given by values on flats. Error estimate the cubature formula accuracy is presented.

**Key words:** integrals of highly oscillatory functions on many variables, cubature formulas, interflatation of functions.