MSC 42A38

ПОЛНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ-БЕССЕЛЯ НЕКОТОРЫХ ОСНОВНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КЛАССОВ

Л.Н. Ляхов, С.А. Рощупкин

Воронежский государственный университет
Университетская пл. 1, Воронеж, 394006, Россия, e-mail: levnlya@mail.ru,
Елецкий государственный университет им. И.А.Бунина,
ул. Коммунаров, 28, г. Елец, 399770, Россия, e-mail: roshupkinsa@mail.ru

Аннотация. Рассматривается полное преобразование Фурье-Бесселя $\mathcal{F}_B$, введенное И.А. Киприяновым и В.В. Катраховым, которое применяется к исследованию сингулярного дифференциального оператора ∂_B^α, равного степени $\frac{\alpha}{2}$ оператора Бесселя для четных α и производной от степени $\frac{\alpha-1}{2}$ оператора Бесселя для нечетных α. Строятся классы основных функций, приспособленных для работы с оператором ∂_B^α, в частности, – класс S_{ev}, который состоит из быстро убывающих функций, четных по каждой из переменных, на которые действует ∂_B^α-оператор Бесселя. Строится счетная система норм, порождаемая оператором ∂_B^α. Другой класс основных функций $\mathbf{\Phi}_\gamma$ строится из функций пространства S_{ev} по типу пространств основных функций Лизоркина, исчезающих на соответствующих координатных гиперплоскостях. Исследуется полное преобразование Фурье-Бесселя $\mathcal{F}_B$ этих классов функций и доказывается теорема об ортогональности функций из $\mathbf{\Phi}_\gamma$ многочленам относительно скалярного произведения с весом.

Ключевые слова: полное преобразование Фурье-Бесселя, оператор Бесселя, ∂_B-оператор Бесселя, пространство основных функций Лизоркина.

Введение. Для исследования сингулярных дифференциальных уравнений, в которых в подинтегральном выражении по одному из направлений действует сингулярный дифференциальный оператор Бесселя

$$B_{\gamma_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma_i}{x_i}\,\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{1}{t^\gamma}\frac{d}{dt}\,t^\gamma\frac{d}{dt}\,, \qquad \gamma_i > 0\,.$$

применяется классическое преобразование Фурье-Бесселя ядром которого является j-функция Бесселя

$$j_\nu(t) = \frac{2^\nu\,\Gamma(\nu+1)}{t^\nu}\;J_\nu(t)\,,$$

где J_ν — функция Бесселя первого рода; $j_\nu(t)$ — одно из решений сингулярного уравнения Бесселя [1]

$$\frac{1}{t^\gamma}\frac{d}{dt}\,t^\gamma\frac{d}{dt}u = -u\,,$$

отвечающее индексу $\gamma = 2\nu+1$ и удовлетворяющее условиям

$$u(0) = 1, \quad u'(0) = 0\,.$$

Действие оператора Бесселя будем называть B-производной. Пусть $R_N^+ = R_n \times R_{N-n}$, $x =$

(x', x''), $x' \in R_n$, $x'' \in R_{N-n}$. Ядра прямого и обратного полного преобразований Фурье-Бесселя имеют вид (введены в работе [2], см. также [3],[4]):

$$\Lambda^{\pm}_{\gamma}(x', \xi') = \prod_{i=1}^{n} \left(j_{\nu_i}(x_i \xi_i) \mp i \frac{x_i \xi_i}{\gamma_i + 1} j_{\nu_i+1}(x_i \xi_i) \right),$$

$$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n), \quad \gamma_i > 0, \quad \gamma_i = 2\nu_i + 1.$$

Прямое и обратное полные смешанные преобразования Фурье-Бесселя (далее, для краткости, будем писать $\mathcal{F}_B$-*преобразования*) функции u задается выражениями:

$$\mathcal{F}_B[u](\xi) = \int\limits_{R_n} \Lambda^{+}_{\gamma}(x', \xi')\, e^{-i(x'', \xi'')}\, u(x)\, (x')^{\gamma}\, dx\,,$$

$$\mathcal{F}^{-1}_B[u](x) = C_{\gamma,n,N} \int\limits_{R_n} \Lambda^{-}_{\gamma}(x', \xi')\, e^{-i(x'', \xi'')}\, u(x)\, (x')^{\gamma}\, dx = C_{\gamma,n,N} \mathcal{F}_B[u](-x).$$

Здесь

$$C_{\gamma,n,N} = \prod_{i=1}^{n} \frac{(2\pi)^{n-N}}{2^{\gamma_i+1}\ \Gamma^2\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\,, \quad (x')^{\gamma} = \prod_{i=1}^{n} (x_i^2)^{\gamma_i/2}.$$

Как видим ядро полного преобразования Фурье-Бесселя состоит из четных и нечетных функций по каждой из переменных $x_1, \dots x_n$. Поэтому $\mathcal{F}_B$-преобразование разбивается на четное и нечетное $\mathcal{F}_B$-преобразования:

$$\mathcal{F}_B = \mathcal{F}_{B,ev} + \mathcal{F}_{B,od}\ .$$

Введем следующие обозначения. Пусть $\alpha = (\alpha', \alpha'')$, α' и α'' целочисленные мультииндексы, размерности n, $N - n$ соответственно. Для этих мультииндексов положим $D^{\alpha}_B = \left(\partial^{\alpha'}_B\right)_{x'} \partial^{\alpha''}_{x''}$, $\left(\partial^{\alpha'}_B\right)_{x'} = \partial^{\alpha_1}_{B_{\gamma_1}} \dots \partial^{\alpha_n}_{B_{\gamma_n}}$, $\partial^{\alpha''}_{x''} = \partial^{\alpha_{n+1}}_{x_{n+1}} \dots \partial^{\alpha_N}_{x_N}$, $\partial_{x_i} = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \dots, N$.

$$\partial^{\alpha_i}_{B_{\gamma_i}} = \begin{cases} B^{\alpha_i/2}_{\gamma_i}, & \alpha_i = 2k_i, \\ \partial_{x_i} B^{(\alpha_i-1)/2}_{\gamma_i}, & \alpha_i = 2k_i + 1 \end{cases}, \quad k_i = 0, 1, 2, \dots, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

В классе четных, достаточно гладких интегрируемых функций оператор D^{α}_B имеет символ $(i\xi)^{\alpha}$:

$$D^{\alpha}_B \varphi = \mathcal{F}^{-1}_B[(i\xi)^{\alpha} \mathcal{F}_B\, \varphi]\,.$$

Далее мы будем использовать следующие формулы (доказательства приведены в [3], [4])

$$\mathcal{F}_B\left[\partial^{\alpha'}_{B_{x'}}\, \partial^{\alpha''}_{x''} \varphi\right](\xi) = (i\xi)^{\alpha}\ \mathcal{F}_B[\varphi](\xi)\,, \tag{1}$$

$$D^{\alpha'}_{B_{\xi'}}\, \partial^{\alpha''}_{\xi''} \mathcal{F}_B\,[\varphi]\,(\xi) = \mathcal{F}_B[(ix)^{\alpha} \varphi(x)](\xi)\,. \tag{2}$$

2. Пространства функций $S_{ev}(R_N)$. Мы используем пространство Л. Шварца основных функций $S(R_N)$, заданных в R_N достаточно быстро убывающих. Обычно в этом пространстве вводится система норм вида $|\langle\varphi\rangle|_k = \sup\limits_{|\alpha|+|\beta|\le k,\ x\in R_n} \left|x^\alpha D_j^\beta \varphi(x)\right|$, $k = 0,1,2,\ldots$. Такая система норм позволяет доказать изоморфизм основного пространства при его преобразовании Фурье. Нашей задачей в этом пункте является введение подобных норм и соответствующих пространств для $\mathcal{F}_B$-преобразования.

Доказательства классической теоремы о непрерывности действия преобразования Фурье в пространстве Шварца обычно используют формулу Лейбница для производных от произведения. Нетрудно видеть, что четные B-производные от произведения не могут быть представлены в виде суммы B-производных сомножителей. Например, легко проверить, что

$$B(f_1\,f_2) = f_2 B f_1 + 2 f_1'\,f_2' + f_1\,B f_1\,.$$

Отсюда ясно, что соответствующая формула Лейбница для целых степеней оператора Бесселя включает в себя и четные и нечетные порядки производных. Четное преобразование Фурье-Бесселя приспособлено исключительно для работы с операторами B^m четного порядка $2m$. Теперь отметим, что формулу Лейбница для $B^m(f_1\,f_2)$ можно записать используя только операторы B^m и ∂_B^m (см. [2], [3]) в виде:

$$B_\gamma^s(f_1\,f_2) = \sum C_{\gamma,j_1,j_2}^{s,i_1,j_1} x_1^{-l} D_{x_1}^{i_1} B_{x_1}^{j_1} f_1 \cdot D_{x_1}^{i_2} B_{x_1}^{j_2} f_2\,, \tag{3}$$

где $C_{\nu,i_2,j_2}^{s,i_1,j_1}$– определённые постоянные, причём

$$C_{\gamma,i_2,j_2}^{s,0,0} = \begin{cases} 1, & j_2 = s, \\ 0, & j_2 < s \end{cases}$$

и суммирование в (3) ведется по индексам $l + 2j_1 + 2j_2 + i_1 + i_2 = s,\ i_1 \le 1,\ i_2 \le 1,\ l \le 2s-1$. При $\gamma = 0$ постоянные $C_{0,i_2,j_2}^{s,i_1,j_1}$ есть обычные биномиальные коэффициенты.

Формула (3) показывает, что переход в формуле Лейбница к операторам типа ∂_B^α приводит к операторам, имеющим особенность на гиперплоскостях $x_i = 0$, а это вызывает существенные трудности при определении принадлежности произведений функций к соответствующим основным классам.

Пример. Пусть в $S_{ev}(R_1)$ задана система норм вида

$$|\langle\varphi\rangle|_k' = \sup_{|2p+m\le k,\ x\in R_1} \left|x^{2p}\,(B_\gamma^m)_x \varphi(x)\right|\,, \quad k = 0,1,2,\ldots\,.$$

Рассмотрим четное преобразование Фурье-Бесселя $F_B = \mathcal{F}_{B,ev}$ и покажем что в этой системе норм оно непрерывно действует из S_{ev} в S_{ev}. Имеем

$$|\langle\widehat{\varphi}\rangle|_k' = \sup_{2p+m\le k,\ \xi\in R_1} \left|\xi^{2p}\,B_\gamma^m \widehat{\varphi}(x)\right| = \sup_{2p+m\le k,\ \xi\in R_1} \left|\mathcal{F}_{B,ev}[\,B_\gamma^m(x^{2p}\varphi(x))\,]\right|.$$

Теперь, чтобы оценить это выражение $|\langle\varphi\rangle|_k'$-нормами, необходимо воспользоваться формулой (3), затем выделить окрестность нуля и внешность этой окрестности. Наибольшую трудность имеет оценивание через $|\langle\widehat{\varphi}\rangle|_k'$-норму функции в окрестности нуля, поэтому проще не пользоваться формулой (3), а записать другую формулу в которой производные и B-производные не подвергнуты коммутации, что тоже приводит большим техническим сложностям.

Можно упростить эту задачу, введя следующую систему норм в основном пространстве $S_{ev} = S_{ev}(R_N)$

$$|\langle\varphi\rangle|_k = \max\left\{ \sup_{|\alpha|+|\beta|\le k,, x\in R_n} \left|x^\alpha D^\beta_{B_\gamma}\varphi(x)\right|, \sup_{|\alpha|+|\beta|\le k,, x\in R_n} \left| D^\beta_{B_\gamma}(x^\alpha\varphi(x))\right| \right\}, \qquad (4)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots .$$

Кроме того, необходимо потребовать, чтобы в (4) всегда выполнялось условие

$$\alpha_i + \beta_i = 2k_i, \quad k_i = 0, 1, 2, \dots, \quad i = 1, \dots, n, \qquad (5)$$

т.е. числа α_i и β_i, отвечающие одному и тому же индексу i, должны быть одинаковой четности.

Нормы (4) определяют топологию в S_{ev}. В частности, последовательность функций u_m сходится к u в S_{ev}, если она сходится по каждой из этих норм, когда индекс k пробегает все неотрицательные числа. Пространство $S_{ev}(R_N)$ снабженное системой норм (4), является пространством Фреше (т.е. полным метризуемым пространством).

Теорема 1. *При выполнении условия* (5) $\mathfrak{F}_\mathfrak{B}$*-преобразование осуществляет непрерывный (в обе стороны) изоморфизм пространства* S_{ev}, *т.е. для любого неотрицательного целого числа* k *выполняется неравенство*

$$|\langle \mathfrak{F}_B[\varphi]\rangle|_k \le |\langle\varphi\rangle|_{k_1} .$$

□ Пусть $\varphi \in S_{ev}$ и мультииндексы α и β состоят из произвольных целых неотрицательных чисел одинаковой четности по каждому номеру i. По формулам (1), (2), имеем

$$|\xi^\alpha\,\partial^\beta_B\,\mathfrak{F}_B[\varphi](\xi)| = |\xi^\alpha\,\mathfrak{F}_B[(ix)^\beta\,\varphi](\xi)| = |\mathfrak{F}_B\left[D^\alpha_B\left((ix)^\beta\,\varphi(x)\right)\right](\xi)| .$$

Далее рассматриваем наиболее принципиальный для нас случай, когда $n = N = 1$. Будем различать два случая.

Случай 1. Предположим, что число β четное равное $2m$. Тогда (при этом α тоже четное)

$$(ix)^\beta\,\varphi = \psi(x) \in S_{ev}$$

и

$$|\xi^\alpha\,\partial^\beta_B\,\mathfrak{F}_B[\varphi](\xi)| = |\xi^\alpha\,\mathfrak{F}_B[\psi](\xi)| = 2|F_B[B^k\psi]| < \infty .$$

При выполнении условия (5) функция $D^\alpha_B\left((ix)^\beta\,\varphi(x)\right) = B^{\alpha/2}\left((ix)^{2m}\,\varphi(x)\right)$ четная, поэтому

$$\mathfrak{F}_B\left(\partial^\alpha\left[(ix)^\beta\,\varphi(x)\right)\right](\xi) = 2F_B\left[B^{\alpha/2}\left((ix)^{2m}\,\varphi(x)\right)\right](\xi) =$$

$$= 2\int\limits_{R_N} \Lambda^+(x',\xi')\,e^{-ix''\xi''}\,B^{\alpha/2}\left((ix)^{2m}\,\varphi(x)\right)\,(x')^\gamma\,dx .$$

Ясно, что для любого натурального числа p функция ψ определяется формулой

$$\psi(x) = (1+|x|^{2p})B^{\alpha/2}\left((ix)^{2m}\varphi(x)\right) \in S_{ev}(R_N)\,,$$

и поэтому в рассматриваемом случае

$$|\xi^\alpha\,\partial_B^\beta\,\mathcal{F}_B[\varphi](\xi)| =$$

$$= 2\left|\int\limits_{R_N}\frac{\Lambda^+(x',\xi')\,e^{-ix''\xi''}}{1+|x|^{2p}}\,(1+|x|^{2p})D_B^\alpha\left((ix)^\beta\,\varphi(x)\right)\,(x')^\gamma\,dx\right| \leqslant C|\langle\varphi\rangle|_{k_1}\,.$$

Случай 2. Предположим теперь, что число β нечетное равное $2m_1{+}1$ (при этом α тоже нечетное, положим $\alpha = 2m_2{+}1$). Из определения пространства S_{ev} следует, что $\psi(x) = x^{2m}\varphi$ — четная функция. Тогда $x^\beta\,\varphi = x\,x^{2m}\varphi = x\,\psi(x) \in S$, $\psi \in S_{ev}$. В этом случае

$$\left|\xi^\alpha\,\partial_B^\beta\,\mathcal{F}_B[\varphi](\xi)\right| = 2\left|\xi^\alpha\,\partial_B^\beta\,F_B[\varphi](\xi)\right| = \left|\xi^\alpha\int\limits_0^\infty\frac{x\xi}{\gamma+1}\,j_{\frac{\gamma+1}{2}}(x\xi)\;x\psi(x)\;x^\gamma\,dx\right| =$$

$$= \left|\xi^{\alpha-1}\int\limits_{R_1^+}\frac{x\xi^2}{\gamma+1}\,j_{\frac{\gamma+1}{2}}(x\xi)\;x\psi(x)\;x^\gamma\,dx\right| = \left|\xi^{2k}\int\limits_{R_n}\partial_x j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi)\;x\psi(x)\;x^\gamma\,dx\right| =$$

$$= \left|\xi^{2k}\int\limits_{R_1^+}j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi)\;\frac{1}{x^\gamma}\partial_x\left(x^{\gamma+1}\psi(x)\right)\;x^\gamma\,dx\right|.$$

Функция

$$\psi_1 = \frac{1}{x^\gamma}\partial_x\left(x^{\gamma+1}\psi(x)\right) = \psi(x) + \frac{1}{x}\,\psi'(x)$$

четная (x^γ рассматривается здесь как четная $= (x^2)^{\gamma/2}$, следовательно $x^{\gamma+1}\psi(x)$ — нечетная, а производная нечетной функции — четная функция) гладкая и легко проверить, что $\psi_1 = O(x^{2m+\gamma})$, $x \to 0$. Поэтому

$$\left|\xi^\alpha\,\partial_B^\beta\,\mathcal{F}_B[\varphi](\xi)\right| = \left|\int\limits_{R_n}j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi)\;B^k\psi_1\;x^\gamma\,dx\right| < \infty\,.$$

Воспользовавшись формулой Лейбница, так же как и в первом случае, получим

$$\left|\xi^\alpha\,\partial_B^\beta\,\mathcal{F}_B[\varphi](\xi)\right| \le C\,\|\varphi\|_{S_{ev}}\,. \quad \blacksquare$$

Результат применения оператора Бесселя B_{γ_i} к функции четной по i-ой переменной снова функция четная по i-ой переменной для всех $i = 1,\ldots,i$. Далее функции четные по каждой из переменных $x_1,\ldots,x_n$ будем называть просто четными.

Применение ∂_B^α-производной нечетного порядка дает нечетную функцию в виде производной первого порядка от четной функции. Это приводит к классу основных функций, представленных в виде суммы четной и производной от четной функции

$$\varphi(x) = \varphi_{ev}(x) + \varphi_{od}(x)\,, \qquad \varphi_{od}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_i}\,, \tag{6}$$

где φ_{ev}, $\psi(x) \in S_{ev}$ — четные функции. Для функций (6) имеет место формула

$$\mathfrak{F}_B[\varphi](\xi) = 2^n \widehat{\varphi}(\xi) + 2i \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\xi_i} B_{\gamma_i} \mathfrak{F}_{od^i} \widehat{\psi}^{\,i}(\xi)\,, \tag{7}$$

где знак $\widehat{\cdot}$ означает применение четного преобразования Фурье-Бесселя, $\widehat{\cdot}^{\,i}$ — одномерное четное преобразование Фурье-Бесселя по переменной x_i и, наконец, $\mathfrak{F}_{od^i}$ — нечетное преобразование Фурье-Бесселя по всем переменным, кроме x_i. Действительно,

$$\mathfrak{F}_B[\varphi] = \mathfrak{F}_{ev}\varphi_{ev}(\xi) - i\mathfrak{F}_{od}\left[\sum_{i=1}^{n} \partial_i \varphi\right](\xi) =$$

$$= 2\widehat{\varphi_{ev}}(\xi) + \int\limits_{R_N^+} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{h}_\gamma(x^i, \xi^i)\, \frac{1}{\xi_i}\, \partial_{x_i} j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(x_i\xi_i)\, \partial_{x_i}\psi(x)\, x^\gamma\, dx\,,$$

где $\mathbf{h}_\gamma(x^i, \xi^i)$ произведение нечетных j-функций Бесселя, в которое не входит i-я функция. Отсюда

$$\mathfrak{F}_B[\varphi] = 2\widehat{\varphi_{ev}}(\xi) + \int\limits_{R_{N-1}^+} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{h}_\gamma(x^i, \xi^i) \int\limits_0^\infty \frac{1}{\xi_i}\, \partial_{x_i} j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(x_i\xi_i)\, \partial_{x_i}\psi(x)\, x_i^{\gamma_i}\, dx_i\, \left(x^i\right)^{\gamma^i} dx^i\,,$$

Теперь формула (7) получается интегрированием по частям во внутреннем интеграле.

3. Пространства основных функций, построенные по типу пространств Лизоркина. Формула (7) показывает, что применение $\mathfrak{F}_B$-преобразования к ∂_B-производным приведет в функциям с особенностью в начале координат и на весовых координатных гиперплоскостях. Естественно ввести класс функций, $\mathfrak{F}_B$-преобразование которых равно нулю в начале координат и на весовых координатных гиперплоскостях вместе со всеми производными и ∂_B-производными. Такие классы, следуя [4], вводятся следующим образом.

Положим $x = (x_i, x^i)$, $x^i = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_N)$ и пусть

$$\mathbf{\Psi}_\gamma(R_N^+) = \{\psi:\ \psi \in S_{ev},\ \partial_{B_i}^\beta \psi(0, x^i) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n\,,\ \ \forall \beta \in Z^+\}\,.$$

Тогда

$$\mathbf{\Phi}_\gamma(R_N^+) = \{\phi:\ \phi = \mathfrak{F}_B[\psi]\,,\ \psi \in \mathbf{\Psi}_\gamma(R_N^+)\}\,.$$

Введем весовую линейную форму

$$(F, j_\gamma) = \int\limits_{R_N} f(x)\; g(x)\; (x')^\gamma\, dx\,, \tag{8}$$

где $(x')^\gamma = \prod\limits_1^n (x_i^2)^{\gamma_i/2}$.

Теорема 2. *Класс $\mathbf{\Phi}_\gamma(R_N^+)$ состоит из тех и только тех функций $\varphi(x){\in}S_{ev}(R_N^+)$, которые ортогональны (8) всем многочленам:*

$$\varphi(x){\in}S_{ev}(R_N^+)\,, \quad \int\limits_{R_N^+} (x')^m \varphi(x)\, x^\gamma\, dx{=}0\,, \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi{\in}\mathbf{\Phi}_\gamma(R_N^+)\,.$$

Для четного преобразования Фурье-Бесселя [4] функции $\varphi \in \mathbf{\Phi}$ ортогональны (8) всем многочленам, четным по каждой из переменных $x_1, \ldots, x_n$:

$$\varphi(x){\in}S_{ev}(R_N^+)\,, \quad \int\limits_{R_N^+} (x')^{2m} \varphi(x)\, x^\gamma\, dx{=}0, \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi{\in}\mathbf{\Phi}_\gamma(R_N^+)\,.$$

☐ Пусть $\varphi{\in}\mathbf{\Phi}_\gamma(R_N^+)$ и $\psi = \mathcal{F}_B[\phi]$. Тогда

$$\int\limits_{R_N^+} x^\alpha\, \phi(x)\, x^\gamma\, dx = \frac{C(\gamma)}{C(\gamma)} \int\limits_{R_N^+} \Lambda_\gamma^-(x,0) x^\alpha\, \phi(x)\, x^\gamma\, dx =$$

$$= C^{-1}(\gamma)\, \frac{1}{i^\alpha}\, \mathcal{F}_B^{-1}[x^\alpha \phi(x)](\xi)\bigg|_{\xi=0} = C^{-1}(\gamma) \frac{1}{i^\alpha} \partial_B^\alpha \psi(\xi)\bigg|_{\xi=0} = 0\,.$$

Ясно, что эти рассуждения, проведенные в обратном порядке, доказывают обратное утверждение. Доказательство (7) приведено в [4]. ■

Интегралы вида

$$\int\limits_{R_N^+} (x')^\alpha\, \phi(x)\, (x')^\gamma\, dx$$

называются весовыми моментами функции $\varphi(x)$ порядка α. Таким образом, пространство $\mathbf{\Phi}_\gamma(R_N^+)$ состоит из тех и только тех функций $\varphi(x){\in}S_{ev}(R_N^+)$, для которых все весовые моменты равны нулю.

Литература

1. Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи / М.: Наука, 1997.
2. Киприянов И.А., Катрахов В.В. Об одном классе одномерных сингулярных псевдодифференциальных операторов / Математ. сборн. – 1977. – 104,№1.
3. Катрахов В.В., Ляхов Л.Н. Полное преобразование Фурье-Бесселя и алгебра сингулярных псевдодифференциальных операторов // Диффер. урав. – 2011. – 47,№5. – С.681-695.

4. Lyakhov L.N., Raykhelgauz L.B. Even and odd Fourier-Bessel transformations and some singular differential equations // Cambridge Scientific Publishers, 2012. /Analytic Methods of Analysis and Differential Equations. AMADE-2009. C.107-112.
5. Ляхов Л.Н. В-гиперсингулярные интегралы и их приложения к описанию функциональных классов Киприянова и к интегральным уравнениям с B-потенциальными ядрами / Липецк: ЛГПУ, 2007. – 232 с.

FOURIER-BESSEL'S FULL TRANSFORMATION OF SOME MAIN FUNCTIONAL CLASSES

L.N. Lyakhov, S.A. Roschupkin

Voronezh State University
Universitetskaya Sq., 1, Voronezh, 394006, Russia, e-mail: levnlya@mail.ru
Yelets State University of I.A. Bunin,
Kommunarov St., 28, Yelets, 399770, Russia, e-mail: roshupkinsa@mail.ru

Abstract. The full Fourier-Bessel $\mathcal{F}_B$ transformation proposed by I.A. Kipriyanov and V.V. Katrakhov is applied to study the singular differential operator ∂_B^α equal to the operator Bessel at the degree $\frac{\alpha}{2}$ when α is even and it is the derivative of the Bessel operator at the degree $\frac{\alpha-1}{2}$ when α is odd. Classes of main functions adapted to the operator ∂_B^α are built. In particular, the class S_{ev} is introduced which consists of quickly decreasing functions being even on each of variables on which ∂_B^α-Bessel's operator acts. The system of norms are constructed which is generated by the operator ∂_B^α. Other class $\mathbf{\Phi}_\gamma$ of main functions is built on the basis of the space as well as Lozorkin's spaces of main functions disappearing on corresponding coordinate hyperplanes. The full Fourier-Bessel transformation is investigated $\mathcal{F}_B$ of introduced classes of functions and the orthogonality theorem of $\mathbf{\Phi}_\gamma$ functions to polynomials relative to scalar composition with the weight is proved.

Key words: Fourier-Bessel's full transformation, Bessel's operator, ∂_B-Bessel's operator.