MSC 65D07

# ВОССТАНОВЛЕНИЕ РАЗРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ РАЗРЫВНЫМИ ИНЕТРЛИНАЦИОННЫМИ СПЛАЙНАМИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТРАПЕЦЕВИДНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

**О.Н. Литвин, Ю.И. Першина**

Украинская инженерно-педагогическая академия,
ул. Университетская, 16, Харьков, 61003, Украина, e-mail: yulia_pershina@mail.ru

**Аннотация.** В работе предложен общий метод построения разрывных сплайн-интерлинантов для прямоугольных трапецевидных элементов с целью использования их для приближения разрывных функций двух переменных, которые тоже могут иметь (а могут и не иметь) разрывы первого рода на линиях, образующих прямоугольные трапецевидные элементы. Построенные сплайны, как частный случай, включают в себя разрывные сплайны и непрерывные сплайны. Сформулированы и доказаны интерлинационные свойства таких разрывных конструкций.

**Ключевые слова:** разрывная функция, разрывная интерлинация функций двух переменных, трапецевидные элементы.

**Введение.** Задача приближения непрерывных функций непрерывными сплайнами одной и нескольких переменных с достаточной полнотой описана во многих работах (см. например, [1-4]). На практике использование кусочно-аналитических приближений, заданных разными формулами (полиномами соответствующей степени) в точках каждого элемента разбиения области приближения приводит иногда к нахождению большого количества неизвестных параметров. Это привело к появлению неконформных элементов в методе конечных элементов [5]. Аналогичная задача исследовалась в работах Попова Б.А. [6] и других авторов, где рассматривалось приближение непрерывных и непрерывно-дифференцированных функций с помощью разрывных сплайнов в чебышевской норме (равномерное приближение).

В работе [7] решаются одномерные многоэктсремальные задачи, которые включают случай заданных и незаданных точек разрыва (а так же объединение этих случаев) и описаны приемы для решения частично целочисленных задач путем приведения их к вспомогательной задаче с заданными точками разрыва. В работе [8] исследуется разрывный метод Галеркина высокого порядка. Для изучения схем высокого порядка особенный интерес вызывают задачи, решением которых являются разрывные функции. Впервые разрывный метод Галеркина был описан в [9] и развит в дальнейшем авторами применительно к различным приложениям [10]. В отличие от классического метода Галеркина, разрывной метод Галеркина аппроксимирует решение функциями, разрывными на границах ячеек расчетной сетки.

Неравномерная сходимость рядов Фурье для разрывных функций, и, в частности колебательное поведение конечной суммы уже были проанализированы Wilbraham [11] в 1848 году. Фурье-спектральные методы появились в качестве мощной вычислительной техники для моделирования сложных гладких физических явлений. Их экспоненциальная скорость сходимости зависит от гладкости и периодичности функции в интересующей области. Если функция имеет разрыв хотя бы в одной точке, скорость сходимости ухудшается до первого порядка и колебания развиваются рядом с разрывами. Такое поведение называется явлением Гиббса. История явления Гиббса была описана в статье [12], в которой показывается, что знание коэффициентов разложения достаточно для получения значений кусочно-гладкой функции с тем же порядком точности, как и в гладком случае. Это очень хороший способ восстановления значения функции $f(x)$ в точке при условии, что функция является гладкой. Но если $f(x)$ является разрывной функцией, то формула Фурье не является хорошим приближением. Фильтрация является классическим инструментом для снижения влияния явления Гиббса в разложении Фурье. В статье [13] обсуждается использование фильтров в разложении Фурье от разрывных функций. Тем не менее, фильтрация не полностью удаляет явление Гиббса.

Таким образом, в указанных работах исследовалось приближение непрерывных функций с помощью непрерывных и разрывных сплайнов. Но общей теории таких приближений не существует. Также не существует общей теории приближения разрывных функций разрывными сплайнами. В настоящей работе авторы предлагают общую теорию построения разрывных сплайнов, множество которых, как частный случай, включает множество непрерывных и непрерывно-дифференцируемых до заданного порядка сплайнов, которые могут иметь разрывы первого рода или разрывные частные производные в заданных точках или на заданном множестве линий — границ элементов. Благодаря тому, что в каждом из элементов разбиения построенные авторами разрывные сплайны, по определению, могут приближать функцию $f(x, y)$ независимо друг от друга (это могут быть операторы интерполяции или аппроксимации), то, в результате, появляется возможность найти оценки погрешности (в некоторых случаях точные) приближения функций как непрерывных, так и разрывных. При этом, если разрывы приближаемой функции существуют на линях между элементами, то предложенный метод приближения позволяет получить наилучшие приближения. Если же приближаемая функция имеет разрывы в точках или на линиях, пересекающих один или несколько элементов, то точные оценки погрешности пока еще неизвестны.

Задачи приближения разрывных функций возникают значительно чаще, чем задачи приближения непрерывных функций. Например, в компьютерной томографии при исследовании внутренней структуры тела полезно учитывать его неоднородность, то есть разную плотность в разных частях тела; при исследовании коры Земли с помощью данных с кернов буровых скважин возникает задача восстановления внутренней структуры кори между скважинами. При этом очевидным является тот факт, что плотность грунта в разных точках коры является неоднородной и чаще всего имеет разрывы первого рода в точках поверхностей, которые отделяют одну составляющую коры от другой (чернозем, песок, глина, гранит и т.д.). Все развитие вычислительной и прикладной математики говорит о том, что использование каждой дополнительной информации об исследуемом объекте может привести к более точному и качественному восстановлению этого объекта.

Таким образом, актуальной является разработка и исследование теории приближения разрывных функций с помощью разрывных сплайнов.

В статье [14] авторами были построены разрывные линейные интерполяционные сплайны для приближения функций одной переменной, имеющей разрывы первого рода. А также был разработан алгоритм нахождения разрывов функции одной переменной и алгоритм оптимального нахождения узлов интерполяционного линейного сплайна для приближения разрывной функции одной переменной [15]. В [16] был предложен метод приближения разрывных функций двух переменных с ректангулированной областью определения разрывными интерполяционными билинейными сплайнами.

Разработанные методы в дальнейшем будут использоваться для решения плоской задачи радоновской компьютерной томографии. Для этого целесообразнее использовать операторы интерлинации функций [17], поскольку эти операторы восстанавливают (возможно, приближенно) по известным их следам на заданной системе линий. То есть, они дают возможность строить операторы, интегралы от которых по указанным линиям будут равняться интегралам от самой восстанавливаемой функции. Отсюда следует, что интерлинация является математическим аппаратом, естественно связанным с задачей восстановления характеристик объектов по известным их проекциям. В работе [18] был предложен метод приближения разрывных функций двух переменных с ректангулированной областью определения разрывными инетрлинационными сплайнами. Были также построены разрывные интерлиационные сплайны для приближения функций двух переменных, область определения которых разбивается на прямоугольные треугольники [19].

Пусть задана разрывная функция двух переменных $f(x, y)$ в области $D = [0, 1]^2$. Будем считать, что область $D$ разбивается прямыми $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_m = 1$, $y_0 = 0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_n = 1$ на прямоугольные элементы, а каждый прямоугольник разбивается наклонной линией на прямоугольную трапецию и прямоугольный треугольник. Трапеции и треугольники не вкладываются друг в друга, и их стороны не пересекаются. Функция $f(x, y)$ имеет разрывы первого рода на границах между этими трапециями и треугольниками (не обязательно между всеми).

Целью работы является построение и исследование операторов разрывной сплайн-интерлинации таких, которые в каждой трапеции являются операторами сплайн-интерлинации функции $f(x, y)$.

**1. Метод построения приближающего разрывного сплайн-интерлинанта.** Если $(x_i, y_j)$ – узел, в котором находится прямой угол прямоугольника, то может встретиться восемь типов трапеций:

$$\mathrm{TP}_{ij}^{(1)} = \{x_i < x < x_{i+1}, y_j < y < g_{j+1}^{(1)}(x)\},$$

$$\mathrm{TP}_{ij}^{(2)} = \{x_{i-1} < x < x_i, y_j < y < g_{j+1}^{(2)}(x)\},$$

$$\mathrm{TP}_{ij}^{(3)} = \{x_i < x < x_{i+1}, g_{j-1}^{(3)}(x) < y < y_j\},$$

$$\mathrm{TP}_{ij}^{(4)} = \{x_i < x < x_{i+1}, g_{j-1}^{(4)}(x) < y < y_j\},$$

$$\mathrm{TP}_{ij}^{(5)} = \{x_i < x < q_{i+1}^{(5)}(y), y_j < y < y_{j+1}\},$$

$$\mathrm{TP}_{ij}^{(6)} = \{q_{i-1}^{(6)}(y) < x < x_i, y_j < y < y_{j+1}\},$$

$$\mathrm{TP}_{ij}^{(7)} = \{q_{i-1}^{(7)}(y) < x < x_i, y_{j-1} < y < y_j\},$$

$$\mathrm{TP}_{ij}^{(8)} = \{x_i < x < q_{i+1}^{(8)}(y), y_{j-1} < y < y_j\},$$

Считаем, что на каждой из сторон заданных трапеций функция $f(x,y)$ может иметь (а может и не иметь) разрывы первого рода.

Рассмотрим трапецию типа $\mathrm{TP}_{\mathrm{ij}}^{(1)}$. Построение сплайнов основано на следующих данных.

1. Следы функции $f(x,y)$ справа и слева на прямой $x = x_i$, соответственно:

$$\varphi p_i(y) = \lim_{x\to x_i+0} f(x,y) = f(x_i+0,y)\,,$$

$$\varphi m_i(y) = \lim_{x\to x_i-0} f(x,y) = f(x_i-0,y)\,.$$

При этом значения в угловых точках $(x_i, y_j)$ и $(x_i, g_{j+1}^{(1)}(x_i))$ определяются следующим образом:

$$\varphi pp_{ij} = \varphi p_i(y_j) = f(x_i+0, y_j+0)\,,$$

$$\varphi pm_{i,j+1} = \varphi p_i(g_{j+1}^{(1)}(x_i)) = f(x_i+0, g_{j+1}^{(1)}(x_i)-0)\,.$$

2. Следы функции $f(x,y)$ справа и слева на прямой $x = x_{i+1}$, соответственно:

$$\varphi p_{i+1}(y) = \lim_{x\to x_{i+1}+0} f(x,y) = f(x_{i+1}+0,y)\,,$$

$$\varphi m_{i+1}(y) = \lim_{x\to x_{i+1}-0} f(x,y) = f(x_{i+1}-0,y)\,.$$

При этом значения в угловых точках $(x_{i+1}, y_j)$ и $(x_{i+1}, g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1}))$ определяется следующим образом:

$$\varphi mp_{i+1,j} = \varphi p_{i+1}(y_j) = f(x_{i+1}-0, y_j+0)\,,$$

$$\varphi mm_{i+1,j+1} = \varphi m_{i+1}(g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1})) = f(x_{i+1}-0, g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1})-0)\,.$$

3. Следы функции $f(x,y)$ над и под прямой $y = y_j$, соответственно:

$$\psi p_j(x) = \lim_{y\to y_j+0} f(x,y) = f(x,y_j+0)\,,$$

$$\psi m_j(x) = \lim_{y\to y_j-0} f(x,y) = f(x,y_j-0)$$

и значения в соответствующих угловых точках

$$\psi pp_{i,j} = \psi p_j(x_i) = f(x_i + 0, y_j + 0)\,,$$
$$\psi mp_{i+1,j} = \psi p_j(x_{i+1}) = f(x_{i+1} - 0, y_j + 0)\,.$$

4. Следы функции $f(x,y)$ под и над прямой $y = g^{(1)}_{j+1}(x)$, соответственно:

$$\psi m_{j+1}(x) = f(x, g^{(1)}_{j+1}(x) - 0)\,,$$
$$\psi p_{j+1}(x) = f(x, g^{(1)}_{j+1} + 0)$$

и значения в соответствующих угловых точках

$$\psi pm_{i,j+1} = \psi m_{j+1}(x_i) = f(x_i + 0, g^{(1)}_{j+1}(x_i) - 0)\,,$$
$$\psi mm_{i+1,j+1} = \psi m_{j+1}(x_{i+1}) = f(x_{i+1} - 0, g^{(1)}_{j+1}(x_{i+1}) - 0)\,.$$

**Определение.** *Будем называть разрывным интерлинационным силайном в траиецевидном элементе* $\mathrm{TP}^{(1)}_{ij}$ *следующую функцию:*

$$Lf(x,y) = (L_1 + L_2 - L_2L_1)f(x,y)\,, \tag{1}$$

где

$$L_1f(x,y) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}\varphi p_i(y) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\varphi m_{i+1}(y)\,,$$

$$L_2f(x,y) = \frac{y - y_j}{g^{(1)}_{j+1}(x) - y_j}\psi m_{j+1}(x) + \frac{y - g^{(1)}_{j+1}(x)}{y_j - g^{(1)}_{j+1}(x)}\psi p_j(x)\,.$$

**Теорема 1.** *Если следы функции* $f(x,y)$ *удовлетворяют соотношениям:*

$$\varphi pp_{ij} = \psi pp_{ij}\,, \qquad \varphi mp_{i+1,j} = \psi mp_{i+1,j}\,,$$

$$\varphi pm_{i,j+1} = \psi pm_{i,j+1}\,, \qquad \varphi mm_{i+1,j+1} = \psi mm_{i+1,j+1}\,,$$

*то оиератор (1) интерлинирует* $f(x,y)$ *на* $\partial\mathrm{TP}^{(1)}_{ij}$: $Lf(x,y)|_{\partial\mathrm{TP}^{(1)}_{ij}} = f(x,y)|_{\partial\mathrm{TP}^{(1)}_{ij}}$, *то есть*

$$Lf(x_i,y) = \varphi p_i(y)\,, \qquad Lf(x_{i+1},y) = \varphi m_{i+1}(y)\,, \tag{2}$$

$$Lf(x,y_j) = \psi p_j(x)\,, \qquad Lf(x, g^{(1)}_{j+1}(x)) = \psi m_{j+1}(x)\,. \tag{3}$$

□ Чтобы проверить выполнение этих условий, найдем

$$L_2L_1f(x,y) = L_2\Big(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}\varphi p_i(y) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\varphi m_{i+1}(y)\Big) =$$

$$= \frac{y - y_j}{g^{(1)}_{j+1}(x) - y_j}\Big[\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}\varphi pm_{i+1,j} + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\varphi mm_{i+1,j+1}\Big] + \tag{4}$$

$$+\frac{y-g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j-g_{j+1}^{(1)}(x)}\left[\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\varphi pp_{i,j}+\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\varphi mp_{i+1,j}\right].$$

Проверим выполнение условий (2), (3):

$$Lf(x_i,y)=L_1f(x_i,y)+L_2f(x_i,y)-L_2L_1f(x_i,y)=$$

$$=\varphi p_i(y)+\frac{y-y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x_i)-y_j}\psi m_{j+1}(x_i)+\frac{y-g_{j+1}^{(1)}(x_i)}{y_j-g_{j+1}^{(1)}(x_i)}\psi p_j(x_i)-$$

$$-\frac{y-y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x_i)-y_j}\varphi pm_{i+1,j}-\frac{y-g_{j+1}^{(1)}(x_i)}{y_j-g_{j+1}^{(1)}(x_i)}\varphi pp_{i,j}=\varphi p_i(y)\,,$$

поскольку из условий теоремы имеем, что $\psi m_{j+1}(x_i)=\psi pm_{i,j+1}=\varphi pm_{i,j+1}$ и $\psi p_j(x_i)=\psi pp_{i,j}=\varphi pp_{i,j}$. Далее,

$$Lf(x_{i+1},y)=L_1f(x_{i+1},y)+L_2f(x_{i+1},y)-L_2L_1f(x_{i+1},y)=$$

$$=\varphi m_{i+1}(y)+\frac{y-y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1})-y_j}\psi m_{j+1}(x_{i+1})+\frac{y-g_{j+1}^{(1)}(x_{j+1})}{y_j-g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1})}\psi p_j(x_{i+1})-$$

$$-\frac{y-y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1})-y_j}\varphi mm_{i+1,j+1}-\frac{y-g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1})}{y_j-g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1})}\varphi mp_{i+1,j}=\varphi m_{i+1}(y)\,,$$

поскольку из условий теоремы имеем, что $\psi m_{j+1}(x_{i+1})=\psi mm_{i+1,j+1}=\varphi mm_{i,j+1}$ и $\psi p_j(x_{i+1})=\psi mp_{i+1,j}=\varphi mp_{i+1,j}$. Наконец,

$$Lf(x,y_j)=L_1f(x,y_j)+L_2f(x,y_j)-L_2L_1f(x,y_j)=$$

$$=\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\varphi p_i(y_j)+\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\varphi m_{i+1}(y_j)+$$

$$+\psi p_j(x)-\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\varphi pp_{i,j}-\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\varphi mp_{i+1,j}=\psi p_j(x)\,.$$

$$Lf(x,g_j((1))(x))=L_1f(x,g_j^{(1)}(x))+L_2f(x,g_j^{(1)}(x))-L_2L_1f(x,g_j^{(1)}(x))=$$

$$=\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\varphi p_i(g_{j+1}^{(1)}(x))+\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\varphi m_{i+1}(g_{j+1}^{(1)}(x))+$$

$$+\psi m_{j+1}(x)-\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\varphi pm_{i+1,j}-\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\varphi mm_{i+1,j+1}]=\psi m_{j+1}(x)\,.$$

Таким образом, использование интерлинационных свойств (2),(3) оператора (1) приводит к интерлинации $f(x,y)$ на $\partial\mathrm{TP}_{ij}^{(1)}$. ■

**Замечание.** Перестановочность операторов отсутствует, т.е. $L_1L_2 \neq L_2L_1$.

Для нахождения общего вида остаточного члена и его оценки воспользуемся результатом работы [20], в которой представлен остаточный член для приближения непрерывной функции трех переменных оператором интерфлетации на параллелепипеде с криволинейной гранью.

**Теорема 2.** *Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда для остаточного члена* $Rf(x,y) = (I-L)f(x,y)$ *выполняется равенство*

$$Rf(x,y) =$$
$$= \sum_{k=1}^{2}\sum_{m=1}^{2} P_{1,k}(x)P_{2,m}(x,y)\int\limits_{x_k}^{x}\int\limits_{y_m(x)}^{y} f^{(p,q)}(\xi,\eta)\frac{(x_k-\xi)^{p-1}(y_m-\eta)^{q-1}}{(p-1)!(q-1)!}d\xi d\eta\,, \tag{5}$$

*где* $1 \le p,q \le 2$, $y_1(x) = y_j, y_2(x) = g^{(1)}_{j+1}(x)$, *а полиномы* $P_{1,k}(x)$, $P_{2,m}(x,y)$ *имеют вид*

$$P_{1,1}(x) = \frac{x-x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}\,, \qquad P_{1,2}(x) = \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\,,$$

$$P_{2,1}(x,y) = \frac{y-y_j}{g^{(1)}_{j+1}(x)-y_j}\,, \qquad P_{2,2}(x,y) = \frac{y-g^{(1)}_{j+1}(x)}{y_j - g^{(1)}_{j+1}(x)}\,.$$

□ Сначала заметим, что поскольку одна из сторон трапеции $\mathrm{TP}^{(1)}_{\mathrm{ij}}$ задана функцией от переменной $x$, то $L_1L_2 \neq L_2L_1$.

Воспользуемся равенством

$$1-(1-l_1)(1-l_2) = l_1 + l_2 - l_2l_2\,,$$

где $l_1, l_2$ – некоторые вещественные числа.

Подставим вместо 1 тождественный оператор $I$, а вместо чисел $l_1, l_2$ операторы $L_1, L_2$, соответственно:

$$I-(I-L_1)(I-L_2) = L_1 + L_2 - L_2L_1 = L\,,$$

то есть получили оператор $Lf(x,y)$. Тогда для остатка $Rf(x,y)$ запишем равенство

$$Rf(x,y) = (I-L)f(x,y) = (I-L_2)(I-L_1)f(x,y)\,. \tag{6}$$

Для доказательства формулы (5) воспользуемся тем фактом, что остаточные члены формулы Лагранжа в интегральной форме по каждой из переменных имеют вид:

$$(I-L_1)f(x,y) = \frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\int\limits_{x_i}^{x}\frac{\partial^p f(\xi,y)}{\partial\xi^p}\frac{(x_i-\xi)^{p-1}}{(p-1)!}d\xi +$$

$$+\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\int\limits_{x_{i+1}}^{x}\frac{\partial^p f(\xi,y)}{\partial\xi^p}\frac{(x_{i+1}-\xi)^{p-1}}{(p-1)!}d\xi\,,$$

$$(I-L_2)f(x,y)=\frac{y-g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j-g_{j+1}^{(1)}(x)}\int\limits_{y_j}^{y}\frac{\partial^q f(x,\eta)}{\partial\eta^q}\frac{(y_j-\eta)^{q-1}}{(q-1)!}d\eta+$$

$$+\frac{x-y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x)-y_j}\int\limits_{g_{j+1}^{(1)}(x)}^{y}\frac{\partial^q f(x,\eta)}{\partial\eta^q}\frac{(g_{j+1}^{(1)}(x)-\eta)^{q-1}}{(q-1)!}d\eta\,.$$

Подставим эти равенства в формулу (6)

$$Rf(x,y)=(I-L_2)(I-L_1)f(x,y)=$$

$$=\frac{y-g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j-g_{j+1}^{(1)}(x)}\left(\int\limits_{y_j}^{y}\frac{\partial^q f(x,\eta)}{\partial\eta^q}\frac{(y_j-\eta)^{q-1}}{(q-1)!}d\eta+\right.$$

$$\left.+\frac{x-y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x)-y_j}\int\limits_{g_{j+1}^{(1)}(x)}^{y}\frac{\partial^q f(x,\eta)}{\partial\eta^q}\frac{(g_{j+1}^{(1)}(x)-\eta)^{q-1}}{(q-1)!}d\eta\right)\times$$

$$\times\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\left(\int\limits_{x_i}^{x}\frac{\partial^p f(\xi,y)}{\partial\xi^p}\frac{(x_i-\xi)^{p-1}}{(p-1)!}d\xi+\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\int\limits_{x_{i+1}}^{x}\frac{\partial^p f(\xi,y)}{\partial\xi^p}\frac{(x_{i+1}-\xi)^{p-1}}{(p-1)!}d\xi\right).$$

После раскрытия скобок получим равенство (5). ■

Оценим погрешность приближения разрывной функции $f(x,y)$ построенным разрывным интерлинантом $Lf(x,y)$, определенным формулой (1) в трапецевидном элементе $\mathrm{TP}_{\mathrm{ij}}^{(1)}$.

**Теорема 3.** *Пусть $f(x,y)\in C^{p,q}(\mathrm{TP}_{\mathrm{ij}}^{(1)}), p=\overline{1,2}, q=\overline{1,2}$ и выполняются условия теоремы 1, тогда для остаточного члена $Rf(x,y)$ имеет место оценка*

$$\|Rf(x,y)\|_{C(\mathrm{TP}_{\mathrm{ij}}^{(1)})}\le M\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\int\limits_{y_j}^{g_{j+1}^{(1)}(x)}|G_1(x,\xi)G_2(x,y,\eta)|d\xi d\eta\,. \qquad (7)$$

где

$$M=\max_{(x,y)\in\mathrm{TP}_{\mathrm{ij}}^{(1)}}|f^{(p,q)}(x,y)|,$$

$$G_1(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\dfrac{(x_i-\xi)^{p-1}}{(p-1)!}, & x_i\le\xi<x\,;\\[2ex] -\dfrac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\dfrac{(x_{i+1}-\xi)^{p-1}}{(p-1)!}, & x\le\xi\le x_{i+1}\,;\end{cases}$$

$$G_2(x,y,\eta)=\begin{cases} \dfrac{y-g^{(1)}_{i+1}(x)}{y_j-g^{(1)}_{i+1}(x)}\dfrac{(y_j-\eta)^{q-1}}{(q-1)!}, & y_j\le\eta<y\,;\\ -\dfrac{y-y_j}{g^{(1)}_{i+1}(x)-y_j}\dfrac{(g^{(1)}_{i+1}(x)-\eta)^{q-1}}{(q-1)!}, & y\le\eta\le g^{(1)}_{i+1}(x)\,. \end{cases}$$

□ Согласно теореме 2, формулу для остаточного члена можно записать в виде

$$Rf(x,y)=\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\int\limits_{y_j}^{g^{(1)}_{j+1}(x)} f^{(p,q)}(\xi,\eta)G_1(x,\xi)G_2(x,y,\eta)d\xi d\eta\,.$$

Используя для этого интеграла неравенство Гельдера, получим

$$|Rf(x,y)|\le\ |f^{(p,q)}(x,y)\|_{L_\mu(\mathrm{TP}^{(1)}_{\mathrm{ij}})}\cdot\left[\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\int\limits_{y_j}^{g^{(1)}_{j+1}(x)}(G_1(x,\xi)G_2(x,y,\eta))^\nu d\xi d\eta\right]^{1/\nu},$$

$$\mu\ge1,\quad \nu\ge1,\qquad \frac{1}{\mu}+\frac{1}{\nu}=1\,.$$

Поэтому для погрешности получим неравенство (7). ■

**Замечание.** Если односторонние следы функции на соответствующих линиях, образующих пределы трапецевидных элементов, то разрывная функция превращается в непрерывную.

**2. Численный эксперимент.** Пусть функция $f(x,y)$ задана в единичном квадрате $[0,1]^2$ таким образом:

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y, & 0.5<x<1, 0.5<y<-2x/5+1;\\ x+y, & 0<x<0.5, 0.5<y<2x/5+3/5;\\ x^2+y^2, & 0<x<0.5, 2/5-2x/5<y<0.5;\\ x^2+y^2, & 0.5<x<1, 2x/5<y<0.5. \end{cases}$$

Тогда на некоторых линиях функция $f(x,y)$ имеет разрывы первого рода, а на некоторых линиях функция непрерывна. Пусть заданы линии

$$x_1=0,\quad x_2=0.5,\quad x_3=1,$$

$$y_1=-\frac{2}{5}x+1,\qquad y_2=\frac{2}{5}x+\frac{3}{5};$$

$$y_3=\frac{2}{5}-\frac{2}{5}x,\qquad y_4=\frac{2}{5}x.$$

Они разбивают область определения функции $f(x,y)$ на восемь трапецевидных элементов (один из углов обязательно является прямым).

Сначала построим разрывный аппроксимационный сплайн на заданной сетке, который исследовался авторами в работе [21]

$$S(x,y) =$$

$$= C_1 \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \frac{y - g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j - g_{j+1}^{(1)}(x)} + C_2 \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \frac{y - g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j - g_{j+1}^{(1)}(x)} +$$
$$+ C_3 \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \frac{y - y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x) - y_j} + C_4 \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \frac{y - y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x) - y_j} \ ,$$

После нахождения коэффициентов методом наименьших квадратов, получим сплайн

$$S(x,y) =$$

$$= \begin{cases} x + y, & 0.5 < x < 1, 0.5 < y < -2x/5 + 1; \\ x + y, & 0 < x < 0.5, 0.5 < y < 2x/5 + 3/5; \\ \dfrac{1.676x + 2.027y + 0.39x^2 - 4.16xy + 2.066}{x - 1}, & 0 < x < 0.5, 2/5 - 2x/5 < y < 0.5; \\ 7.61x - 4.16y + \dfrac{2.1315y}{x} - 1.544, & 0.5 < x < 1, 2x/5 < y < 0.5. \end{cases}$$

Максимальное отклонение приближаемой функции $f(x,y)$ от построенного сплайна $S(x,y)$ равно

$$\max \mid f(x,y) - S(x,y) \mid \approx 0.08\,.$$

Теперь построим на заданной сетке разрывный интерлинационный сплайн $Lf(x,y)$ по формуле (1). Аналитически этот сплайн полностью совпадает с заданной функцией $f(x,y)$, то есть $Lf(x,y) = f(x,y)$.

Итак, предложенный общий метод построения разрывных сплайн-интерлинантов для трапецевидных элементов, на основании доказанной теоремы, обладает интерлинационными свойствами. Численный эксперимент показывает, что интерлинационный разрывный сплайн восстанавливает разрывную функцию на заданной сетке узлов. По этой причине, функции от двух переменных, разрывные в некоторых точках или на некоторых линиях, лучше приближать разрывным сплайн-интерлинантами. При этом оценки гарантированной точности приближения в каждом элементе разбиения получаются лучше, чем при использовании непрерывно-дифференцируемого сплайна.

**Литература**

1. Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения / Москва: Наука, 1984. – 352 с.
2. Варга Р. Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе / М.: Мир, 1974. – 124 с.
3. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций / М.: Наука, 1980. – 352 с.
4. Василенко В.А. Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы. Новосибирск; Наука, 1983. - 215с.
5. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач / М.: Мир, 1980. – 512 с.
6. Попов Б.А. Равномерное приближение сплайнами / Киев: Наукова думка, 1989. – 272 с.
7. Стронгин Р.Г. Поиск глобального оптимума / М.: Знание, 1990. – 48 с.

8. Петровская Н.Б. Аппроксимация разрывных решений для одного класса схем высокого порядка // Математическое моделирование. – 2005. – 17, №1. – С.79-92.
9. Reed W.H., Hill T.R. Triangular Mesh Methods for the Neutron Transport Equation / Technical Reports LA-UR-73-479, Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, New Mexico, 1973.
10. Cockburn B., Karniadakis G.E., Shu C.-W. The Development of Discontinuous Galerkin Methods // Discontinuous Galerkin Methods. Theory, Computational and Applications / Lecture Notes in Comput. Sci. Engrg. / New York: Springer-Verlag, 2000. - V.11. – P.3-50.
11. Wilbraham H. On a certain periodic function / Cambridge and Dublin Math. J. – 1848. – №3. – P.198-201.
12. Gottlieb S., Jung Jae-Hun, Kim S. A Review of David Gottlieb's Work on the Resolution of the Gibbs Phenomenon // Commun. Comput. Phys. – Beijing. – 2011. – 9, №3. – P.497-519.
13. Jerri Abdul J., Ed. Advances in the Gibbs Phenomenon // New York: Clarkson University Sampling Publishing, 2011. – 424 p.
14. Литвин О.Н., Першина Ю.И. Приближение разрывной функции с помощью разрывных сплайнов // Математическое и компьютерное моделирование. Серия: Физико-математические науки: сб. научн. трудов / Каменец-Подольский: Каменец-Подольський национальный университет им. Ивана Огиенка, 2010. – Вып.3. – С.122-131 (на украинском языке).
15. Литвин О.Н., Першина Ю.И. Приближение разрывной функции разрывным сплайном, когда узлы сплайна не совпадают с разрывами функции / Институт проблем математики и механики. Донецк // Труды ИПММ НАН Украины. – 2012. – 24. – С.157-165 (на украинском языке).
16. Литвин О.Н., Першина Ю.И. Построение кусочно-билинейных сплайнов для приближения функций с разрывами первого рода в узлах ректангуляции двумерной области // Таврический вестник информатики и математики. -– Симферополь, 2011. – №1. – С.63-72 (на украинском языке).
17. Литвин О.Н. Интерлинация функций и некоторые ее применения. - Х.: Основа, 2002. - 544с. (на украинском языке).
18. Литвин О.Н., Першина Ю.И. Приближение разрывной функции двух переменных с помощью разрывных сплайнов двух переменных (прямоугольные элементы) //Компьютерная математика. – Киев, 2011. – №1. – С.96-105.
19. Литвин О.Н., Першина Ю.И. Приближение разрывных функций двух переменных с разрывами первого рода на линиях триангуляции двумерной области // Управляющие системы и машины. – Киев, 2011, №5. – С.34-47.
20. Литвин О.Н., Гулик Л.И. Интерфлетация функций при решении трехмерной задачи тепропроводности / К.: Наукова думка, 2011. – 210 с.
21. Литвин О.Н., Першина Ю.И. Построение инетрполяционных и аппроксимационных с использованием трепецевидных элементов // Вестник НТУ «ХПИ». Сборник научных трудов. Тематический выпуск: Математическое моделирование в техние и технологиях / Харьков: НТУ «ХПИ», 2012. – №2. – С.141-152.

## RECONSTRUCTION OF DISCONTINUOUS FUNCTIONS ON TWO VARIABLES BY DISCONTINUOUS INETRLINATIONAL SPLINES USING TRAPEZOIDAL ELEMENTS

**O.N. Lytvyn, Y.I. Pershina**

Ukrainian Engineering Pedagogical Academy
Universitetskaya St., 16, Kharkiv, 61003, Ukraine, e-mail: yulia_pershina@mail.ru

**Abstract.** It is proposed the general method for construction of discontinuous spline-interlination for rectangular trapezoidal elements in order to use them for the approximation of discontinuous functions of two variables which are also may have (or may have not) discontinuities of first kind on the lines forming a rectangular trapezoidal elements. Constructed splines, as a special case, are discontinuous splines and continuous splines. Interlinational properties of discontinuous structures have been formulated and proved.

**Key words:** discontinuous function, discontinuous interlinational functions on two variables, trapezoidal elements.