MSC 81P20

# СТОХАСТИЧЕСКИ ОДНОРОДНЫЕ И ИЗОТРОПНЫЕ МАГНИТНЫЕ ПОЛЯ

**Л.Т. Фат, Ю.П. Вирченко**

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

**Аннотация.** Изучается модель флуктуирующего магнитного поля. Предполагается, что стохастическое магнитное поле является гауссовским и обладает свойствами стохастических однородности и изотропности. Находится общий вид корреляционной функции такого магнитного поля, обладающего соленоидальностью с вероятностью единица.

**Ключевые слова**: гауссовское поле, корреляционная функция, стохастическая однородность, стохастическая изотропность, соленоидальность.

**1. Введение.** Существует большое число задач статистической физики, в которых исследуется поведение открытых физических систем, находящихся под воздействием внешних сил, которые носят случайный характер, как по величине, так и по своей пространственно-временной распределённости. Эти случайные воздействия, обычно, называют *шумами*. Физическая природа такого рода шумов может быть очень разнообразной – механической, электромагнитной, химической. Воздействие шумов искажает регулярную (неслучайную) эволюцию физической системы.

Причём, как правило, с течением времени вызываемые шумами искажения картины движения оказываются очень существенными так, что воздействие шумов на систему может приводить к возникновению качественно новых физических эффектов. Примером такого положения является возникновение фазовых переходов под воздействием шума (см., например, [1]). Частным случаем шума, вызываемого физическими причинами, является электромагнитный шум, представляющий собой электромагнитное излучение, которое порождается какими-то стохастическими изменениями расположения зарядов и распределения плотности тока в системе. Для реализаций электромагнитного шума характерно то, что они обязаны удовлетворять уравнениям Максвелла, которые, в этом случае, по своему математическому смыслу, являются «стохастическими дифференциальными уравнениями». При этом случайные функции в виде плотностей распределения зарядов и токов играют роль источников в этих уравнениях. В частности, магнитная составляющая $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{x})$ поля должна обладать с вероятностью единица свойством поперечности, то есть представлять собой соленоидальное поле,

$$(\nabla, \tilde{\mathbf{B}})(\mathbf{x}) = 0\,. \tag{1}$$

Здесь и далее знак «тильда» указывает на то, что рассматриваемый математический объект случаен. Это свойство стохастического поля $\tilde{B}(\mathbf{x})$ накладывает дополнительные ограничения на возможный тип его распределения вероятностей. В частности, если оно является гауссовским и полностью определяется своей корреляционной функцией, то свойство соленоидальности накладывает существенные ограничения на эту функцию. При этом соленоидальность может приводить к появлению эффекта «топологической нетривиальности» силовых линий поля, отмеченной в работе [2, 3].

В настоящей работе мы определим общий вид корреляционной функции случайного гауссовского векторного поля $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{x})$, удовлетворяющего уравнению (1), игнорируя зависимость магнитного поля от времени. При этом мы ограничимся случаем, когда это поле является стохастически однородным и изотропным.

**2. Гауссовское соленоидальное случайное поле.** Пусть случайное поле $\tilde{B}(\mathbf{x})$ является гауссовским и, для простоты, имеет нулевое среднее значение, $\langle\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{x})\rangle = 0$. В этом случае, оно полностью характеризуется парной корреляционной функцией

$$\langle\tilde{B}_i(\mathbf{x})\tilde{B}_j(\mathbf{y})\rangle = K_{ij}(\mathbf{x};\mathbf{y})\,, \tag{2}$$

которая является тензорным полем на $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$. Эта корреляционная функция обладает очевидным свойством, следующим из определения (2),

$$K_{ij}(\mathbf{x};\mathbf{y}) = K_{ji}(\mathbf{y};\mathbf{x})\,. \tag{3}$$

Мы будем предполагать, далее, что поле $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{x})$ является стохастически однородным и изотропным. Свойство однородности означает, что трансляции пространства $\mathbb{R}^3$, на котором определено это поле, не изменяют его распределения вероятностей. Для гауссовского поля $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{x})$ с нулевым средним это сводится к тому, что его корреляционная функция (2) не зависит от одновременных трансляций векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ на произвольный вектор $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^3$, то есть она не изменяется при преобразованиях $\mathbf{x}\Rightarrow\mathbf{x}+\mathbf{a}$, $\mathbf{y}\Rightarrow\mathbf{y}+\mathbf{a}$. Это свойство эквивалентно тому, что корреляционная функция (2) представляется в виде матриц-функции от разности пространственных аргументов

$$K_{ij}(\mathbf{x};\mathbf{y}) = K_{ij}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,. \tag{4}$$

Такую матриц-функцию мы здесь и далее обозначаем той же самой буквой, что и саму корреляционную функцию. При этом из (3) следует, что

$$K_{ij}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = K_{ji}(\mathbf{y}-\mathbf{x})\,. \tag{5}$$

Вследствие представимости корреляционной функции в виде (5), удобно ввести вектор $\mathbf{x}-\mathbf{y}=\mathbf{r}$, в терминах которого это свойство записывается в виде

$$K_{ij}(\mathbf{r}) = K_{ji}(-\mathbf{r})\,. \tag{6}$$

Свойство изотропности случайного поля $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{x})$ означает, что его распределение вероятностей инвариантно относительно любых поворотов пространства $\mathbb{R}^3$, на котором оно определено. Для гауссовского поля $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{x})$ с нулевым средним это сводится к тому, что его корреляционная функция (2) не зависит от преобразований одновременного вращения векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ посредством произвольной матрицы $\mathcal{R}$ поворота евклидового пространства.

Матрицы поворота $\mathcal{R}$ обладают свойством ортогональности, т.е. совокупность матричных элементов $\mathcal{R}_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$ каждой такой матрицы удовлетворяет уравнениям

$$\mathcal{R}_{ik}\mathcal{R}_{jk} = \delta_{ij}\,, \quad i, j = 1, 2, 3\,, \tag{7}$$

то есть $\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}^{+}$, где операция $+$ обозначает транспонирование. Тогда поворот пространства посредством преобразования с матрицей поворота $\mathcal{R}$ приводит к преобразованию каждой случайной реализации магнитной индукции $\tilde{B}_i(\mathbf{x}) \Rightarrow \mathcal{R}_{ij}\tilde{B}_j(\mathcal{R}^{-1}\mathbf{x})$. С этим связано со стохастической ковариантностью случайного поля $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{x})$,

$$\mathcal{R}_{ik}\mathcal{R}_{jl}\langle\tilde{B}_k(\mathcal{R}^{-1}\mathbf{x})\tilde{B}_l(\mathcal{R}^{-1}\mathbf{y})\rangle = \mathcal{R}_{ik}\mathcal{R}_{jl}K_{kl}(\mathcal{R}^{-1}\mathbf{r}) = K_{ij}(\mathbf{r})\,. \tag{8}$$

Несмотря на то, что индукция $\tilde{B}(\mathbf{x})$ магнитного поля является *псевдовекторным* (а не векторным) полем, то есть при преобразованиях отражения $\mathbf{x} \Rightarrow -\mathbf{x}$ пространства $\mathbb{R}^3$, она не изменяется, совокупность допустимых матриц $\mathcal{R}$ в формуле (8) (группа ортогональных матриц) может включать также и отражения пространства $\mathbb{R}^3$. Это связано с тем, что корреляционная функция определяется усреднением квадратичной комбинации по случайному полю $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{x})$.

Формула (8), описывающая преобразования значений матриц-функции $K_{ij}(\mathbf{r})$ при ортогональных преобразованиях пространства, указывает на то, что она представляет собой тензорное поле второго ранга. В частности, когда преобразование $\mathcal{R}$ является отражением пространства, когда $\mathcal{R}_{ij} = -\delta_{ij}$, равенство (8) приводит к соотношению

$$K_{ij}(-\mathbf{r}) = K_{ij}(\mathbf{r})\,. \tag{9}$$

Общее решение уравнения (8) выражается следующей формулой

$$K_{ij}(\mathbf{r}) = A(r)\delta_{ij} + B(r)r_ir_j\,, \tag{10}$$

где $A(r)$, $B(r)$ – функции от $r = |\mathbf{r}|$. Заметим, что для такой формы тензорного поля $K_{ij}(\mathbf{r})$ выполняется свойство (9).

Тот факт проверяется непосредственно подстановкой выражения (10) в (8),

$$\mathcal{R}_{ik}\mathcal{R}_{jl}\left[A(|\mathcal{R}^{-1}\mathbf{r}|)\delta_{kl} + B(|\mathcal{R}^{-1}\mathbf{r}|)\left(\mathcal{R}^{-1}\mathbf{r}\right)_k\left(\mathcal{R}^{-1}\mathbf{r}\right)_l\right] =$$

$$= A(r)\delta_{ij} + B(r)\left(\mathcal{R}\mathcal{R}^{-1}\mathbf{r}\right)_i\left(\mathcal{R}\mathcal{R}^{-1}\mathbf{r}\right)_j = A(\mathbf{r})\delta_{ij} + B(\mathbf{r})r_ir_j\,,$$

так как $|\mathcal{R}^{-1}\mathbf{r}| = r$, $\mathcal{R}^{-1}_{ij} = \mathcal{R}_{ij}$.

Итак, мы установили, необходимое условие на общую форму корреляционной функции случайной магнитной индукции $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{x})$, для того, чтобы она обладала стохастическими однородностью и изотропностью. Для того чтобы эта форма представляла собой также и достаточное условие, нужно наложить дополнительные ограничения на коэффициентные функции $A(r)$ и $B(r)$, которые следуют из утверждения известной теоремы Бохнера-Хинчина. Согласно этой теореме, в конкретной ситуации изучаемого нами векторнозначного случайного поля, необходимым и достаточным условием того, чтобы тензор-функция $K_{ij}(\mathbf{r})$ была корреляционной однородного гауссовского поля с нулевым средним, является её положительная определённость. Это означает, что должно иметь место неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} K_{ij}(\mathbf{x};\mathbf{y})u_i(\mathbf{x})u_j^*(\mathbf{y})d\mathbf{x}d\mathbf{y} = \left\langle \left| \int\limits_{\mathbb{R}^3} \tilde{B}_i(\mathbf{x})u_i(\mathbf{x})d\mathbf{x} \right|^2 \right\rangle \geq 0$$

для любой комплекснозначной вектор-функции $u_i(\mathbf{x})$. В нашем случае, однородного случайного поля $\tilde{B}_i(\mathbf{x})$, это условие принимает вид

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} K_{ij}(\mathbf{x}-\mathbf{y})u_i(\mathbf{x})u_j^*(\mathbf{y})d\mathbf{x}d\mathbf{y} \geq 0\,, \tag{11}$$

где относительно *пробной функции* $u_i(\mathbf{x})$ предполагается, что она достаточно быстро стремится к нулю при возрастании величин $|\mathbf{x}|$ так, что интегралы в этой формуле заведомо сходятся.

Естественно считать, что случайное поле $\tilde{B}_i(\mathbf{x})$ эргодично по пространству. Это означает, что для него имеет место расцепление корреляций настолько быстрое, что матричные элементы корреляционной функции $K_{ij}(\mathbf{r})$ интегрируемы на $\mathbb{R}^3$. Тогда выписанное выше условие положительной определенности эквивалентно следующему

$$u_i u_j^* \int\limits_{\mathbb{R}^3} K_{ij}(\mathbf{r}) \exp\big(i(\boldsymbol{\kappa},\mathbf{r})\big)d\mathbf{r} \geq 0\,,$$

где $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение векторов, $u_j$ и $\kappa_j$, $j=1,2,3$ – произвольные вектора, соответственно, из $\mathbb{C}^3$ и $\mathbb{R}^3$. Оно получается из (11) подстановкой в него функций $u_j(\mathbf{r}) = u_j\exp(i(\boldsymbol{\kappa},\mathbf{r}))$. Воспользуемся теперь этим условием в разложении (10).

Вводя образы Фурье для функций $A(r)$, $B(r)$, имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} A(r)\exp(i(\boldsymbol{\kappa},\mathbf{r}))d\mathbf{r} = \bar{A}(|\boldsymbol{\kappa}|)\,, \tag{12}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} B(r)r_ir_j\exp(i(\boldsymbol{\kappa},\mathbf{r}))d\mathbf{r} = \bar{B}_1(|\boldsymbol{\kappa}|)\delta_{ij} + \bar{B}_2(|\boldsymbol{\kappa}|)\kappa_i\kappa_j\,. \tag{13}$$

Из (12) и (13) следует, что

$$\bar{K}_{ij}(\boldsymbol{\kappa}) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} K_{ij}(\mathbf{r})\exp\left(i(\boldsymbol{\kappa},\mathbf{r})\right)d\mathbf{r} = [\bar{A}(|\boldsymbol{\kappa}|) + \bar{B}_1(|\boldsymbol{\kappa}|)]\delta_{ij} + \bar{B}_2(|\boldsymbol{\kappa}|)\kappa_i\kappa_j\,. \tag{14}$$

Отсюда получаем необходимое и достаточное условие для выполнимости критерия (11) для корреляционной функции случайного магнитного поля, связанного с теоремой Бохнера-Хинчина, в том случае, когда оно обладает свойством стохастической изотропии.

$$\bar{A}(|\boldsymbol{\kappa}|)|u_i|^2 + \bar{B}_1(|\boldsymbol{\kappa}|)|u_i|^2 + \bar{B}_2(|\boldsymbol{\kappa}|)|\kappa_iu_i|^2 \geq 0\,. \tag{15}$$

Вследствие инвариантности $A(r)$ относительно преобразования отражения $\mathbf{r} \Rightarrow -\mathbf{r}$, образ Фурье $\bar{A}(|\boldsymbol{\kappa}|)$ является вещественнозначной функцией,

$$\bar{A}(|\boldsymbol{\kappa}|) = \bar{A}^*(|\boldsymbol{\kappa}|)\,,$$

и, по этой же причине, имеют место равенства

$$\bar{B}_i(|\boldsymbol{\kappa}|) = \bar{B}_i^*(|\boldsymbol{\kappa}|)\,, \quad i = 1, 2\,,$$

которые являются следствием свойства $B(r) = B(-r)$ и того факта, что эти функции являются коэффициентами разложения при двух линейно независимых тензоров $\delta_{ij}$, $\kappa_i \kappa_j$.

Итак, коэффициенты квадратичной формы в (15). Поэтому достаточно исследовать только случай, когда вектор $\mathbf{u}$ вещественный. В этом случае

$$\bar{A}(|\boldsymbol{\kappa}|)u_i^2 + \bar{B}_1(|\boldsymbol{\kappa}|)u_i^2 + \bar{B}_2(|\boldsymbol{\kappa}|)(\kappa_i u_i)^2 \geq 0\,. \tag{16}$$

Пусть $\chi$ – угол между векторами $\boldsymbol{\kappa}$ и $\mathbf{u}$. Тогда условие (16) принимает вид

$$\bar{A}(|\boldsymbol{\kappa}|) + \bar{B}_1(|\boldsymbol{\kappa}|) + \bar{B}_2(|\boldsymbol{\kappa}|)\boldsymbol{\kappa}^2 \cos^2\chi \geq 0\,,$$

откуда следует, что при любом угле $\chi$ должно иметь место неравенство и его выполнимость, одновременно, является достаточным условием для выполнимости (15). Ввиду произвольности угла $\chi$, имеем, в качестве критерия выполнимости теоремы Бохнера-Хинчина, два неравенства

$$\bar{A}(|\boldsymbol{\kappa}|) + \bar{B}_1(|\boldsymbol{\kappa}|) \geq 0\,, \qquad \bar{A}(|\boldsymbol{\kappa}|) + \bar{B}_1(|\boldsymbol{\kappa}|) + \boldsymbol{\kappa}^2\bar{B}_2(|\boldsymbol{\kappa}|) \geq 0\,. \tag{17}$$

Это следует из выпуклости отображения $\xi \mapsto a + b\xi$ при $\xi = \cos^2\chi \in [0, 1]$. Для неотрицательности образа этого отображения необходимо и достаточно, чтобы оно принимало неотрицательные значения в крайних точках интервала изменения $\xi$, то есть необходимо и достаточно, чтобы $a \geq 0$ и $a + b \geq 0$.

Полученный нами критерий, которому должны удовлетворять функции $\bar{A}(|\boldsymbol{\kappa}|)$, $\bar{B}_1(|\boldsymbol{\kappa}|)$, $\bar{B}_2(|\boldsymbol{\kappa}|)$, позволяет строить на их основе однородные по пространству гауссовские векторнозначные поля. Однако, наличие этого свойства у них еще не гарантирует того, чтобы формула (10) представляла корреляционную функцию стохастического магнитного поля. Это связано с тем, что векторное поле магнитной индукции $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{x})$ должно быть соленоидальным, т.е. для каждой случайной реализации $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{x})$ должно выполняться условие

$$(\nabla, \tilde{\mathbf{B}})(\mathbf{x}) = \nabla_j \tilde{B}_j(\mathbf{x}) = 0\,. \tag{18}$$

Будем теперь считать, что условие (17) выполнено. Посмотрим, к каким ограничениям на функции $A, B$ приводит требование бездивергентности случайного поля $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{x})$. Очевидно, исходя из определения корреляционной функции, должны выполняться условия

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\langle \tilde{B}_i(\mathbf{x})\tilde{B}_j(\mathbf{y})\rangle = \nabla_i K_{ij}(\mathbf{r}) = 0\,, \quad \frac{\partial}{\partial y_j}\langle \tilde{B}_i(\mathbf{x})\tilde{B}_j(\mathbf{y})\rangle = -\nabla_j K_{ij}(\mathbf{r}) = 0\,.$$

Эти условия, ввиду трансляционной инвариантности корреляционной функции, эквивалентны. Поэтому они приводят к одному и тому же ограничению на функции $A(r)$ и $B(r)$,

$$\nabla_j K_{ij} = \nabla_i A + r_i r_j \nabla_j B + 4 r_i B = 0\,.$$

Учитывая, что $A$ и $B$ являются функциями от $r$, получим $\nabla_j B = r^{-1} B' r_j$, $\nabla_i A = r^{-1} A' r_i$ (штрих означает дифференцирование по $|r|$) и, следовательно, условие соленоидальности случайного поля принимает вид

$$A' + r^2 B' + 4rB = 0\,, \quad r \neq 0\,. \tag{19}$$

Посмотрим к каким ограничениям на фурье-образы $\bar{A}, \bar{B}_1, \bar{B}_2$ приводит наличие свойства (19), которому удовлетворяют функции $A, B_1, B_2$. С этой целью вычислим фурье-образ от обеих частей равенства (19), применив теорему Гаусса для интеграла от дивергенции $\nabla_j[K_{ij}(\mathbf{r})] \exp\left(i(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{r})\right)$ по замкнутой поверхности с использованием свойства быстрого убывания корреляционной функции на бесконечности,

$$0 = \int\limits_{\mathbb{R}^3} (\nabla_j K_{ij}(\mathbf{r})) \exp\left(i(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{r})\right) d\mathbf{r} =$$

$$= -\int\limits_{\mathbb{R}^3} K_{ij}(\mathbf{r}) (\nabla_j \exp\left(i(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{r})\right) d\mathbf{r} = -i\kappa_j \int\limits_{\mathbb{R}^3} K_{ij}(\mathbf{r}) \exp\left(i(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{r})\right) d\mathbf{r} =$$

$$= -i\kappa_i [\bar{A}(|\boldsymbol{\kappa}| + \bar{B}_1(|\boldsymbol{\kappa}|) + \bar{B}_2(|\boldsymbol{\kappa}|)\boldsymbol{\kappa}^2]\,. \tag{20}$$

Здесь мы предположили, что корреляционная функция $K_{ij}(r)$ достаточно быстро спадает при стремлении $r$ к бесконечности. Достаточно чтобы $|K_{ij}| < C/r^{3+\epsilon}$, $\epsilon > 0$. В этом случае поверхностного интеграла $\oint K_{ij}(\mathbf{r}) dS_j$ в формуле Гаусса-Остроградского стремится к нулю при неограниченном самоподобном расширении замкнутой поверхности.

Из (20) следует, что $\bar{B}_2 = -(\bar{A} + \bar{B}_1)/\kappa^2$, то есть $\bar{B}_2 < 0$ и, следовательно, $\bar{K}_{ij} = (\bar{A} + \bar{B}_1)(\delta_{ij} - \kappa_i \kappa_j/\boldsymbol{\kappa}^2)$. Вводя неотрицательную, согласно (17), функцию $\bar{K}(|\boldsymbol{\kappa}|) = [\bar{A}(|\boldsymbol{\kappa}|) + \bar{B}_1(|\boldsymbol{\kappa}|)]/\boldsymbol{\kappa}^2$, окончательно, находим представление для Фурье-образа корреляционной функции $K_{ij}(\mathbf{r})$, учитывающее свойство ее положительной определенности и условие бездивергетности случайного поля $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r})$,

$$\bar{K}_{ij}(|\boldsymbol{\kappa}|) = \bar{K}(|\boldsymbol{\kappa}|)(\boldsymbol{\kappa}^2 \delta_{ij} - \kappa_i \kappa_j)\,. \tag{21}$$

Выразим теперь это необходимое и достаточное свойство корреляционной функции однородного изотропного бездивергентного гауссовского поля в координатной форме. С этой целью, введем функцию согласно формуле

$$K(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \bar{K}(|\boldsymbol{\kappa}|) \exp\left(-i(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{r})\right) d\boldsymbol{\kappa}\,.$$

Эта функция, согласно теореме Бохнера-Хинчина, ввиду положительности функции $\bar{K}(|\boldsymbol{\kappa}|)$, является корреляционной функцией некоторого скалярного гауссовского поля.

Ввиду инвариантности относительно вращений в $\boldsymbol{\kappa}$-пространстве фурье-образа $\bar{K}(|\boldsymbol{\kappa}|)$, корреляционная функция $K(\mathbf{r})$ зависит только от модуля $|\mathbf{r}| = r$. Используя обратное преобразование Фурье, представим корреляционную функцию $K_{ij}(\mathbf{r})$ в виде

$$K_{ij}(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \bar{K}_{ij}(|\boldsymbol{\kappa}|) \exp\big(-i(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{r})\big) d\boldsymbol{\kappa}\,.$$

Тогда формула (21) показывает, что имеет место соотношение

$$K_{ij}(\mathbf{r}) = (\nabla_i \nabla_j - \delta_{ij}\Delta) K(\mathbf{r})\,.$$

Ввиду зависимости $K(\mathbf{r})$ только от модуля $|\mathbf{r}| = r$, вычисление $K_{ij}(\mathbf{r})$ согласно этой формуле дает

$$\nabla_i \nabla_j K(r) = K''(r)\frac{r_i r_j}{r^2} + \frac{K'(r)}{r}\left(\delta_{ij} - \frac{r_i r_j}{r^2}\right)\,,$$

$$\Delta K(r) = K''(r) + \frac{2}{r} K'(r)$$

и, следовательно,

$$K_{ij}(\mathbf{r}) = K''(r)\left(\frac{r_i r_j}{r^2} - \delta_{ij}\right) - \frac{K'(r)}{r}\left(\delta_{ij} + \frac{r_i r_j}{r^2}\right)\,. \tag{22}$$

Эта формула является искомым общим представлением корреляционной функции векторного соленоидального гауссовского однородного и изотропного поля.

**3. Заключение.** В заключение свяжем найденное представление для корреляционной функции с величинами, которые имеют непосредственную физическую интерпретацию. Определим продольную $K_\parallel(r)$ и поперечную $K_\perp(r)$ корреляционные функции рассматриваемого нами векторного гауссовского поля,

$$K_\parallel(r) = K_{ij}\frac{r_i r_j}{r^2}\,, \quad K_\perp(r) = \frac{1}{2r^2}\left(K_{jj} r^2 - r_i r_j K_{ij}\right)\,. \tag{23}$$

Первое из этих равенств эквивалентно $K_\parallel(r) r_i = K_{ij} r_j$ , а второе – $K_{ij}\epsilon_{jkl} r_l = \epsilon_{ikl} K_\perp(r) r_l$, так как свёртка этого последнего равенства с $\epsilon_{ikm} r_m$ даёт: для левой его части $\epsilon_{ikm} r_m \epsilon_{jkl} r_l = (\delta_{ij} r^2 - r_i r_j)$, а для правой – $\epsilon_{ikm} r_m \epsilon_{ikl} r_l = 2\delta_{lm} r_l r_m = 2r^2$.

Так как, на основании (10),

$$K_{jj} = 3A + r^2 B\,, \quad r_i r_j K_{ij} = Ar^2 + Br^4\,,$$

то $K_\perp(r) = A(r)$, $K_\parallel(r) = A(r) + B(r)r^2$, и, таким образом, коэффициент $B(r)$ в (10) выражается в виде

$$B(r) = \frac{1}{r^2}(K_\parallel - K_\perp)\,.$$

Тогда

$$K_{ij}(\mathbf{r}) = K_\perp(r)\delta_{ij} + \big(K_\parallel(r) - K_\perp(r)\big)\frac{r_i r_j}{r^2}$$

Подставляя выражения для коэффициентов $A(r)$ и $B(r)$ также в (19), получим условие бездивергентности случайного поля $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{x})$ в следующей форме (см. [5])

$$K'_{\|} = \frac{1}{r}(K_{\perp} - K_{\|})\,. \tag{24}$$

При этом имеют место следующие представления функций $K_{\perp}(r)$ и $K_{\|}(r)$ через корреляционную функцию $K(\mathbf{r})$:

$$K_{\|}(r) = -\frac{2}{r}\, K'(r)$$

и так как

$$K_{jj}(\mathbf{r}) = -2K''(r) - \frac{4}{r}K'(r)\,,$$

то

$$K_{\perp}(r) = -\left(K''(r) + \frac{K'(r)}{r}\right)\,.$$

Важность введенных корреляционных функций обусловлена, в частности, тем, что средняя плотность энергии магнитного поля $\langle \tilde{\mathbf{B}}^2(\mathbf{x})\rangle/8\pi$ выражается через поперечную корреляционную функцию [1]. В самом деле, имеем

$$\langle \tilde{\mathbf{B}}^2(\mathbf{x},t)\rangle = K_{ii}(0) = 3A(0) = 3K_{\perp}(0)\,,$$

как и в регулярном случае [5], когда $K_{\perp}(0) = K_{\|}(0)$, получаем

$$K_{\perp}(0) = \frac{1}{3}\langle \tilde{\mathbf{B}}^2(\mathbf{r},t)\rangle\,. \tag{25}$$

### Литература


1. Horsthemke W., Lefever R. Noise-Induced Transitions / Berlin: Springer-Verlag, 1984. (Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы: Теория и применение в физике, химии и биологии / М.: Мир, 1987. – 398 с.)
2. Chechkin A.V., Tur A.V., Yanovskii V.V. Kinetic effects stochastic topological nontrivial fields // Physica A.– 1994. – 208. – P.501-522.
3. Slezova Zh.V., Tur A.V., Yanovskii V.V. Effect of Topologically Non-trivial Magnetic Fields on the Magnetic Moment Evolution // Functional Materials. – 2000. – 7; №3. – P.384-389.
4. Simon B. The $P(\varphi)_2$ euclidian quantum field theory / Princeton: Princeton University Press, 1974. (Саймон Б. Модель $P(\varphi)_2$ евклидовой квантовой теории поля /-М.: Мир, 1976.)
5. Климонтович Ю.Л. Статистическая физика / М.: Наука, 1982. – 608 с.


## STOCHASTICALLY UNIFORM AND ISOTROPIC MAGNETIC FIELDS


**Lam Tan Phat, Yu.P. Virchenko**

Belgorod State University,
Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail:virch@bsu.edu.ru



**Abstract.** The model of fluctuation magnetic field is studied. It is supposed that stochastic magnetic field is gaussian and it is stochastically uniform and isotropic. The general form of correlation function of such a magnetic field is found. It is taken in account that it is solenoidal with the probability one.



**Key words:** gaussian field, correlation function, stochastic uniformity, stochastic isotropy, solenoidal property.