MSC 11J71

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДРОБНЫХ ДОЛЕЙ ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ НА МНОЖЕСТВАХ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КОРАЗМЕРНОСТИ

А.В. Шутов

Владимирский государственный университет,
пр. Строителей, 11, Владимир, 600024, Россия, e-mail: a1981@mail.ru

Аннотация. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}^d$ – вектор, координаты которого линейно независимы вместе с 1 над полем рациональных чисел. Доказано, что любой многогранник содержит только конечное множество точек, сравнимых с точками вида $i\alpha$ по модулю решетки $\mathbb{Z}^d$. Построены примеры двумерных кривых, не обладающих этим свойством. Получен ряд приложений к исследованию множеств ограниченного остатка.

Ключевые слова: распределение дробных долей, теорема Вейля, множества положительной коразмерности, множества ограниченного остатка.

1. Введение. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ – вектор в $\mathbb{R}^d$. Вектор α будем называть вектором общего положения, если $1, \alpha_1, \dots, \alpha_d$ линейно независимы над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Очевидно, что множество векторов общего положения есть множество полной меры в $\mathbb{R}^d$.

Для данного вектора α общего положения и произвольных вектора $a = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d$ и множества $X \subset [0;1)^d$ определим счетную функцию

$$N(\alpha, a, n, X) = \sharp\{i : 0 \leq i < n, \{i\alpha + a\} \in X\}\,.$$

Здесь через $\{i\alpha + a\}$ обозначен вектор с координатами $(\{i\alpha_1 + a_1\}, \dots, \{i\alpha_d + a_d\})$.

Согласно теореме Вейля о равномерном распределении [18], если α – вектор общего положения и X – множество с интегрируемой по Риману характеристической функцией, то

$$N(\alpha, a, n, X) = n|X| + o(n)\,, \tag{1}$$

то есть количество точек орбиты, попавших в область пропорционально d-мерному объему этой области.

Нас интересует случай, когда в качестве X берется множество, размерность которого меньше, чем размерность тора. В этом случае теорема Вейля дает

$$N(\alpha, a, n, X) = o(n)$$

и возникает вопрос о возможности улучшения данной оценки.

В работе будут доказаны следующие результаты.

1) Если X – граница некоторого многогранника, то $N(\alpha, a, n, X) = O(1)$.

Автор выражает благодарность В.Г. Журавлеву и А.В. Лаптеву за полезные обсуждения. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №11-01-00578-а.

2) При $d = 2$ для любого вектора общего положения α существует одномерное множество X, содержащее бесконечно много точек вида $\{i\alpha\}$, то есть $N(\alpha, a, n, X) \to \infty$ при $n \to \infty$.

3) При $d = 2$ для любого вектора общего положения α существует двумерное множество X и векторы $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^2$ такие, что $|N(\alpha, a_1, n, X) - n|X|| = O(1)$, но $|N(\alpha, a_1, n, X) - n|X|| \to \infty$ при $n \to \infty$.

2. Распределение дробных долей $\{i\alpha\}$ на гиперплоскостях.

Теорема 1. *Пусть* Π – k*-мерная гиперплоскость в* $\mathbb{R}^d$, $k < d$, $X \subseteq \Pi \cap [0;1)^d$. *Тогда*

$$N(\alpha, a, n, X) = O(1)\,.$$

□ Нам нужно доказать, что множество X содержит только конечное число точек вида $\{i\alpha + a\}$.

Очевидно, что достаточно рассмотреть случай $X = \Pi \cap [0;1)^d$, поскольку если это множество содержит только конечное число рассматриваемых точек, то это тем более верно для всех его подмножеств.

Далее, поскольку любую k-мерную гиперплоскость с $k < d-1$ можно рассматривать как подмножество $(d-1)$-мерной гиперплоскости, теорему 1 достаточно доказать для случая $k = d - 1$.

Покажем, что теорему 1 достаточно доказать для случая $a = 0 = (0, \ldots, 0)$. Для этого для произвольных a, X определим множество

$$X_a = \{x \in [0;1)^d : x + a \bmod \mathbb{Z}^d \in X\}\,. \tag{2}$$

Отметим, что если X удовлетворяет условиям теоремы 1, то X_a представляет собой объединение множеств, также удовлетворяющих условиям теоремы 1. Поэтому, если теорема 1 выполнена для $a = 0 = (0, \ldots, 0)$, то X_a содержит только конечное число точек вида $\{i\alpha\}$. Остается заметить, что в силу определения множества X_a имеем $\{i\alpha + a\} \in X$ тогда и только тогда, когда $\{i\alpha\} \in X_a$.

Теперь покажем, что без ограничения общности можно предположить, что X содержит начало координат. Действительно, если $0 \notin X$, то возможно 2 случая.

1) X не содержит точек вида $\{i\alpha\}$. Тогда теорема 1 верна для X.

2) X содержит точку $b = \{m\alpha\}$. Тогда для $\{i\alpha\} \in X$ тогда и только тогда, когда $\{(i-m)\alpha\} \in X_b$. Поэтому при $n > m$ имеем $0 \le N(\alpha, 0, n, X) - N(\alpha, a, n-m, X_b) \le m$, причем множество X_b содержит начало координат, что и требовалось.

Итак, нам остается доказать теорему 1 в случае $X = \Pi \cap [0;1)^d$, $d = k - 1$, $a = 0$ и гиперплоскость Π проходит через начало координат.

Пусть все точки $\{m_i\alpha\}$ принадлежат рассматриваемому нами множеству X. Заметим, что $\{m_i\alpha\}$ можно представить в виде

$$\{m_i\alpha\} = m_i\alpha - l_i\,,$$

где $l_i = (l_{i1}, \dots, l_{id}) \in \mathbb{Z}^d$.

Предположим, что имеется не менее d интересующих нас точек $\{m_i\alpha\}$ (в противном случае теорема сразу доказана). Докажем, что в этом случае

$$l_d \in \operatorname{span}_{\mathbb{Q}}(l_1, \dots, l_{d-1})\,.$$

Пусть имеется d точек $\{m_i\alpha\}$ принадлежащих гиперплоскости Π, проходящей через начало координат. Тогда соответствующие им векторы линейно зависимы и, следовательно, определитель, составленный из их координат равен нулю.

$$\begin{vmatrix} m_1\alpha_1 - l_{11} & \dots & m_1\alpha_d - l_{1d} \\ m_2\alpha_1 - l_{21} & \dots & m_2\alpha_d - l_{1d} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ m_d\alpha_1 - l_{d1} & \dots & m_d\alpha_d - l_{dd} \end{vmatrix} = 0\,. \tag{3}$$

Преобразуем определитель (3). Для этого при $i = 2, \dots, d$ умножим i-ю строку определителя на $-m_1$ и прибавим к ней первую строку, умноженную на m_i. Получим, что

$$\begin{vmatrix} m_1\alpha_1 - l_{11} & \dots & m_1\alpha_d - l_{1d} \\ -m_2 l_{11} + m_1 l_{21} & \dots & -m_2 l_{1d} + m_1 l_{2d} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ -m_d l_{11} + m_1 l_{d1} & \dots & -m_d l_{1d} + m_1 l_{dd} \end{vmatrix} = 0\,. \tag{4}$$

Отметим, что все строки определителя (4), начиная со второй, состоят из целых чисел. Раскладывая определитель (4) по первой строке, получаем

$$\sum_{j=1}^{d} M_j(m_1\alpha_j - l_{1j}) = 0 \tag{5}$$

с целыми M_j. Возможно 2 случая.

1) Хотя бы одно из M_j отлично от нуля. Тогда, раскрывая скобки в равенстве (5), убеждаемся, что вектор α не является вектором общего положения.

2) Все $M_j = 0$. Это означает, что строки определителя (4) с номерами $2, \dots, d$ являются линейно зависимыми. Поскольку эти строки состоят из целых чисел, данная линейная зависимость имеет место не только над $\mathbb{R}$, но и над $\mathbb{Q}$. Для $i = 2, \dots, d$ введем векторы $v_i = (v_{i1}, \dots, v_{id})$, где

$$v_{ij} = -m_i l_{1j} + m_1 l_{ij}\,. \tag{6}$$

Векторы v_i линейно зависимы над $\mathbb{Q}$, то есть

$$\sum_{i=2}^{d} C_i v_i = 0$$

с некоторыми рациональными C_i. В силу (6) векторы v_i представимы в виде

$$v_i = -m_i l_1 + m_1 l_i$$

откуда получаем, что

$$\sum_{i=2}^{d} C_i(-m_i l_1 + m_1 l_i) = 0\,.$$

Раскрывая скобки, получаем, что векторы $l_1, \ldots, l_d$ рационально зависимы, то есть $l_d \in \mathrm{span}_{\mathbb{Q}}(l_1, \ldots, l_{d-1})$.

Для завершения доказательства теоремы 1 достаточно доказать, что множество пар (n, l) таких, что $l \in \mathrm{span}_{\mathbb{Q}}(l_1, \ldots, l_{d-1})$ и $n\alpha - l \in [0;1)^d$ конечно. Для этого заметим, что если $l \in \mathrm{span}_{\mathbb{Q}}(l_1, \ldots, l_{d-1})$, то тем более $l \in \mathrm{span}_{\mathbb{R}}(l_1, \ldots, l_{d-1})$, то есть вектор l принадлежит $(d-1)$-гиперплоскости Π', проходящей через начало координат и натянутой на векторы $l_1, \ldots, l_{d-1}$. Пусть $K = [0;1)^d + \Pi'$. Тогда условия $l \in \mathrm{span}_{\mathbb{Q}}(l_1, \ldots, l_{d-1})$ и $n\alpha - l \in [0;1)^d$ эквивалентны условию $n\alpha \in K$. Из определения множества K вытекает, что существует постоянная $C > 0$ такая, что $\mathrm{dist}(x, \Pi') < C$ для всех $x \in K$. Заметим, что все коэффициенты в уравнении гиперплоскости Π' рациональны (в силу целочисленности векторов $l_1, \ldots, l_{d-1}$). Поэтому для любого вектора α общего положения

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{dist}(n\alpha, \Pi') = \infty$$

и неравенство

$$\mathrm{dist}(n\alpha, \Pi') < C$$

может выполняться только для конечного множества n. Таким образом, теорема полностью доказана. ■

Из доказанной теоремы немедленно вытекает

Следствие 1. *Пусть X – многогранник в $\mathbb{R}^d$, π – проекция $\mathbb{R}^d \to [0;1)^d$, задаваемая формулой $x \to \{x\}$. Тогда для любого вектора общего положения α*

$$N(\alpha, a, n, \pi(\partial P)) = O(1)\,,$$

то есть для всех a множество $\pi(\partial P)$ содержит только конечное число точек орбиты $\{R_\alpha^i(a)\}$. Здесь ∂P – граница многогранника P.

3. Кривые, содержащие бесконечно много точек вида $\{i\alpha\}$. В этом и следующем пунктах всюду предполагается, что $d = 2$.

Покажем, что теорему 1 нельзя обобщить на случай произвольной кривой.

Теорема 2. *Для любого вектора общего положения α и любых двух точек из $[0;1)^2$ существует соединяющая их выпуклая кривая $\gamma \subset [0;1)^2$, содержащая бесконечно много точек вида $\{i\alpha\}$.*

□ Отметим, что для кривой γ выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty} N(\alpha, 0, n, \gamma) = \infty\,.$$

Для доказательства теоремы 2 введем оператор U, который по выпуклому многоугольнику $\mathrm{Pol} = A_1 A_2 \ldots A_n \in [0; 1-\delta]^2$ ($0 < \delta < 1$ – достаточно мало) и достаточно малому $\varepsilon > 0$ строит новый выпуклый многоугольник $U(\mathrm{Pol}, \varepsilon) \in [0; 1-\delta]^2$. Процесс построения будет состоять из нескольких этапов (см. рис. 1).

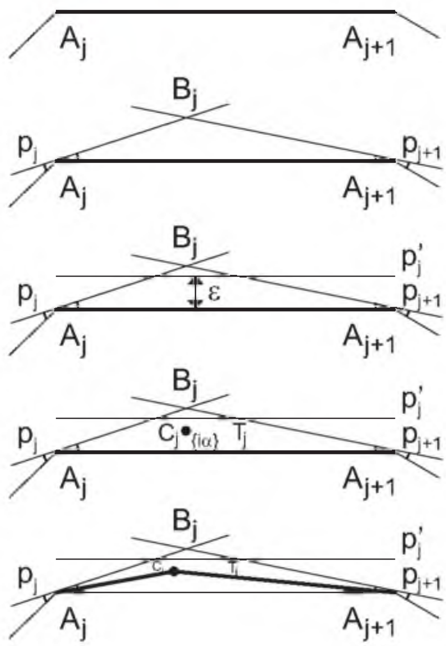

Рис. 1. Основные этапы построения многоугольника $U(\mathrm{Pol}, \varepsilon)$.

1) В каждой вершине A_j проведем прямую p_j такую, что $\angle(p_j, A_{j-1}A_j) = \angle(A_jA_{j+1}, p_j)$. Обозначим через B_j точки пересечения прямых p_j и p_{j+1}.

2) Пусть p'_j – прямая, параллельная прямой A_jA_{j+1}, такая, что $\mathrm{dist}(A_jA_{j+1}, p'_i) = \varepsilon$ и прямая p'_j лежит по одну сторону с точкой B_j относительно прямой A_jA_{j+1}. Обозначим через T_j трапецию, ограниченную прямыми A_jB_j, p'_j, B_jA_{j+1} и A_jA_{j+1}. Отметим, что при достаточно малых ε все трапеции T_j принадлежат квадрату $[0; 1-\delta]^2$.

3) В силу теоремы Вейля о равномерном распределении, каждая из трапеций T_i содержит бесконечно много точек вида $\{i\alpha\}$. Выберем одну из таких точек (например, с наименьшим положительным i) и обозначим ее через C_j.

4) В качестве $U(\mathrm{Pol}, \varepsilon)$ возьмем многоугольник $A_1C_1A_2C_2\ldots A_NC_n$.

Многоугольник $U(\mathrm{Pol}, \varepsilon)$ представляет собой выпуклый многоугольник в $[0; 1-\delta]^2$, имеющий $2n$ вершин.

Для любых двух компактных подмножеств $X, Y \subset \mathbb{R}^2$ определим расстояние Хаусдорфа [9]:

$$d_H(X, Y) = \max\left\{\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y}\mathrm{dist}(x, y),\ \ \sup_{y\in Y}\inf_{x\in X}\mathrm{dist}(x, y)\right\}.$$

Тогда справедлива оценка

$$d_H(\partial\mathrm{Pol},\ \partial U(\mathrm{Pol}, \varepsilon)) \le \varepsilon\,.$$

Пусть теперь A и B – точки, которые нужно соединить выпуклой кривой γ. Выберем произвольную точку C такую, что $\triangle ABC \subset [0; 1-\delta]^2$ и некоторую последовательность ε_n такую, что $0 < \varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n/2$. Определим последовательность многоугольников $\mathrm{Pol}_0 = \triangle ABC$, $\mathrm{Pol}_1 = U(\mathrm{Pol}_0, \varepsilon_1), \ldots, \mathrm{Pol}_{n+1} = U(\mathrm{Pol}_n, \varepsilon_{n+1})$. При подходящем выборе последовательности ε_n все многоугольники Pol_n корректно определены. Построенные нами многоугольники обладают следующими свойствами.

1) Многоугольник Pol_n выпуклый.

2) Число вершин Pol_n равно $3 \cdot 2^n$.

3) Граница $\partial\mathrm{Pol}_n$ содержит не менее $3 \cdot (2^n - 1)$ точек вида $\{i\alpha\}$. В частности, все его вершины, кроме A, B и C являются точками такого вида.

4) Расстояние Хаусдорфа между границами многоугольников Pol_{n-1} и Pol_n не превосходит ε_n.

Последнее свойство означает, что последовательность замкнутых ломаных $\partial\mathrm{Pol}_n$ является фундаментальной относительно метрики Хаусдорфа.

Известно [12], что множество всех компактных подмножеств полного метрического пространства является полным метрическим пространством относительно метрики Хаусдорфа. Поскольку $[0; 1-\delta]^2$ полно, это означает, что последовательность выпуклых замкнутых ломаных $\partial\mathrm{Pol}_n$ сходится к некоторой выпуклой замкнутой ломаной $\Gamma \subset [0; 1-\delta]^2 \in [0; 1)^2$. При этом очевидно, что все вершины всех многоугольников Pol_n принадлежат Γ. Поэтому любая часть кривой Γ, заключенная между двумя такими вершинами, содержит бесконечно много точек вида $\{i\alpha\}$. Таким образом, в качестве γ мы можем выбрать часть построенной кривой Γ, заключенную между вершинами A и B. ■

Приведем еще один пример.

Теорема 3. *Для любого вектора общего положения $\alpha = (\alpha_1; \alpha_2)$ существует кривая γ и точка a такие, что γ содержит бесконечно много точек вида $\{i\alpha\}$ и не содержит точек вида $\{i\alpha + a\}$.*

□ Для отрезка I, соединяющего точки $(x_1, 0) \in [0; 1-\delta]$ и $(x_2; 0) \in [0; 1-\delta]$ и некоторого $\varepsilon > 0$ определим ломаную $U_0(I, \varepsilon)$ следующим образом. Найдем минимальное i такое, что точка $\{i\alpha\}$ принадлежит прямоугольнику $I \times [0; \varepsilon)$. Пусть x_1' – середина отрезка $(x_1; 0) - (\{i\alpha_1\}; 0)$, x_2' – середина отрезка $(\{i\alpha_1\}; 0) - (x_2; 0)$. Тогда ломаная $U_0(I, \varepsilon)$ имеет вид $(x_1; 0) - (x_1'; 0) - (x_1'; \{i\alpha_2\}) - (x_2'; \{i\alpha_2\}) - (x_2'; 0) - (x_2; 0)$. Процесс проиллюстрирован на рис. 2.

Далее, для произвольной ломаной L определим оператор $U(L; \varepsilon)$, переводящий звенья вида $I = (x_1; 0) - (x_2; 0)$ в звенья $U_0(I, \varepsilon)$ и не меняющий остальные звенья.

Вновь выберем некоторую последовательность ε_n такую, что $0 < \varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n/2$. Зададим последовательность ломаных $L_0 : (x_1; 0) - (x_2; 0)$, $L_{n+1} = U(L_n, \varepsilon_{n+1})$. Рассуждая аналогично доказательству теоремы 2, легко получить, что эта последовательность ломаных сходится к некоторой кривой γ, содержащей бесконечно много точек вида $\{i\alpha\}$.

Заметим, что γ состоит из бесконечного числа отрезков, являющихся подмножествами прямых вида $x = b'$, $y = b''$ с $b' \in \mathbb{Z} + \alpha_1\mathbb{Z}$, $b'' \in \mathbb{Z} + \alpha_2\mathbb{Z}$. Выберем $a = (a_1; a_2)$ так, чтобы $a_1 \notin \mathbb{Z} + \alpha_1\mathbb{Z}$, $a_2 \notin \mathbb{Z} + \alpha_2\mathbb{Z}$. Тогда легко видеть, что γ не может содержать точек вида $\{i\alpha + a\}$. ■

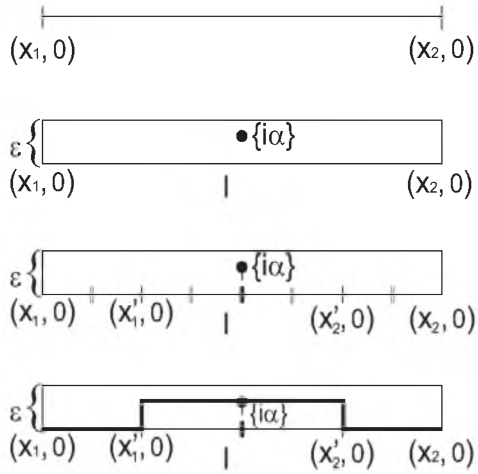

Рис. 2. Основные этапы построения ломаной $U_0(I,\varepsilon)$.

4. Связь с множествами ограниченного остатка. Вновь вернемся к асимптотической формуле (1). Пусть

$$r(\alpha,a,n,X)=N(\alpha,a,n,X)-n|X|$$

— остаточный член асимптотики (1). Ясно, что

$$r(\alpha,a,n,X)=o(n)\,.$$

Множество X будем называть множеством ограниченного остатка для последовательности $\{i\alpha+a\}$, если

$$r(\alpha,a,n,X)=O(1)\,.$$

Множества ограниченного остатка были впервые введены в работе [11] в случае $d=1$. Полное описание одномерных множеств ограниченного остатка имеется в [13]. Современное состояние проблемы в одномерном случае, включая явные оценки остаточного члена описано в работах [5], [8]. Различные конструкции двумерных множеств ограниченного остатка приведены в [1], [4], [6], [7], [16], [17]. Примеры множеств ограниченного остатка для произвольной размерности можно найти в [2], [3], [14]. Некоторые результаты о структуре многомерных множеств ограниченного остатка есть в [10], [14], [15].

Теорема 4. *Пусть X – множество ограниченного остатка для последовательности $\{i\alpha\}$. Тогда X также является множеством ограниченного остатка для всех последовательностей $\{i\alpha+a\}$ с $a=\{k\alpha\}$, $k\in\mathbb{Z}$.*

☐ Пусть $a=\{k\alpha\}$, $k\in\mathbb{Z}$. Тогда

$$r(\alpha,a,n,X)=r(\alpha,k\alpha,n,X)=N(\alpha,k\alpha,n,X)-n|X|=$$

$$=N(\alpha,0,n+k,X)-N(\alpha,0,k,X)-n|X|=$$

$$=r(\alpha,0,n+k,X)-(n+k)|X|-r(\alpha,0,k,X)+k|X|-n|X|=$$

$$= r(\alpha, 0, n+k, X) - r(\alpha, 0, k, X) \le$$
$$\le 2 \sup_n r(\alpha, 0, n, X) . \ \blacksquare$$

Теорема 5. *Пусть X – множество ограниченного остатка для последовательности $\{i\alpha\}$ и существует конечная постоянная $C > 0$ такая что*

$$\sup_n N(\alpha, a, n, \partial X) < C$$

для всех a. Тогда X является множеством ограниченного остатка для всех последовательностей $\{i\alpha + a\}$.

□ В доказательстве теоремы 1 установлено, что X является множеством ограниченного остатка для последовательности $\{i\alpha + a\}$ тогда и только тогда, когда множество X_a, определенное в (2), является множеством ограниченного остатка для последовательности $\{i\alpha\}$. При этом выполняется равенство

$$r(\alpha, a, n, X) = r(\alpha, 0, n, X_a).$$

Пусть K_n есть множество точек $\{i\alpha\}$ с $0 \le i < n$. Тогда при достаточно малом $\varepsilon = \varepsilon(\alpha, X, n) > 0$ имеем, что точка из K_n, попадающая в X_a может не попасть в $X_{a'}$ с $\mathrm{dist}(a, a') < \varepsilon$ в том и только том случае, когда она лежит на границе одного из этих множеств. Поскольку $|X_a| = |X_{a'}|$, получаем неравенство

$$|r(\alpha, a, n, X_a) - r(\alpha, a', n, X_{a'})| \le 2C ,$$

справедливое при $\mathrm{dist}(a, a') < \varepsilon$ и достаточно малых ε.

Это означает, что в условиях теоремы множество X является множеством ограниченного остатка для последовательности $\{i\alpha+a\}$ тогда и только тогда, когда оно является множеством ограниченного остатка для последовательности $\{i\alpha+a'\}$ с $\mathrm{dist}(a, a') < \varepsilon$. Поскольку последовательность $\{i\alpha\}$ равномерно распределена, а следовательно, всюду плотна, в $[0;1)^2$, существует $k \in \mathbb{Z}$, $k > 0$ такое, что $\mathrm{dist}(a, \{k\alpha\}) < \varepsilon$. Для завершения доказательства остается воспользоваться теоремой 4. ■

Теорема 6. *Для любого вектора общего положения $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ существуют двумерное множество X и точки $a_1, a_2 \in [0;1)^2$ такие, что X является множеством ограниченного остатка для последовательности $\{i\alpha+a_1\}$ и не является множеством ограниченного остатка для последовательности $\{i\alpha + a_2\}$.*

□ Без ограничения общности можно считать, что $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$ (в противном случае мы можем заменить α_i на $\{\alpha_i\}$, а также, в случае необходимости, поменять местами оси координат).

Рассмотрим параллелограмм

$$P = \Big\{(\alpha_1/\alpha_2; 0)x + \alpha y, (x, y) \in [0;1)\Big\}$$

В работе [17] доказано, что P является множеством ограниченного остатка для последовательности $\{i\alpha\}$.

Возможно два случая.

1) X не является множеством ограниченного остатка для последовательности $\{i\alpha + a\}$ с некоторым a. Тогда теорема доказана.

2) X является множеством ограниченного остатка для всех последовательностей $\{i\alpha+a\}$. Воспользуемся конструкцией теоремы 3 и построим соответствующую кривую γ на нижнем основании параллелограмма P. Легко проверить, что для кривой $\gamma+\alpha$ также справедливо утверждение теоремы 3. Обозначим через Y множество, ограниченное нижним основанием параллелограмма P и кривой γ. При этом точки из γ считаем не принадлежащими Y. Далее, пусть $Y_1 = Y+\alpha$ и $X_1 = (X \cup Y_1) \setminus Y$. Тогда

$$N(\alpha,a,n,X_1) = N(\alpha,a,n,X) + N(\alpha,a,n,Y_1) - N(\alpha,a,n,Y)\,.$$

Из определения множества Y_1 легко вывести, что

$$|N(\alpha,a,n,Y_1) - N(\alpha,a,n,Y)| \le 1\,,$$

откуда

$$|N(\alpha,a,n,X_1) = N(\alpha,a,n,X) \le 1\,.$$

Поскольку $|X_1| = |X|$, это означает, что X_1 является множеством ограниченного остатка для всех последовательностей $\{i\alpha+a\}$. Пусть $\overline{X_1}$ – замыкание множества X. Тогда $\overline{X_1}$ будет множеством ограниченного остатка для последовательности $\{i\alpha+a\}$ тогда и только тогда, когда кривая $\gamma+\alpha$ содержит только конечное число точек из данной последовательности. Для завершения доказательства остается воспользоваться теоремой 3. ■

Литература

1. Абросимова А.А. Множества ограниченного остатка на двумерном торе // Чебышевский сборник. – 2011. – 12;4. – С.15-23.
2. Журавлев В.Г. Многомерная теорема Гекке о распределении дробных долей // Алгебра и анализ. – 2012. – 24;1. – С.1-33.
3. Журавлев В.Г. Многогранники ограниченного остатка // Труды математического института имени В.А.Стеклова, Современные проблемы математики. – 2012. – Вып.16. – С.82-102.
4. Журавлев В.Г. Разбиения Рози и множества ограниченного остатка // Записки научных семинаров ПОМИ. – 2005. – 322. – С.83-106.
5. Красильщиков В.В., Шутов А.В. Описание и точные значения максимума и минимума остаточного члена проблемы распределения дробных долей // Математические заметки. – 2011. – 89;1. – С.43-52.
6. Шутов А.В. Двумерная проблема Гекке-Кестена // Чебышевский сборник. – 2011. – 12;2(38). – С.151-162.
7. Шутов А.В. Об одном семействе двумерных множеств ограниченного остатка // Чебышевский сборник. – 2011. – 12;4. – С.264-271.
8. Шутов А.В. Оптимальные оценки в проблеме распределения дробных долей на множествах ограниченного остатка // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. – 2007. – Вып. 7(57). – С.168-175.
9. Хаусдорф Ф. Теория множеств / М.: ОНТИ,1937. – 306 с.

10. Ferenczi S. Bounded remainder sets // Acta Arithmetica. – 1992. – 61. – P.319-326.
11. Hecke E. Eber Analytische Funktionen und die Verteilung van Zahlen mod Eins // Math. Sem. Hamburg Univ. – 1921. – 5. – P.54-76.
12. Henrikson J. Completeness and Total Boundedness of the Hausdorff Metric // MIT Undergraduate Journal of Mathematics. – 1. – P.69-80.
13. Kesten H. On a conjecture of Erdös and Szüsz related to uniform distribution mod 1 // Acta Arithmetica. – 1966. – 12. – P.193-212.
14. Liardet P. Regularities of distribution // Compositio Math. – 1987. – 61. – P.267-293.
15. Rauzy G. Ensembles a restes bornes // Seminaire de theorie des nombres de Bordeaux 1983/1984, Bordo. – 1984. – Expose 24.
16. Rauzy G. Nombres algébriques et substitutions // Bull. Soc. Math. France. – 1982. – 110. – P.147-178.
17. Szüsz R. Uber die Verteilung der Vielfachen einer Komplexen Zahl nach dem Modul des Einheitsquadrats // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. – 1954. – 5. – P.35-39.
18. Weyl H. Über die Gibbs'sche Erscheinung und verwandte Konvergenzphänomene // Rendiconti del Circolo Mathematico di Palermo. – 1910. – 30. – P.377-407.

DISTRIBUTION OF FRACTIONAL PARTS OF A LINEAR FUNCTION ON SETS OF POSITIVE CODIMENSION

A.V. Shutov

Vladimir State University,
Stroiteley Av., 11, Vladimir, 600024, Russia, e-mail: a1981@mail.ru

Abstract. Let $\alpha \in \mathbb{R}^d$ be a vector that coordinates are linearly independent with 1 over field of rational numbers. It is proved that for any polyhedron only finite set of its points are congruent to points $i\alpha$ modulo $\mathbb{Z}^d$ lattice. Examples of two-dimensional curves without this property are constructed. Some applications to bounded remainder sets problem are obtained.

Key words: distribution of fractional parts, Weyl's theorem, sets of positive codimension, bounded remainder sets.