MSC 35K35

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ РЕШЕНИЙ АНИЗОТРОПНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ДВОЙНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

А.А. Леонтьев

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,
пр. Ленина, 37, Стерлитамак, 453103, Россия, e-mail: alexey_leontiev@inbox.ru

Аннотация. Для некоторого класса анизотропных параболических уравнений второго порядка с двойной нелинейностью в цилиндрических областях $D = (0, \infty) \times \Omega$ рассматривается первая смешанная задача с однородным краевым условием Дирихле и ограниченной начальной функцией. Доказана ограниченность решений этой задачи для произвольных неограниченных областей Ω.

Ключевые слова: анизотропное уравнение, параболическое уравнение с двойной нелинейностью, существование решения, ограниченность решения.

Введение. Пусть Ω — неограниченная область пространства $\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$, $n \geq 2$. В цилиндре $D = \{t > 0\} \times \Omega$ для анизотропного параболического уравнения второго порядка с двойной нелинейностью рассматривается первая смешанная задача

$$(|u|^{k-2}u)_t = \sum_{\alpha=1}^{n} (a_\alpha(u_{x_\alpha}^2) u_{x_\alpha})_{x_\alpha}, \quad k > 1, \quad (t, \mathbf{x}) \in D\,; \tag{1}$$

$$u(t, \mathbf{x})\big|_S = 0\,, \quad S = \{t > 0\} \times \partial\Omega\,; \tag{2}$$

$$u(0, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})\,, \quad \varphi(\mathbf{x}) \in L_k(\Omega), \quad \varphi_{x_\alpha}(\mathbf{x}) \in L_{p_\alpha}(\Omega), \quad \alpha = \overline{1, n}\,. \tag{3}$$

Предполагается, что неотрицательные функции $a_\alpha(s)$, $s \geq 0$, $\alpha = \overline{1, n}$, подчиняются условиям: $a_\alpha(s) \in C^1(0, \infty)$, $\alpha = \overline{1, n}$,

$$\overline{a} s^{(p_\alpha - 2)/2} \leq a_\alpha(s) \leq \widehat{a} s^{(p_\alpha - 2)/2}\,, \tag{4}$$

$$\frac{p_1}{2} a_\alpha(s) \leq a_\alpha(s) + a'_\alpha(s)s \leq \widehat{b} a_\alpha(s)\,,$$

с положительными константами $\widehat{a} \geq \overline{a}$, $2\widehat{b} \geq p_1 \geq k$ $(p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_n)$. Например, $a_\alpha(s) = s^{(p_\alpha - 2)/2}$, $\alpha = \overline{1, n}$, $\widehat{b} = p_n$.

В настоящей работе доказывается ограниченность решения задачи (1)-(3) с ограниченной начальной функцией $\varphi(\mathbf{x})$. В случае модельного изотропного уравнения этот результат установлен Ф.Х. Мукминовым, Э.Р. Андрияновой [1].

Работа поддержана РФФИ (грант № 13-01-0081-а).

Теорема 1. *Если*

$$\sum_{\alpha=1}^{n} 1/p_\alpha < 1 + n/p_n\,, \tag{5}$$

то обобщенное решение $u(t,\mathbf{x})$ задачи (1)-(3) с ограниченной начальной функцией $\varphi(\mathbf{x}) \in L_\infty(\Omega)\cap \overset{\circ}{W}{}^{1}_{k,\mathbf{p}}(\Omega)$ является ограниченным, т.е.

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{D} \mid u(t,\mathbf{x}) \mid \le B < \infty\,. \tag{6}$$

1. Вспомогательные сведения. Пусть $\|\cdot\|_{p,Q}$ — норма в $L_p(Q)$, $p \ge 1$, причем значение $Q = \Omega$ опускается. Через $D_a^b = (a,b)\times\Omega$ обозначим цилиндр, значение $a = 0$ опускается.

Банаховы пространства $\overset{\circ}{H}{}^{1}_{\mathbf{p}}(\Omega)$, $\overset{\circ}{W}{}^{1}_{k,\mathbf{p}}(\Omega)$ определим как пополнения пространства $C_0^\infty(\Omega)$, соответственно, по нормам

$$\|u\|_{H^1_{\mathbf{p}}(\Omega)} = \sum_{\alpha=1}^{n} \|u_{x_\alpha}\|_{p_\alpha}\,, \quad \|u\|_{W^{\,1}_{k,\mathbf{p}}(\Omega)} = \|u\|_{H^1_{\mathbf{p}}(\Omega)} + \|u\|_k\,.$$

Банаховы пространства $\overset{\circ}{W}{}^{0,\mathbf{m}}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$, $\overset{\circ}{W}{}^{1,\mathbf{m}}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$ определим как пополнения пространства $C_0^\infty(D_{-1}^{T+1})$, соответственно, по нормам

$$\|u\|_{W^{0,\mathbf{m}}_{k,\mathbf{p}}(D^T)} = \|u\|_{k,D^T} + \sum_{\alpha=1}^{n} \|u_{x_\alpha}\|_{p_\alpha,D^T}\,,$$

$$\|u\|_{W^{1,\mathbf{m}}_{k,\mathbf{p}}(D^T)} = \|u\|_{W^{0,\mathbf{m}}_{k,\mathbf{p}}(D^T)} + \|u_t\|_{k,D^T}\,.$$

Определение. *Обобщенным решением задачи* (1)–(3) *с функцией* $\varphi(\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{W}{}^{1}_{k,\mathbf{p}}(\Omega)$ *назовем функцию $u(t,\mathbf{x})$ такую, что при всех $T > 0$ $u(t,\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{W}{}^{0,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$ и удовлетворяет интегральному тождеству*

$$\int\limits_{D^T} \left(-|u|^{k-2}uv_t + \sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha(u^2_{x_\alpha})u_{x_\alpha}v_{x_\alpha} \right) d\mathbf{x}dt = \int\limits_{\Omega} |\varphi(\mathbf{x})|^{k-2}\varphi(\mathbf{x})v(0,\mathbf{x})d\mathbf{x}\,,$$

для любой функции $v(t,\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$, $v(T,\mathbf{x}) = 0$.

Теорема 2. *Пусть $\varphi(\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{W}{}^{1}_{k,\mathbf{p}}(\Omega)$, $p_1 \ge k$, $k > 1$, тогда существует обобщенное решение $u(t,\mathbf{x})$ задачи (1)-(3), для любого $T > 0$ удовлетворяющее условиям*

$$u \in L_\infty((0,\infty), \overset{\circ}{W}{}^{1}_{k,\mathbf{p}}(\Omega))\,; \tag{7}$$

$$|u|^{(k-2)/2}u_t \in L_{2,\mathrm{loc}}((0,\infty), L_2(\Omega))\,, \quad k > 1\,;$$

$$u_t \in L_{k,\mathrm{loc}}((0,\infty), L_k(\Omega)), \quad k \in (1,2)\,; \tag{8}$$

$$|u|^{k-2}u_t \in L_{k',\mathrm{loc}}((0,\infty), L_{k'}(\Omega))\,,\ k' = \frac{k}{k-1}, \quad k \geq 2\,. \tag{9}$$

Решение задачи (1)-(3) строится методом галеркинских приближений, который ранее был предложен Ф.Х. Мукминовым, Э.Р. Андрияновой (см. [2]) для модельного изотропного параболического уравнения с двойной нелинейностью и обобщен авторами статьи на некоторый класс анизотропных уравнений (см. [3], [4]). Следует отметить, что галеркинские приближения для случаев $k \in (1,2)$ и $k \geq 2$ строятся различными способами. Для $k \in (1,2)$ и любой функции $v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$ справедливо тождество (см. [4, (55)])

$$-\left(|u|^{k-2}u, v_t\right)_{D^T} + \sum_{\alpha=1}^{n}\left(a_\alpha(u^2_{x_\alpha})u_{x_\alpha}, v_{x_\alpha}\right)_{D^T} + (|u|^{k-2}u, v)\Big|_{t=0}^{t=T} = 0\,, \tag{10}$$

а для $k \geq 2$ и любой $v \in \overset{\circ}{W}{}^{0,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$ выполняется равенство (см. [3, (61)])

$$\left((|u|^{k-2}u)_t, v\right)_{D^T} + \sum_{\alpha=1}^{n}\left(a_\alpha((u_{x_\alpha})^2)u_{x_\alpha}, v_{x_\alpha}\right)_{D^T} = 0\,. \tag{11}$$

Далее приведем две теоремы вложения анизотропных пространств Соболева.

Лемма 1 ([5], [6]). *Пусть* $u(\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{H}{}^{1}_{\mathbf{p}}(\Omega)$ *и* $\sum\limits_{\alpha=1}^{n} 1/p_\alpha > 1$, *тогда* $u(\mathbf{x}) \in L_{P^*}(\Omega)$, *где* $P^* = n\left(-1 + \sum\limits_{\alpha=1}^{n} 1/p_\alpha\right)^{-1}$, *причем*

$$\|u\|_{P^*} \leq A_1 \sum_{\alpha=1}^{n} \|u_{x_\alpha}\|_{p_\alpha}\,, \tag{12}$$

здесь A_1 *— константа, зависящая от* p_α, n.

Лемма 2 ([5]). *Пусть* $u(\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{H}{}^{1}_{\mathbf{p}}(\Omega)$ *и* $\sum\limits_{\alpha=1}^{n} 1/p_\alpha \leq 1$, *тогда* $u(\mathbf{x}) \in L_P(\Omega)$ *при любом* $P > 0$, *при этом*

$$\|u\|_P \leq A_2\,(\mathrm{mes}\ \Omega)^{1/P-1/P^*} \sum_{\alpha=1}^{n} \|u_{x_\alpha}\|_{p_\alpha}\,, \tag{13}$$

где A_2 *— константа, зависящая от* P, p_α, n.

2. Доказательство теоремы 1. Покажем, что если $|\varphi(\mathbf{x})| \leq B,\ B > 0$, для почти всех $\mathbf{x} \in \Omega$, то выполняется неравенство (6). Положим

$$u^{(B)}(t,\mathbf{x}) = \max(u(t,\mathbf{x}) - B, 0)\,.$$

Пусть, сначала $k \in (1,2)$. Из свойства (8) следует, что $u^{(B)}(t,\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$. Положим в тождестве (10) $v = u^{(B)}\xi(\mathbf{x})$, где $\xi(\mathbf{x})$ — липшицева финитная функция:

$$\int\limits_{D^T} \left(-|u|^{k-2}uu_t^{(B)}\xi + \sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha(u_{x_\alpha}^2)u_{x_\alpha}\left(u_{x_\alpha}^{(B)}\xi + u^{(B)}\xi_{x_\alpha}\right)\right) d\mathbf{x}dt +$$

$$+ \int\limits_{\Omega} |u(t,\mathbf{x})|^{k-2}u(t,\mathbf{x})u^{(B)}(t,\mathbf{x})d\mathbf{x}\xi(\mathbf{x})\Big|_{t=0}^{t=T} = 0\,. \tag{14}$$

Выберем $\xi(\mathbf{x}) = \eta(|\mathbf{x}|)$, где

$$\eta(\rho) = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad \rho < r, \\ 0, & \text{при} \quad \rho > R, \\ (R-\rho)/(R-r), & \text{при} \quad \rho \in [r,R]\,. \end{cases}$$

Тогда $|\xi_{x_\alpha}| \leq 1/(R-r)$, $\alpha = \overline{1,n}$. Заметим, что $u^{(B)}(0,\mathbf{x}) = \varphi^{(B)}(\mathbf{x}) = 0$ для п.в. $\mathbf{x} \in \Omega$.

Далее оцениваем интегралы, входящие в равенство (14), получаем:

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\int\limits_{D^T} a_\alpha(u_{x_\alpha}^2)u_{x_\alpha}u_{x_\alpha}^{(B)}\xi d\mathbf{x}dt = \sum_{\alpha=1}^{n}\int\limits_{D^T} a_\alpha(u_{x_\alpha}^2)\left(u_{x_\alpha}^{(B)}\right)^2\xi d\mathbf{x}dt \geq 0\,. \tag{15}$$

Применяя условие (4) и неравенство Гельдера, выводим

$$\begin{aligned} -\sum_{\alpha=1}^{n}\int\limits_{D^T} a_\alpha(u_{x_\alpha}^2)u_{x_\alpha}u^{(B)}\xi_{x_\alpha}d\mathbf{x}dt &\leq \\ \leq \frac{\widehat{a}}{R-r}\sum_{\alpha=1}^{n}\int\limits_{D^T}|u_{x_\alpha}|^{p_\alpha-1}u^{(B)}d\mathbf{x}dt &\leq \\ \leq \frac{\widehat{a}}{R-r}\sum_{\alpha=1}^{n}\int\limits_{0}^{T}\|u_{x_\alpha}\|_{p_\alpha}^{p_\alpha-1}\|u^{(B)}\|_{p_\alpha}dt&\,. \end{aligned} \tag{16}$$

Преобразуем разность интегралов:

$$I_1 = \int\limits_{\Omega}|u(T)|^{k-2}u(T)u^{(B)}(T)\xi d\mathbf{x} - \int\limits_{D^T}|u|^{k-2}uu_t^{(B)}\xi d\mathbf{x}dt = \tag{17}$$

$$= \int\limits_{\Omega\cap\{u(T,\mathbf{x})>B\}} (u^{(B)}(T)+B)^{k-1}u^{(B)}(T)\xi d\mathbf{x} -$$

$$- \int\limits_{D^T\cap\{u>B\}} (u^{(B)}+B)^{k-1}u_t^{(B)}\xi d\mathbf{x}dt =$$

$$= \int\limits_{\Omega\cap\{u(T,\mathbf{x})>B\}} (u^{(B)}(T)+B)^{k-1}u^{(B)}(T)\xi d\mathbf{x} -$$

$$- \int\limits_{D^T\cap\{u>B\}} (u^{(B)}+B)^{k-1}(u^{(B)}+B)_t\xi d\mathbf{x}dt =$$

$$= \int\limits_{\Omega}(u^{(B)}(T)+B)^{k-1}u^{(B)}(T)\xi d\mathbf{x} - \frac{1}{k}\int\limits_{\Omega}\xi(u^{(B)}(t,\mathbf{x})+B)^k d\mathbf{x}\Big|_0^T =$$

$$= \frac{k-1}{k}\int\limits_{\Omega}\xi(u^{(B)}(t,\mathbf{x})+B)^k d\mathbf{x}\Big|_0^T - B\int\limits_{\Omega}(u^{(B)}(T)+B)^{k-1}\xi\Big|_0^T d\mathbf{x}.$$

Положим $h(u)=\frac{k-1}{k}(u+B)^k - B(u+B)^{k-1}$, тогда $h'(u)=(k-1)(u+B)^{k-2}u>0$ для $u>0$. Таким образом, равенство (17) можно переписать в виде

$$I_1 = \int\limits_{\Omega}\xi h(u^{(B)}(t))\Big|_0^T d\mathbf{x} = \int\limits_{\Omega}\xi u^{(B)}(T)h'(\theta u^{(B)}(T))d\mathbf{x}, \tag{18}$$

где $0<\theta(\mathbf{x})<1$.

Соединяя (14) – (16), (18), выводим неравенство

$$\int\limits_{\Omega(r)} u^{(B)}(T)h'(\theta u^{(B)}(T))d\mathbf{x} \le \frac{\widehat{a}}{R-r}\sum_{\alpha=1}^{n}\int\limits_0^T \|u_{x_\alpha}\|_{p_\alpha}^{p_\alpha-1}\|u^{(B)}\|_{p_\alpha}dt, \tag{19}$$

где $\Omega(r)=\{\mathbf{x}\in\Omega \mid |\mathbf{x}|<r\}$.

Для случая $1<\sum\limits_{\alpha=1}^{n}1/p_\alpha \le 1+n/p_n$, применяя неравенства Гельдера и (12), для функции $u^{(B)}(t,\mathbf{x})$ получаем

$$\|u^{(B)}(t)\|_{p_\beta} \le \|u^{(B)}(t)\|_{P^*}\left(\mathrm{mes}\{\Omega\cap\{u(t,\mathbf{x})>B\}\}\right)^{P^*/(P^*-p_\beta)} \le$$

$$\le A_1\left(\mathrm{mes}\{\Omega\cap\{u(t,\mathbf{x})>B\}\}\right)^{P^*/(P^*-p_\beta)}\sum_{\alpha=1}^{n}\|u_{x_\alpha}^{(B)}(t)\|_{p_\alpha}. \tag{20}$$

В случае $\sum\limits_{\alpha=1}^{n}1/p_\alpha\le 1$, пользуясь неравенством (13) при $P=p_\beta$, для функции $u^{(B)}(\mathbf{x})$ получаем

$$\begin{aligned}&\|u^{(B)}(t)\|_{p_\beta}\le\\ &\le A_2\left(\mathrm{mes}\{\Omega\cap\{u(t,\mathbf{x})>B\}\}\right)^{1/p_\beta-1/P^*}\sum_{\alpha=1}^{n}\|u_{x_\alpha}^{(B)}(t)\|_{p_\alpha}.\end{aligned} \tag{21}$$

Из свойства (7) следует, что $\mathrm{mes}\{\Omega\cap\{u(t,\mathbf{x})>B\}\}\le C_1$ для $t>0$. Пользуясь (7), для $\sum\limits_{\alpha=1}^{n}1/p_\alpha\le 1+n/p_n$ из (20), (21) выводим

$$\|u^{(B)}(t)\|_{p_\beta}\le C_2\sum_{\alpha=1}^{n}\|u^{(B)}_{x_\alpha}(t)\|_{p_\alpha}\le C_3,\quad \beta=\overline{1,n}.$$

Тогда правая часть в (19) стремится к нулю при $R\to\infty$. Следовательно,

$$u^{(B)}(T,\mathbf{x})h'(\theta u^{(B)}(T))=0,$$

для почти всех $\mathbf{x}\in\Omega(r)$. Поэтому $u^{(B)}(T,\mathbf{x})=0$ почти всюду в $\Omega(r)$. Ввиду произвольности $r>0$, $T>0$, отсюда следует $u(t,\mathbf{x})\le B$ для всех $t\ge 0$ при почти всех $\mathbf{x}\in\Omega$. Выполнив аналогичные действия для функции $\tilde{u}=-u$, установим, что $u(t,\mathbf{x})\ge -B$.

Для случая $k\ge 2$ срезка $u^{(B)}\in\overset{\circ}{W}{}^{0,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$. Запишем тождество (11) для $v=u^{(B)}\xi(\mathbf{x})$:

$$\int\limits_{D^T}\left((|u|^{k-2}u)_t u^{(B)}\xi+\sum_{\alpha=1}^{n}a_\alpha(u^2_{x_\alpha})u_{x_\alpha}\left(u^{(B)}_{x_\alpha}\xi+u^{(B)}\xi_{x_\alpha}\right)\right)d\mathbf{x}dt=0.$$

Преобразуем интеграл:

$$I_2=\int\limits_{D^T}(|u|^{k-2}u)_t u^{(B)}\xi d\mathbf{x}dt=(k-1)\int\limits_{D^T}|u|^{k-2}u_t u^{(B)}\xi d\mathbf{x}dt=$$

$$=(k-1)\int\limits_{D^T\cap\{u>B\}}(u^{(B)}+B)^{k-2}u^{(B)}_t u^{(B)}\xi d\mathbf{x}dt=$$

$$=(k-1)\int\limits_{D^T\cap\{u>B\}}(u^{(B)}+B)^{k-1}u^{(B)}_t\xi d\mathbf{x}dt-$$

$$-(k-1)B\int\limits_{D^T\cap\{u>B\}}(u^{(B)}+B)^{k-2}u^{(B)}_t\xi d\mathbf{x}dt=$$

$$=\frac{k-1}{k}\int\limits_{\Omega}\xi(u^{(B)}(t,\mathbf{x})+B)^k d\mathbf{x}\Big|_0^T-B\int\limits_{\Omega}(u^{(B)}(t,\mathbf{x})+B)^{k-1}\xi d\mathbf{x}\Big|_0^T.$$

Таким образом, интегралы I_1 и I_2 совпадают. Теорема доказана. ■

Автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю Кожевниковой Л.М. за помощь в подготовке статьи.

Литература

1. Андриянова Э.Р., Мукминов Ф.Х. Стабилизация решения параболического уравнения с двойной нелинейностью // Матем. сб. – 2013. – 204;9. – С.3-28.

2. Андриянова Э.Р., Мукминов Ф.Х. Оценка снизу скорости убывания решения параболического уравнения с двойной нелинейностью // Уфимск. матем. журн. – 2011. – 3;3. – С.3-14.
3. Кожевникова Л.М., Леонтьев А.А. Оценки решения анизотропного параболического уравнения с двойной нелинейностью // Уфимск. матем. журн. – 2011. – 3;4. – С.64-85.
4. Кожевникова Л.М., Леонтьев А.А. Убывание решения анизотропного параболического уравнения с двойной нелинейностью в неограниченных областях // Уфимск. матем. журн. – 2013. – 5;1. – С.65-83.
5. Лу Вень-Туан. К теоремам вложения для пространств функций с частными прозводными, суммируемыми с различными степенями // Вестн. ЛГУ. – 1961. – 7. – С.23-38.
6. Кружков С.Н. Краевые задачи для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка // Матем. сб. – 1968. – 77. – С.229-334.

BOUNDEDNESS OF SOLUTIONS OF ANISOTROPIC PARABOLIC EQUATIONS WITH DOUBLE NON-LINEARITY IN UNBOUNDED DOMAINS

A.A. Leontiev

Sterlitamak department f Bashkir State University,
Lenin Av., 37, Sterlitamak, 453103, Russia, e-mail: alexey_leontiev@inbox.ru

Abstract. The first mixed problem with the Dirihlet homogeneous boundary condition and boundedness initial function for some class of the second order anisotropic doubly nonlinear parabolic equations is studied in the cylindrical domain $D = (0, \infty) \times \Omega$. Boundedness of solutions of this problem is proved for arbitrary unbounded domains Ω.

Key words: anisotropic equation, doubly nonlinear parabolic equation, existence of strong solution, boundedness of solution.