MSC 35J25, 35J60

О СХОДИМОСТИ РЕШЕНИЙ СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ФУДЖИТЫ В ОБЛАСТИ С ШАРОВОЙ ПОЛОСТЬЮ

С.В. Пикулин

Вычислительный центр РАН,
ул. Вавилова, 40, Москва, Россия, e-mail: spikulin@gmail.com

Аннотация. Рассматривается эллиптическое уравнение второго порядка с измеримыми коэффициентами с равномерно эллиптической линейной главной частью и нелинейным младшим членом, зависящим от неизвестной функции по степенному закону. Сформулированы достаточные условия сходимости к нулю решений задачи Дирихле в липшицевой области, содержащей одну шаровую полость, размер которой стремится к нулю. На границе полости предполагается выполнение неоднородного краевого условия, зависящего от параметра произвольным образом. На оставшейся части границы краевое условие полагается однородным. Даны оценки скорости сходимости и показана интегральная сходимость решений к нулю вместе с градиентами.

Ключевые слова: полулинейное эллиптическое уравнение, перфорированная область, сходимость решений, устранение особенностей.

Введение. Работа посвящена изучению свойств решений слабо нелинейных эллиптических уравнений второго порядка с равномерно эллиптической главной частью дивергентного вида. Примером такого уравнения является следующий аналог стационарного уравнения Фуджиты ($x \in \mathbb{R}^n$):

$$\Delta u - a(x)\,|u|^{\sigma-1}u = 0\,, \qquad \sigma > 1\,, \quad a(x) \geq 0\,. \tag{1}$$

Рассматриваются решения задачи Дирихле для уравнения приведенного вида в семействе областей Ω_ε, получаемых исключением из ограниченной липшицевой области Ω шаровой полости переменного радиуса ε с фиксированным центром $y \in \Omega$. На границе полости для каждого значения ε ставится неоднородное краевое условие, тогда как на остальной части границы выполнено однородное условие Дирихле.

Поведение решений семейства задач указанного вида при $\varepsilon \to 0$ в случае линейного уравнения ($a(x) \equiv 0$) существенно зависит от краевых условий, задаваемых на границе шаровой полости. Если решения равномерно ограничены по ε на границе полости, то семейство решений стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$ в каждой точке области (за исключением y). Если условие равномерной ограниченности не выполнено, то решения могут стремиться к ненулевой предельной функции — например в случае, когда решения при разных ε являются ограничениями на Ω_ε функции Грина задачи Дирихле в Ω с особенностью в точке y, — либо не стремиться ни к какому пределу.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00923) и программы № 3 фундаментальных исследований ОМН РАН.

В нелинейном случае возможно выполнение поточечной сходимости решений к нулю вне зависимости от поведения функций, задающих краевые условия. В работе доказана сходимость решений к нулю при $\varepsilon \to 0$ при условии, что коэффициент $a(x)$ отделен от нуля в некоторой окрестности полостей при малых ε, и значение показателя σ достаточно велико. Доказательство основано на применении оценки В.А. Кондратьева и Е.М. Ландиса [1] решения полулинейного уравнения со степенной нелинейностью через расстояние до границы области и на использовании методов теории устранения особенностей для эллиптических уравнений [2–4]. Интегральная сходимость градиентов устанавливается с помощью подстановки подходящей пробной функции в интегральное тождество и последующих оценок с использованием неравенства Юнга.

Результаты настоящей работы аналогичны результатам [5,6] о сходимости решений в перфорированных областях, содержащих шаровые полости, количество которых растет при $\varepsilon \to 0$ по определенному закону. В заметке [7] анонсированы результаты, описывающие сходимость решений в областях со сферической и цилиндрической перфорацией.

Автор выражает благодарность О.А. Матевосяну за полезные обсуждения.

Основные обозначения:

Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ — замыкание Ω;

mes X — мера Лебега измеримого множества $X \subset \mathbb{R}^n$;

$B(x_0, R)$ — шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в x_0 радиуса R;

$\mu_n \equiv \operatorname{mes} B(0,1)$ — объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$;

$W_2^1(\Omega)$ — пространство Соболева, состоящее из функций класса $L_2(\Omega)$, которые обладают обобщенными частными производными также из $L_2(\Omega)$, снабженное нормой $\|\cdot\,;\, W_2^1(\Omega)\|$,

$$\|u\,;\, W_2^1(\Omega)\|^2 \equiv \|u\,;\, L_2(\Omega)\|^2 + \sum_{i=1}^{n} \|\partial u/\partial x_i\,;\, L_2(\Omega)\|^2\,; \tag{2}$$

$\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ — пополнение пространства $C_0^\infty(\Omega)$ по норме $\|\cdot\,;\, W_2^1(\Omega)\|$.

Посредством C с нижними индексами обозначаются константы, не зависящие от точки области. Там, где это удобно, используется обозначение

$$L \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

для оператора второго порядка дивергентного вида с измеримыми коэффициентами.

1. Постановка задачи и формулировка результатов. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная липшицева область, $n \geq 3$, $y \subset \Omega$ — некоторая фиксированная точка. Обозначим через Ω_ε область Ω с исключенной шаровой полостью малого радиуса ε:

$$\Omega_\varepsilon := \Omega \setminus \overline{B(y,\varepsilon)}, \quad 0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(y, \partial\Omega). \tag{3}$$

Рассмотрим задачу Дирихле

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\,\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\right) - a(x)\,|u_\varepsilon|^{\sigma-1}\,u_\varepsilon = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = 0 \qquad \text{на } \partial\Omega, \\ u_\varepsilon = \varphi_\varepsilon \quad \text{на } \partial B(y,\varepsilon), \end{cases} \tag{4}$$

где $\sigma > 1$, $\varphi_\varepsilon \in W_2^1(\Omega_\varepsilon) \cap L_\infty(\Omega_\varepsilon)$, $a(x) \geq 0$ — измеримая функция в Ω, $a(x) \geq a_0 = \mathrm{const} > 0$ в некоторой окрестности точки y, ограниченные измеримые функции $a_{ij} \equiv a_{ji} \in L_\infty(\Omega)$ для некоторого $\lambda \geq 1$ удовлетворяет условию равномерной эллиптичности

$$\lambda^{-1}\,|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\xi_i\,\xi_j \leq \lambda\,|\xi|^2, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{5}$$

Определение. *Функция $u_\varepsilon \in W_2^1(\Omega_\varepsilon) \cap L_\infty(\Omega_\varepsilon)$ называется обобщенным решением задачи (4), если для любой функции $\chi \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$, равной нулю в окрестности $B(y,\varepsilon)$, справедливо включение $\big((u-\varphi)\,\chi\big) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, и для любой функции $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ выполняется равенство*

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\,dx + \int_\Omega a(x)\,|u|^{\sigma-1}u\,\psi\,dx = 0. \tag{6}$$

Существование обобщенного решения задачи (4) может быть доказано на основании вариационного принципа [8]. Известно, что обобщенное решение является непрерывной по Гельдеру функцией в точках Ω_ε. Если область Ω липшицева, то решение сохраняет свойство гельдеровости на множестве $\Omega_\varepsilon \cup \partial\Omega$.

Принцип максимума ([8,9]). *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, и функция $u \in W_2^1(\Omega)$ удовлетворяет условиям:*

$$Lu \geq 0 \ \text{ в } \ \Omega, \qquad u \leq 0 \ \text{ на } \ \partial\Omega.$$

Тогда $u \leq 0$ в Ω.

Принцип сравнения ([1]). *Пусть $a_1(x) \geq a_2(x) \geq 0$ — ограниченные измеримые функции в Ω, $\sigma > 0$, $u_1, u_2 \in W_2^1(\Omega)$ — решения уравнений*

$$L\,u_1 - a_1(x)\,|u_1|^{\sigma-1}\,u_1 = 0 \ \text{ в } \ \Omega,$$
$$L\,u_2 - a_2(x)\,|u_2|^{\sigma-1}\,u_2 = 0 \ \text{ в } \ \Omega,$$

и выполняется условие $|u_1| \leq u_2$ на $\partial\Omega$. Тогда $|u_1| \leq u_2$ в Ω.

□ Рассмотрим функцию $v := u_1 - u_2$, непрерывную в Ω. Допустим, $v(x_0) > 0$ для некоторой точки $x_0 \in \Omega$. Пусть D — компонента связности множества

$\{x \in \Omega : v(x) > 0\}$, содержащая x_0. Тогда $u_1 > u_2$ в D, $v \le 0$ на ∂D. Покажем, что $Lv \ge 0$ в D. В самом деле, для произвольной функции $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\psi \ge 0$, имеем

$$\int_D \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\, dx = \int_D \sum_{i,j=1}^n \left(-a_1(x)\, u_1^\sigma + a_2(x)\, u_2^\sigma\right) \psi\, dx \le 0.$$

По принципу максимума, из этого следует, что $v \le 0$ в D, что противоречит предположению $v(x_0) > 0$. Предположение неверно, следовательно, $u_1 \le u_2$ в Ω.

Заменяя в предыдущем рассуждении функцию u_1 на $(-u_1)$, получим, что $-u_1 \le u_2$ в Ω. ■

Пусть $u_\varepsilon \in W_2^1(\Omega_\varepsilon) \cap L_\infty(\Omega_\varepsilon)$ — обобщенное решение задачи Дирихле (4), где $n \ge 3$,

$$\sigma > \frac{n}{n-2} \quad \Leftrightarrow \quad \sigma^* := \left(1 - \sigma^{-1}\right)^{-1} \in (1, n/2)\,. \tag{7}$$

Теорема 1. *Пусть $n \ge 3$, выполняется условие (7), числа $\nu > 0$ и q: $0 \le q < 1$ таковы, что выполняется линейное соотношение*

$$(n-2)\, q + \nu = n - 2\,\sigma^* \equiv \frac{(n-2)\,\sigma - n}{\sigma - 1}\,.$$

Тогда выполняется следующее свойство сходимости:

$$\sup_{\Omega \setminus B(y, d_\varepsilon)} |u_\varepsilon| = \mathrm{O}(\varepsilon^\nu) \quad при \quad \varepsilon \to 0\,,$$

где $d_\varepsilon \sim d_0\, \varepsilon^q$ при $\varepsilon \to 0$, $d_0 > 0$ — произвольная константа.

Следствие. *В условиях теоремы 1 решения u_ε сходятся к нулю при $\varepsilon \to 0$ равномерно на множествах вида $\Omega \setminus B(y,d)$ при всяком $d > 0$ вне зависимости от выбора функций φ_ε, задающих краевые условия.*

Доказательство теоремы 1 содержится в пункте 2.

Теорема 2. *Пусть $n \ge 3$, $\varphi_\varepsilon \ge 0$ на $\partial B(y,\varepsilon)$, и выполнено условие (7). Зафиксируем некоторое число*

$$q \in \left(1, \frac{n}{2\sigma^*}\right)$$

и последовательность $\delta_\varepsilon \sim \delta_0\, \varepsilon^q$ при $\varepsilon \to 0$, $\delta_0 = \mathrm{const} > 0$.

Тогда $u_\varepsilon \ge 0$ в Ω_ε, и справедливо следующее соотношение:

$$\int\limits_{\Omega \setminus B(y, \varepsilon + \delta_\varepsilon)} \frac{|\nabla u_\varepsilon|^2 + a(x)\, u_\varepsilon^{\sigma+1}}{1 + u_\varepsilon}\, dx \to 0 \quad при \quad \varepsilon \to 0\,. \tag{8}$$

Доказательство теоремы 2 содержится в пункте 3.

2. Доказательство теоремы 1. Воспользуемся следующим фактом.

Теорема 3. ([1]). *Пусть $Q = B(x_0, R)$ — шар в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $u \in W_2^1(Q) \cap L_\infty(Q)$ — обобщенное решение уравнения*

$$Lu - a(x)\,|u|^{\sigma-1}\,u = 0 \;\text{ в }\; Q, \tag{9}$$

где $\sigma > 1$, $a(x) \geq a_0 > 0$ в Q. Тогда существует такое число $c_1 > 0$, зависящее только от n, σ, λ и a_0, что $u(x_0) \leq c_1\, R^{\frac{2}{1-\sigma}}$.

□ [Доказательство теоремы 1] Пусть ε столь мало, что $d_\varepsilon > 2\varepsilon$, шар $B(y, 2\varepsilon)$ лежит целиком в Ω, и неравенство $a(x) \geq a_0 > 0$ выполнено внутри этого шара. Пусть $x_0 \in \partial B(y, 2\varepsilon) \subset \Omega_\varepsilon$ — некоторая точка. Из теоремы 3, примененной к функции u_ε в шаре $B(x_0, \varepsilon)$, вытекает справедливость неравенства $|u_\varepsilon(x_0)| \leq c_1\, \varepsilon^{2/(1-\sigma)}$, откуда

$$|u_\varepsilon| \leq c_1\, \varepsilon^{\frac{2}{1-\sigma}} \;\text{ на }\; \partial B(y, 2\varepsilon)\,. \tag{10}$$

Согласно [10], существует положительное фундаментальное решение $G(x; y)$ оператора L с особенностью y, причем для некоторого $\beta \geq 1$, зависящего только от n, λ, выполняются оценки

$$\beta^{-1}\,|x-y|^{2-n} \leq G(x; y) \leq \beta\,|x-y|^{2-n}\,. \tag{11}$$

Рассмотрим следующую функцию:

$$g_\varepsilon(x) = c_1\, \varepsilon^{\frac{2}{1-\sigma}}\, \beta\, (2\varepsilon)^{n-2}\, G(x; y)\,. \tag{12}$$

Из первого неравенства (11) следует, что $\beta\,(2\varepsilon)^{n-2}\, G(x; y) \geq 1$ на сфере $\partial B(y, 2\varepsilon)$, поэтому из (10) и (12) вытекает

$$g_\varepsilon(x) \geq |u_\varepsilon| \text{ на } \partial B(y, 2\varepsilon)\,.$$

Кроме того, $g_\varepsilon > 0 = u_\varepsilon$ на $\partial\Omega$. Согласно принципу сравнения, получаем

$$g_\varepsilon \geq |u_\varepsilon| \;\text{ в }\; \Omega_\varepsilon \setminus B(y, 2\varepsilon)\,. \tag{13}$$

Применяя второе неравенство (11), получим из (12), (13):

$$|u_\varepsilon(x)| \leq \left(c_1\, \beta^2\, 2^{n-2}\right)\, \varepsilon^{n-2+\frac{2}{1-\sigma}}\, |x-y|^{2-n}\,, \quad x \in \Omega_\varepsilon \setminus B(y, 2\varepsilon)\,. \tag{14}$$

Применяя (14) при $x \in \Omega \setminus B(y, d_\varepsilon)$, найдем

$$\sup_{\Omega\setminus B(y,d_\varepsilon)} |u_\varepsilon| \leq \left(c_1\, \beta^2\, 2^{n-2}\right)\, \varepsilon^{\frac{(n-2)\,\sigma - n}{\sigma-1}}\, d_\varepsilon^{2-n} \sim C\, \varepsilon^{\frac{(n-2)\,\sigma-n}{\sigma-1} - (n-2)\,q} = C\, \varepsilon^\nu$$

при $\varepsilon \to 0$, где $C = c_1\, \beta^2\, 2^{n-2}\, d_0^{2-n}$. ■

3. Доказательство теоремы 2. При доказательстве используется неравенство Юнга в следующем виде:

$$a\,b \le \frac{1}{\alpha\,t}\,a^t + \frac{\alpha^{t^*/t}}{t^*}\,b^{t^*}\,, \tag{15}$$

где $a, b > 0$, $\alpha > 0$, величины $t, t^* > 1$ таковы, что $1/t + 1/t^* = 1$.

□ [Доказательство теоремы 2] Неравенство $u_\varepsilon \ge 0$ в Ω_ε при $\varphi_\varepsilon \ge 0$ на $\partial\Omega_\varepsilon$ следует из принципа сравнения. По определению обобщенного решения, $\forall\psi \in C_0^\infty(\Omega_\varepsilon)$ выполняется интегральное тождество

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\,dx + \int_{\Omega_\varepsilon} a(x)\,u_\varepsilon^\sigma\,\psi\,dx = 0\,. \tag{16}$$

Поскольку $C_0^\infty(\Omega_\varepsilon)$ плотно в $\mathring{W}_2^1(\Omega_\varepsilon)$, тождество (16) справедливо и для любых функций $\psi \in \mathring{W}_2^1(\Omega_\varepsilon)$.

Построим подходящую пробную функцию ψ. Для каждого ε зафиксируем такую функцию $\theta_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$, что выполняются условия $0 \le \theta_\varepsilon \le 1$ в Ω, $|\nabla\theta_\varepsilon| < 2/\delta_\varepsilon$ в Ω, и

$$\theta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \in \Omega \setminus B(y, \varepsilon + \delta_\varepsilon)\,, \\ 0, & \text{если} \quad x \in B(y, \varepsilon)\,. \end{cases}$$

Пусть $h \in (0,1)$ — такое число, что

$$\frac{h}{\sigma} < \frac{n}{2\sigma^*\,q} - 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad n - 2q\,\frac{\sigma + h}{\sigma - 1} > 0, \tag{17}$$

и пусть

$$p = p(h) := \frac{2\,(\sigma + h)}{\sigma - 1} \qquad \Leftrightarrow \qquad p = \frac{(p-2)\,(\sigma + h)}{1 + h} > 2\,.$$

Положим

$$\eta(t) := \min\{t\,;\, t^h\} \equiv \begin{cases} t, & \text{если} \quad 0 \le t \le 1 \\ t^h, & \text{если} \quad t > 1 \end{cases}. \tag{18}$$

Определим значение функции $\psi \in \mathring{W}_2^1(\Omega_\varepsilon)$ в точке $x \in \Omega_\varepsilon$ следующим равенством:

$$\psi(x) := \theta_\varepsilon(x)^p\,\eta(u_\varepsilon(x))\,. \tag{19}$$

Подставим построенную функцию ψ в тождество (16). Первое слагаемое разобьем на два и оценим их по отдельности:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\,dx =$$

$$= \int_{\{u_\varepsilon \le 1\}} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\frac{\partial (u_\varepsilon\,\theta_\varepsilon^p)}{\partial x_i}\,dx + \int_{\{u_\varepsilon > 1\}} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\frac{\partial (u_\varepsilon^h\,\theta_\varepsilon^p)}{\partial x_i}\,dx\,. \tag{20}$$

Первое слагаемое в (20) оценим, пользуясь равномерной эллиптичностью оператора L:

$$\int_{\{u_\varepsilon\le 1\}}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\,\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\frac{\partial(u_\varepsilon\,\theta_\varepsilon^p)}{\partial x_i}\,dx=\int_{\{u_\varepsilon\le 1\}}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\,\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\,\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\,\theta_\varepsilon^p\,dx+$$
$$+\int_{\{u_\varepsilon\le 1\}}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\,\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\,u_\varepsilon\,p\,\theta_\varepsilon^{p-1}\frac{\partial\theta_\varepsilon}{\partial x_i}\,dx\ge$$
$$\ge\lambda^{-1}\int_{\{u_\varepsilon\le 1\}}|\nabla u_\varepsilon|^2\,\theta_\varepsilon^p\,dx-p\,\lambda\int_{\{u_\varepsilon\le 1\}}|\nabla u_\varepsilon|\,|\nabla\theta_\varepsilon|\,\theta_\varepsilon^{p-1}\,dx\,. \tag{21}$$

Для оценки второго слагаемого (21) используем неравенство Юнга (15) при $t=t^*=2,\quad \alpha=p\lambda^2/\theta_\varepsilon$:

$$p\lambda\int_{\{u_\varepsilon\le 1\}}(|\nabla u_\varepsilon|\,|\nabla\theta_\varepsilon|)\,\theta_\varepsilon^{p-1}\,dx\le$$
$$\le p\,\lambda\int_{\{u_\varepsilon\le 1\}}\left(\frac{\theta_\varepsilon}{2p\,\lambda^2}\,|\nabla u_\varepsilon|^2+\frac{p\,\lambda^2}{2\theta_\varepsilon}\,|\nabla\theta_\varepsilon|^2\right)\,\theta_\varepsilon^{p-1}\,dx= \tag{22}$$
$$=\frac{1}{2\lambda}\int_{\{u_\varepsilon\le 1\}}\theta_\varepsilon^p\,|\nabla u_\varepsilon|^2\,dx+\frac{p^2\,\lambda^3}{2}\int_{\{u_\varepsilon\le 1\}}\theta_\varepsilon^{p-2}\,|\nabla\theta_\varepsilon|^2\,dx.$$

Аналогичным образом, оценим второе слагаемое (20). Сначала воспользуемся равномерной эллиптичностью:

$$\int_{\{u_\varepsilon>1\}}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\,\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\,\left(u_\varepsilon^h\,\theta_\varepsilon^p\right)\,dx=$$
$$=\int_{\{u_\varepsilon>1\}}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\,\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\,h\,u_\varepsilon^{h-1}\,\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\,\theta_\varepsilon^p\,dx+$$
$$+\int_{\{u_\varepsilon>1\}}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\,\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\,u_\varepsilon^h\,p\,\theta_\varepsilon^{p-1}\,\frac{\partial\theta_\varepsilon}{\partial x_i}\,dx\ge$$
$$\ge\frac{h}{\lambda}\int_{\{u_\varepsilon>1\}}|\nabla u_\varepsilon|^2\,|u_\varepsilon|^{h-1}\,\theta_\varepsilon^p\,dx-$$
$$-p\,\lambda\int_{\{u_\varepsilon>1\}}|\nabla u_\varepsilon|\,|\nabla\theta_\varepsilon|\,u_\varepsilon^h\,\theta_\varepsilon^{p-1}\,dx\,. \tag{23}$$

Оценим выражение (23), используя неравенство Юнга (15) при

$$t=t^*=2,\quad \alpha=\frac{p\,\lambda^2\,u_\varepsilon}{h\,\theta_\varepsilon}\,:$$

$$p\,\lambda \int_{\{u_\varepsilon>1\}} u_\varepsilon^h\,\theta_\varepsilon^{p-1}\,(|\nabla u_\varepsilon|\,|\nabla\theta_\varepsilon|)\,dx \le$$
$$p\,\lambda \int_{\{u_\varepsilon>1\}} u_\varepsilon^h\,\theta_\varepsilon^{p-1}\left(\frac{h\,\theta_\varepsilon}{2p\,\lambda^2\,u_\varepsilon}\,|\nabla u_\varepsilon|^2+\frac{p\,\lambda^2\,u_\varepsilon}{2h\,\theta_\varepsilon}\,|\nabla\theta_\varepsilon|^2\right)dx =$$
$$=\frac{h}{2\lambda}\int_{\{u_\varepsilon>1\}} u_\varepsilon^{h-1}\,\theta_\varepsilon^p\,|\nabla u_\varepsilon|^2\,dx+$$
$$+\frac{p^2\,\lambda^3}{2h}\int_{\{u_\varepsilon>1\}} u_\varepsilon^{h+1}\,\theta_\varepsilon^{p-2}\,|\nabla\theta_\varepsilon|^2\,dx\,. \tag{24}$$

По теореме 1, при достаточно малых ε множество $\{u_\varepsilon>1\}$ лежит в сколь угодно малой окрестности точки y. Таким образом, можно считать, что $a(x)\ge a_0$, если $u_\varepsilon(x)>1$. Полагая

$$t:=\frac{\sigma+h}{1+h},\quad t^*:=\frac{\sigma+h}{\sigma-1},\quad \alpha:=\frac{p^2\,\lambda^3}{t\,a(x)\,h}\,,$$

оценим выражение (24) с помощью неравенства Юнга:

$$\begin{aligned}&\frac{p^2\,\lambda^3}{2h}\int_{\{u_\varepsilon>1\}} u_\varepsilon^{h+1}\,\theta_\varepsilon^{p-2}\,|\nabla\theta_\varepsilon|^2\,dx\le\\ &\le\frac{1}{2}\int_{\{u_\varepsilon>1\}} a(x)\,u_\varepsilon^{\sigma+h}\,\theta_\varepsilon^p\,dx+C_1\int_{\{u_\varepsilon>1\}}|\nabla\theta_\varepsilon|^{2\frac{\sigma+h}{\sigma-1}}\,dx\,,\end{aligned} \tag{25}$$

$$C_1:=\frac{p^2\,\lambda^3}{2h}\,\frac{\sigma-1}{\sigma+h}\left(\frac{p^2\,\lambda^3}{2h\,a_0}\,\frac{1+h}{\sigma+h}\right)^{\frac{1+h}{\sigma-1}}\,.$$

Объединяя соотношения (20)-(25), получим следующую оценку:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_\varepsilon}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\,\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\,dx\ge\frac{1}{2\lambda}\int_{\{u_\varepsilon\le1\}}|\nabla u_\varepsilon|^2\,\theta_\varepsilon^p\,dx-\\ -\frac{p^2\,\lambda^3}{2}\int_{\{u_\varepsilon\le1\}}\theta_\varepsilon^{p-2}\,|\nabla\theta_\varepsilon|^2\,dx+\frac{h}{2\lambda}\int_{\{u_\varepsilon>1\}}|\nabla u_\varepsilon|^2\,u_\varepsilon^{h-1}\,\theta_\varepsilon^p\,dx-\\ -\frac{1}{2}\int_{\{u_\varepsilon>1\}}a(x)\,u_\varepsilon^{\sigma+h}\,\theta_\varepsilon^p\,dx-C_1\int_{\{u_\varepsilon>1\}}|\nabla\theta_\varepsilon|^{2\,\frac{\sigma+h}{\sigma-1}}\,dx\,.\end{aligned} \tag{26}$$

С учетом оценки (26), из тождества (16) получим

$$0=\int_{\Omega_\varepsilon}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\,\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\,dx+\int_{\Omega_\varepsilon}a(x)\,u_\varepsilon^\sigma\,\psi\,dx\ge$$
$$\ge\int_{\Omega_\varepsilon}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\,\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\,dx+\int_{\{u_\varepsilon\le1\}}a(x)\,u_\varepsilon^{\sigma+1}\,\theta_\varepsilon^p\,dx+\int_{\{u_\varepsilon>1\}}a(x)\,u_\varepsilon^{\sigma+h}\,\theta_\varepsilon^p\,dx\ge$$

$$\geq \int_{\{u_\varepsilon \leq 1\}} a(x)\, u_\varepsilon^{\sigma+1}\, \theta_\varepsilon^p\, dx + \int_{\{u_\varepsilon > 1\}} a(x)\, u_\varepsilon^{\sigma+h}\, \theta_\varepsilon^p\, dx + \frac{1}{2\lambda} \int_{\{u_\varepsilon \leq 1\}} |\nabla u_\varepsilon|^2\, \theta_\varepsilon^p\, dx -$$
$$- \frac{p^2\,\lambda^3}{2} \int_{\{u_\varepsilon \leq 1\}} \theta_\varepsilon^{p-2}\, |\nabla \theta_\varepsilon|^2\, dx + \frac{h}{2\lambda} \int_{\{u_\varepsilon > 1\}} |\nabla u_\varepsilon|^2\, u_\varepsilon^{h-1}\, \theta_\varepsilon^p\, dx -$$
$$- \frac{1}{2} \int_{\{u_\varepsilon > 1\}} a(x)\, u_\varepsilon^{\sigma+h}\, \theta_\varepsilon^p\, dx - C_1 \int_{\{u_\varepsilon > 1\}} |\nabla \theta_\varepsilon|^{2\,\frac{\sigma+h}{\sigma-1}}\, dx\,.$$

В полученном неравенстве приведем подобные члены и перенесем в левую часть члены, содержащие u_ε:

$$\frac{p^2\,\lambda^3}{2} \int_{\{u_\varepsilon \leq 1\}} \theta_\varepsilon^{p-2}\, |\nabla \theta_\varepsilon|^2\, dx + C_1 \int_{\{u_\varepsilon > 1\}} |\nabla \theta_\varepsilon|^{2\frac{\sigma+h}{\sigma-1}}\, dx \geq \tag{27}$$
$$\geq \int_{\{u_\varepsilon \leq 1\}} a(x)\, u_\varepsilon^{\sigma+1}\, \theta_\varepsilon^p\, dx + \frac{1}{2} \int_{\{u_\varepsilon > 1\}} a(x)\, u_\varepsilon^{\sigma+h}\, \theta_\varepsilon^p\, dx +$$
$$+ \frac{1}{2\lambda} \int_{\{u_\varepsilon \leq 1\}} |\nabla u_\varepsilon|^2 \theta_\varepsilon^p\, dx + \frac{h}{2\lambda} \int_{\{u_\varepsilon > 1\}} |\nabla u_\varepsilon|^2\, u_\varepsilon^{h-1}\, \theta_\varepsilon^p\, dx \geq$$
$$\geq \frac{1}{2} \int_\Omega a(x)\, \frac{u_\varepsilon^{\sigma+1}}{1+u_\varepsilon}\, \theta_\varepsilon^p\, dx + \frac{h}{2\lambda} \int_\Omega \frac{|\nabla u_\varepsilon|^2}{1+u_\varepsilon}\, \theta_\varepsilon^p\, dx \geq$$
$$\geq C_2 \int\limits_{\Omega_\varepsilon \setminus B(y,\varepsilon+\delta_\varepsilon)} \frac{a(x)\, u_\varepsilon^{\sigma+1} + |\nabla u_\varepsilon|^2}{1+u_\varepsilon}\, dx\,, \tag{28}$$

где $C_2 = \min\{h/\lambda\,;\ 1\}/2$. Для доказательства сходимости выражения в правой части (28) к нулю достаточно показать, что слагаемые в (27) стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$. Тем самым, будет доказано (8). Оценим первое слагаемое в (27):

$$\int_{\{u_\varepsilon \leq 1\}} \theta_\varepsilon^{p-2}\, |\nabla \theta_\varepsilon|^2\, dx \leq \int_\Omega |\nabla \theta_\varepsilon|^2\, dx \leq \left(\frac{2}{\delta_\varepsilon}\right)^2 \operatorname{mes} B(y, \varepsilon + \delta_\varepsilon) \leq$$
$$\leq \left(\frac{2}{\delta_\varepsilon}\right)^2 \mu_n (2\varepsilon)^n = \mathrm{O}\left(\varepsilon^{n-2q}\right) \quad \text{при} \ \ \varepsilon \to 0\,, \tag{29}$$

где $n - 2q > 0$. Аналогичным образом оценим второе слагаемое в (27):

$$\int_{\{u_\varepsilon > 1\}} |\nabla \theta_\varepsilon|^{2\frac{\sigma+h}{\sigma-1}}\, dx \leq \int_\Omega |\nabla \theta_\varepsilon|^{2\frac{\sigma+h}{\sigma-1}}\, dx \leq \left(\frac{2}{\delta_\varepsilon}\right)^{2\frac{\sigma+h}{\sigma-1}} \operatorname{mes} B(y, \varepsilon + \delta_\varepsilon) \leq$$
$$\leq \left(\frac{2}{\delta_\varepsilon}\right)^{2\frac{\sigma+h}{\sigma-1}} \mu_n\, (2\varepsilon)^n = \mathrm{O}\left(\varepsilon^{\nu_2}\right) \ \text{при} \ \varepsilon \to 0\,, \tag{30}$$

где $\nu_2 = -2q\,(\sigma + h)/(\sigma - 1) + n > 0$ в силу (17). Справедливость утверждения теоремы следует из оценок (27)–(30). ■

Литература

1. Кондратьев В.А., Ландис Е.М. О качественных свойствах решений одного нелинейного уравнения второго порядка // Матем. сборник. – 1988. – 135(177);3. – С.346-360.
2. Brezis H., Véron L. Removable singularities for some nonlinear elliptic equations // Arch. Rat. Mech. and Anal. – 1980. – 75;1. – P.1-6.
3. Vasquez J.L., Véron L. Singularities of elliptic equations with an exponential nonlinearity // Math. Anal. – 1984. – 269. – P.119-135.
4. Покровский А. В. Устранимые особенности решений нелинейных эллиптических уравнений // УМН. – 2007. – 62;3(375). – С.215-216.
5. Матевосян О.А., Пикулин С.В. Об усреднении слабонелинейных дивергентных эллиптических операторов в перфорированном кубе // Матем. заметки. – 2000. – 68;3. – С.390-398.
6. Матевосян О.А., Пикулин С.В. Об усреднении полулинейных эллиптических операторов в перфорированных областях // Матем. сборник. – 2002. – 193;3. – С.101-114.
7. Pikulin S.V. Behavior of solutions of semilinear elliptic equations in domains with complicated boundary // Russian J. Math. Phys. – 2012. – 19;3. – P.401-404.
8. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / М.: Наука, 1973.
9. Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические уравнения с частными производными второго порядка / М.: Наука, 1989.
10. Littmann W., Stampacchia G., Weinberger H.F. Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3). – 1963. – 17;№1-2. – P.43-77.

ON CONVERGENCE OF SOLUTIONS OF A STEADY-STATE EQUATION OF FUJITA TYPE IN A DOMAIN WITH A SPHERICAL CAVITY

S.V. Pikulin

CC RAS,

Vavilova St., 40, Moscow, 119333, Russia, e-mail: spikulin@gmail.com

Abstract. The elliptic equation of second order with measurable coefficients having the uniformly elliptic principal part and the nonlinear lowest term with arbitrary power function is studied. Sufficient conditions of the convergence to zero of the Dirichlet problem in Lipschitz' domain containing spherical cavity with size tending to zero are proved. It is supposed that the inhomogeneous boundary condition depending on parameter is fulfilled on the boundary part of cavity. At the other part, boundary conditions are assumed to be homogeneous. Some estimates of the convergence rate are given and it is shown the integral convergence to zero of solutions with their gradients.

Key words: semilinear elliptic equation, perforated domain, convergence of solutions, removing singularities .