MSC 11D45

О СУММИРОВАНИИ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ ДЕЛИТЕЛЕЙ ПО НАТУРАЛЬНЫМ ЧИСЛАМ С ПРОСТЫМИ ДЕЛИТЕЛЯМИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

К.М. Эминян

Финансовый университет при Правительстве РФ,
пр. Ленинградский, 49, Москва, 125993, Россия,
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,
ул. 2-я Бауманская, 5, Москва, 105005, Россия, e-mail: eminyan@mail.ru

Аннотация. Получена асимптотическая формула для суммы значений функции делителей по натуральным числам, простые делители которых имеют специальный вид.

Ключевые слова: функция делителей, двоичная система счисления, простые делители.

1. Введение

Пусть $\mathcal{P}$ — подмножество множества простых чисел. В аналитической теории чисел существует направление, изучающее свойства натуральных чисел, все простые делители которых принадлежат $\mathcal{P}$.

В 1909 году Э. Ландау [1] получил асимптотическую формулу для числа таких чисел, не превосходящих x для случая, когда $\mathcal{P}$ — множество простых чисел, лежащих в заданной арифметической прогрессии.

Позже нескльо авторов [2-4] доказали ряд теорем о распределении значений мультипликативных функций на множестве натуральных чисел, все простые делители которых принадлежат $\mathcal{P}$, где требуется лишь существование асимптотической формулы для суммы вида

$$\sum_{\substack{p\le x,\\ p\in\mathcal{P}}} 1\,.$$

Обзор указанных результатов представлен в монографии [5].

Большой вклад в эту проблематику внес М.Е. Чанга [6], который применил метод комплексного анализа для случая, когда

$$\mathcal{P}=\{p,\ p\in\bigcup_{n=1}^{\infty}[(Dn+l-1)^{1/a},(Dn+l)^{1/a})\}\,,$$

где l и D — фиксированные целые числа, $1\le l\le D$, a — нецелое число. За счет применения более точных методов исследования он существенно усилил результаты своих предшественников.

Цель настоящей статьи состоит в том, чтобы исследовать случай, когда $\mathcal{P}$ — множество простых чисел из множества $\mathbb{N}_0$, к определению которого мы переходим.

Пусть имеется представление натурального числа n в двоичной системе счисления:

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k 2^k ,$$

где $\varepsilon_k = 0, 1$.

Разобьем множество натуральных чисел на два непересекающихся класса следующим образом:

$$\mathbb{N}_0 = \left\{ n : n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k \equiv 0 \,(\mathrm{mod} 2) \right\} ,$$

$$\mathbb{N}_1 = \left\{ n : n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k \equiv 1 \,(\mathrm{mod} 2) \right\} .$$

В 2010 C. Mauduit и J. Rivat [7] доказали, в частности, что плотности множеств простых чисел из классов $\mathbb{N}_0$ и $\mathbb{N}_1$ совпадают. Другое доказательство этого факта дал B. Green [8].

Основным результатом данной статьи является следующая теорема.

Теорема. *Пусть*

$$T_{k0}(x) = \sum_{n \le x}{}' 1 ,$$

где штрих означает, что суммирование идет по натуральным числам с простыми делителями из множества $\mathbb{N}_0$. *Тогда справедлива асимптотическая формула*

$$T_{k0}(x) = x \sum_{0 \le n \le \sqrt{\ln x}} c_n \frac{(\ln x)^{k/2-n-1}}{\Gamma(k/2-n)} + O(x e^{-c\sqrt{\ln x}}), \quad c > 0 ,$$

где $c_n \in \mathbb{R}$.

Отметим, что если $k/2$ — целое число то сумма, стоящая в главном члене, содержит $k/2$ ненулевых слагаемых, так как $\Gamma^{-1}(k/2-n) = 0$ при $n \ge k/2$. Если же $k/2$ — нецелое число, то главный член представляет собой асимптотический ряд.

Доказательство сформулированной теоремы проводится методом производящих функций согласно схеме рассуждений работы [9]. Ключевую роль играет изучение аналитических свойств специальной дзета-функции вида

$$\zeta_0(s) = \prod_{p \in N_0} (1 - p^{-s})^{-1} ,$$

а также функций $\zeta^k(s)$ при натуральных k.

2. Схема доказательства теоремы

Прежде всего, на основе асимптотической формулы для суммы

$$\sum_{\substack{p\leq x,\\ p\in N_0}} 1$$

получаем, что для производящей функции нашей задачи $\zeta_0^k(s)$ имеет место следующее соотношение

$$\zeta_0^k(s) = \zeta^{k/2}(s)e^{G(s)}\,, \quad \operatorname{Re} s > 1, \tag{1}$$

где $\zeta(s)$ — дзета-функция Римана, а $G(s)$ — функция, регулярная и ограниченная в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1-\Delta$ при некотором $\Delta > 0$.

Применение метода производящих функций в нашей задаче имеет свою специфику. Поскольку получить индивидуальную оценку для функции делителей, существенно лучшую, чем $\tau_k(n) \leq n^{\varepsilon}$, невозможно, применить обычную формулу Перрона (см., например, [10, глава V, §1]), не удается. Поэтому приходится пользоваться ее «усредненным» вариантом из статьи [9], а затем методом «асимптотического дифференцирования».

Из формулы (1) следует, что при четном k функцию $\zeta_0^k(s)$ можно аналитически продолжить в полуплоскость $\operatorname{Re} s > 1-\Delta$. В случае же, когда k — нечетное число, этого сделать нельзя, поскольку не только точка $s=1$, но и все нетривиальные нули функции $\zeta(s)$ нечетного порядка, которые, возможно, лежат в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1-\Delta$, будут являться точками ветвления. Поэтому в последнем случае интегрирование ведется по контуру Ганкеля, а аналитическое продолжение осуществляется в область

$$\operatorname{Re} s > 1-\Delta(T)\,, \quad |\Im s| \leq T\,, \tag{2}$$

где

$$\lim_{T\to+\infty} \Delta(T) = 0,$$

причем функция $\Delta(T)$ выбирается с таким расчетом, чтобы в области (2) не было нетривиальных нулей $\zeta(s)$.

Отметим в заключении, что в случае четного k можно получить для $T_{k0}(x)$ асимптотическую формулу, остаточный член которой имеет степенное понижение по сравнению с главным.

Литература

1. Landau E. Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen / Leipzig: Teubuer, 1909.
2. Бредихин Б.М. Остаточный член в асимптотической формуле для функции $\nu_G(x)$ // Изв. ВУЗов. Математика. – 1968. – 6(19). – С.40-49.
3. Wirsing E. Das asymptotische Verhalten von Summen über multiplicative Functionen // Math. Ann. – 1961. – 143;1. – P.75-102.
4. Левин Б.В., Фанлейб А.С. Применение некоторых интегральных уравнений к вопросам теории чисел // УМН. – 1967. – 22;3. – С.119-198.

5. Постников А.Г. Введение в аналитическую теорию чисел / М.: Наука, 1971.
6. Чанга М.Е. О числах, все простые делители которых лежат в специальных промежутках // Изв. РАН. Сер. матем. – 2003. – 67;4. – С.213-224.
7. Mauduit C., Rivat J. Sur un problème de Gelfond: la somme des chiffres des nombres premiers // Annals of Mathematics. Second Series. – 2010. – 171;3. – P.1591-1646.
8. Green B. Three topics in additive prime number theory // ArXiv: 0710.0823.
9. Карацуба А.А. Равномерная оценка остаточного члена в проблеме делителей Дирихле // Изв. АН СССР, сер. матем. – 1972. – 36;3. – С.475-483.
10. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел / М.: Наука, 1983.

ON THE SUMMATION OF DIVISORS FUNCTION VALUES OVER NATURAL NUMBERS WITH PRIME DIVISORS OF THE SPECIAL TYPE

K.M. Eminyan

Financial University under the Government of the Russian Federation,
Leningradsky Av., 49, Moscow, 125993, Russia,
Bauman Moscow State Technical University,
2nd Baumanskay St., 5, Moscow, 105005, Russia, e-mail: eminyan@mail.ru

Abstract. Asymptotic formula for the sum of divisor function over natural numbers with prime divisors of a special type is found.

Key words: function of factors, base-two system, prime divisors.