MSC 45A05

О ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРАХ И УРАВНЕНИЯХ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ И ПЕРЕМЕННЫМИ ПРЕДЕЛАМИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

А.С. Калитвин, В.А. Калитвин

Липецкий государственный педагогический университет,
ул. Ленина, 42, Липецк, 398020, Россия, e-mail: kalitvinas@mail.ru,kalitvin@gmail.com

Аннотация. Выделены четыре класса линейных операторов и уравнений с частными интегралами и переменными пределами интегрирования. В пространстве непрерывных на квадрате функций изучаются спектр и части спектра операторов из этих классов и вопросы разрешимости интегральных уравнений с такими операторами.

Ключевые слова: операторы и уравнения с частными интегралами, операторы и уравнения Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами, спектр.

1. Введение. В работе рассматриваются операторы

$$(V_i x)(t,s) = \int_a^t l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int_a^s m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma + \int_a^u\int_a^v n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\sigma d\tau\,, \tag{1}$$

$$(\tilde{V}_i x)(t,s) = \int_a^s l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int_a^t m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma + \int_a^u\int_a^v n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\sigma d\tau\,, \tag{2}$$

$$(W_i x)(t,s) = \int_a^t l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int_a^t m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma + \int_a^u\int_a^v n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\sigma d\tau\,, \tag{3}$$

$$(\tilde{W}_i x)(t,s) = \int_a^s l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int_a^s m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma + \int_a^u\int_a^v n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\sigma d\tau \tag{4}$$

($i = 1,\ldots,4$) с частными интегралами, где $(t,s) \in D = [a,b]\times[a,b]$, $l : G = D\times[a,b] \to R$, $m : G \to R$, $n : D \times D \to R$ — заданные измеримые функции, интегралы понимаются в смысле Лебега, $(u,v) = (t,s)$ при $i = 1$, $(u,v) = (t,t)$ при $i = 2$, $(u,v) = (s,s)$ при $i = 3$, $(u,v) = (s,t)$ при $i = 4$, и интегральные уравнения

$$(\lambda x)(t,s) = (V_i x)(t,s) + f(t,s)\,, \tag{5}$$

$$(\lambda x)(t,s) = (\tilde{V}_i x)(t,s) + f(t,s)\,, \tag{6}$$

$$(\lambda x)(t,s) = (W_i x)(t,s) + f(t,s)\,, \tag{7}$$

$$(\lambda x)(t,s) = (\tilde{W}_i x)(t,s) + f(t,s) \tag{8}$$

Работа поддержана Минобрнауки России (проект № 1.4407.2011).

$(i = 1, \dots, 4)$, где заданная функция f непрерывна на D, а решения уравнений (5)–(8) рассматриваются в $C(D)$.

Условия разрешимости и свойства решений уравнений (5)–(8) с частными интегралами, содержащими переменные пределы интегрирования, зависят от свойств операторов (1)–(4) в этих пространствах и существенно отличаются друг от друга [1,2].

2. Операторы V_i и уравнения $\lambda x = V_i x + f$. Пусть A — линейный ограниченный оператор, действующий в комплексном банаховом пространстве. Через $r(A), \sigma(A)$, $\sigma_+(A)$, $\sigma_-(A)$, $\sigma_{ek}(A)$, $\sigma_{ew}(A)$, $\sigma_{es}(A)$, $\sigma_{eb}(A)$, $\sigma_\pi(A)$ и $\sigma_\delta(A)$ будем обозначать его спектральный радиус, спектр, существенные спектры в смысле Густавссона-Вайдмана, Като, Вольфа, Шехтера, Браудера, предельный и дефектный спектры соответственно (определения и свойства названных частей спектра приведены в [3,4]).

В [5,6] приведены критерии действия, следовательно, и непрерывности оператора Вольтерра

$$(V_1 x)(t,s) = \int_a^t l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau +$$
$$+ \int_a^s m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma + \int_a^t \int_a^s n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\sigma d\tau \tag{9}$$

и более общих классов линейных операторов с частными интегралами. В этих же работах получены и условия равенства нулю спектрального радиуса $r(V_1)$ оператора V_1, рассматриваемого в $C(D)$. В частности, $r(V_1) = 0$, если ядра $l(t,s,\tau)$, $m(t,s,\sigma)$ и $n(t,s,\tau,\sigma)$ принадлежат $C(L^1([a,b]))$ и $C(L^1(D))$ соответственно, т.е. непрерывны по $(t,s) \in D$ как функции со значениями в $L^1([a,b])$ и $L^1(D)$ соответственно.

Таким образом, при выполнении приведенных условий спектр, рассматриваемого в $C(D)$ оператора V_1, состоит из нуля: $\sigma(V_1) = \{0\}$. При этом нуль является не только единственной точкой спектра оператора V_1, но и точкой существенных спектров $\sigma_+(V_1)$, $\sigma_-(V_1)$, $\sigma_{ek}(V_1)$, $\sigma_{ew}(V_1)$, $\sigma_{es}(V_1)$, $\sigma_{eb}(V_1)$ в смысле Густавссона-Вайдмана, Като, Вольфа, Шехтера, Браудера соответственно, точкой предельного спектра $\sigma_\pi(A)$ и точкой дефектного спектра $\sigma_\delta(A)$.

В силу равенства $r(V_1) = 0$ справедлива

Теорема 1. *Если функции $l, m \in C(L^1([a,b])), n \in C(L^1(D))$, f — произвольная функция из D и $\lambda \neq 0$, то уравнение*

$$(\lambda x)(t,s) = (V_1 x)(t,s) + f(t,s) \tag{10}$$

имеет единственное решение в $C(D)$ и его можно найти по итерационной формуле

$$x_{n+1} = \frac{1}{\lambda} V_1 x_n + \frac{1}{\lambda} f, \qquad n = 0, 1, \dots, \tag{11}$$

где x_0 — произвольная функция из $C(D)$.

Непрерывные или слабо сингулярные ядра l, m и n принадлежат пространствам $C(L^1([a,b]))$ и $C(L^1(D))$ соответственно [3–6]. Поэтому для оператора V_1 с такими ядрами имеют место приведенные выше спектральные свойства, а утверждение теоремы справедливо для уравнения (10).

Через $C(L^p([a,b]))$ и $C(L^p(D))$ $(1 \le p \le \infty)$ обозначим множество непрерывных по $(t,s) \in D$ функций со значениями в $L^p([a,b])$ и $L^p(D)$ соответственно.

Из непрерывности вложений $C(L^p([a,b])) \subset C(L^1([a,b]))$ и $C(L^p(D)) \subset C(L^1(D))$ $(1 \le p \le \infty)$ следует, что для оператора V_1 с ядрами $l, m \in C(L^p([a,b]))$ и $n \in C(L^p(D))$ имеют место свойства спектра и частей спектра, приведенные выше, а для уравнения (10) утверждение теоремы 1.

В условии теоремы 1 оператор $\lambda I - V_1$, где I — единичный оператор, обратим в $C(D)$, а обратный оператор $(\lambda I - V_1)^{-1}$ допускает представление

$$((\lambda I - V_1)^{-1} f)(t,s) = f(t,s) + \int_a^t r_l(t,s,\tau;\lambda) f(\tau,s)d\tau + \\ + \int_a^s r_m(t,s,\sigma;\lambda) f(t,\sigma)d\sigma + \int_a^t \int_a^s r_n(t,s,\tau,\sigma;\lambda) f(\tau,\sigma)d\tau d\sigma\,, \tag{12}$$

где $f \in C(D)$, резольвентные ядра $r_l(t,s,\tau;\lambda)$, $r_m(t,s,\sigma;\lambda)$ и $r_n(t,s,\tau,\sigma;\lambda)$ оператора V_1 принадлежат $C(L^1([a,b]))$ и $C(L^1(D))$ соответственно при каждом $\lambda \ne 0$ и строятся по ядрам $\lambda^{-1} l(t,s,\tau)$, $\lambda^{-1} m(t,s,\sigma)$ и $\lambda^{-1} n(t,s,\tau,\sigma)$. При $\lambda = 1$ формулы для $r_l(t,s,\tau;\lambda) = r_l(t,s,\tau)$, $r_m(t,s,\sigma;\lambda) = r_m(t,s,\sigma)$ и $r_n(t,s,\tau,\sigma;\lambda) = r_n(t,s,\tau,\sigma)$ можно найти в [3-5].

Отметим, что построение непрерывных решений уравнения (10) с непрерывными ядрами изучалось в [7–9], в [10] (см. также [3–6]) рассматривались уравнения Вольтерра с частными интегралами, к частным случаям которых приводятся некоторые задачи теории тонких упругих оболочек и задача о деформации тонкой пластинки, а в [11] изучались линейные уравнения Вольтерра с частными интегралами некоторых задач математической биологии. Библиография работ по теории линейных операторов и уравнений Вольтерра с частными интегралами приведена в [5,6].

Из условия теоремы 1 вытекает равенство $r(V_1) = 0$. В общем случае спектральный радиус $r(V_1)$ может быть отличен от нуля.

Действительно, пусть в равенстве (9) $m(t,s,\sigma) \equiv 0$ и $n(t,s,\tau,\sigma) \equiv 0$, а ядро $l(t,s,\tau) \equiv l(t,\tau)$ выбрано так, что интегральный оператор Вольтерра

$$(Lx)(t) = \int_a^t l(t,\tau)x(\tau)d\tau \tag{13}$$

действует в $C([a,b])$ и имеет ненулевой спектральный радиус $r(L)$ (хорошо известно [12], что такие операторы существуют). Тогда в $C(D)$ действует оператор

$$(V_1 x)(t,s) = \int_a^t l(t,\tau)x(\tau,s)d\tau$$

и его спектральный радиус $r(V_1) = r(L) \ne 0$ [3,4].

Более общие условия обращения в нуль $r(V_1)$ содержит следующая теорема [5,6].

Теорема 2. *Пусть операторы*

$$(L_1 x)(t,s) = \int_a^t l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau, (M_1 x)(t,s) = \int_a^s m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma\,,$$

$$(N_1x)(t,s) = \int_a^t \int_a^s n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma$$

действуют в $C(D)$,

$$\int_{T_1} |l(t,s,\tau)|d\tau \to 0, \int_{S_1} |m(t,s,\sigma)|d\sigma \to 0, \int_{T_1}\int_{S_1} |n(t,s,\tau,\sigma)|d\tau d\sigma \to 0 \qquad (14)$$

равномерно по (t,s) при $mesT_1 \to 0, mesS_1 \to 0$, где отрезки T_1 и S_1 содержатся в $[a,b]$. Тогда $r(V_1) = r(L_1) = r(M_1) = r(N_1) = 0$. Если, дополнительно, f — произвольная функция из $C(D)$, то при любом $\lambda \neq 0$ уравнение (10) имеет единственное решение и его можно найти по итерационной формуле (11).

Условие теоремы 2 выполняется для оператора V_1 с ядрами $l, m \in C(L^1([a,b]))$ и $n \in C(L^1(D))$, так как оператор V_1 с такимим ядрами действует в $C(D)$ и для таких ядер выполняется условие (14). Поэтому из условия теоремы 1 вытекает условие теоремы 2. Обратное утверждение неверно. Это показывает пример оператора $V_1 = L_1$, у которого ограничено ядро $l(t,s,\tau) = l(t,\tau)$, а оператор (13) с таким ядром действует в $C(D)$ и не является компактным, так как при выполнении включения $l \in C(L^1([a,b]))$ оператор (13) является компактным в $C([a,b])$ [12].

Другие условия, при которых спектральный радиус действующего в $C(D)$ оператора V_1 равен нулю, можно найти в [6].

Оператор V_1 хорошо изучен в $C(D)$. В [13] приведен пример линейного оператора V_1 с частными интегралами и непрерывными ядрами, который имеет равный нулю спектральный радиус $r(V_1)$ в $C(D)$ и в $L^p(D)$ $(1 \leq p \leq \infty)$, и построены банаховы идеальные пространства, в которых $r(V_1) > 0$. Поэтому для рассматриваемого в построенных пространствах оператора V_1 его спектр $\sigma(V_1) \neq \{0\}$.

Операторы V_2 и V_3 обладают свойствами, аналогичными приведенным выше свойствам для оператора V_1. В частности, если $l, m \in C(L^1([a,b]))$ и $n \in C(L^1(D))$, то

$$\sigma(V_2) = \sigma_a(V_2) = \{0\}, \sigma(V_3) = \sigma_a(V_3) = \{0\}, \qquad (15)$$

где $a \in \{+, -, ek, ew, es, eb, \pi, \delta\}$, а равенство (12) и теорема 1 остаются справедливыми, если в них заменить V_1 на V_2 или на V_3. Теорема 2 также останется справедливой, если в ее формулировке оператор V_1 заменить оператором V_2 или V_3, а предположение о действии в $C(D)$ оператора V_1 заменить предположением о действии в $C(D)$ оператора

$$(N_2x)(t,s) = \int_a^t \int_a^t n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma$$

или оператора

$$(N_3x)(t,s) = \int_a^s \int_a^s n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma$$

соответственно.

Свойства оператора V_4 с ядрами $l, m \in C(L^1([a,b]))$ и $n \in C(L^1(D))$ существенно отличаются от свойств операторов V_1, V_2, V_3 с такими же ядрами. В частности, спектральный радиус этого оператора может быть отличен от нуля даже в случае непрерывных ядер, хотя в этом случае $r(V_1) = r(V_2) = r(V_3) = \{0\}$.

Пример 1. Пусть $l(t,s,\tau) \equiv 0$, $m(t,s,\sigma) \equiv 0$ и $n(t,s,\tau.\sigma) \equiv 1$. Тогда

$$(V_4 x)(t,s) = \int_a^s \int_a^t x(\tau,\sigma) d\tau d\sigma = \int_a^s \left(\int_a^t x(\tau,\sigma) d\sigma \right) d\tau \,.$$

С применением формулы для вычисления нормы линейных операторов с частными интегралами [3–6] устанавливается равенство $\|V_4\| = (b-a)^2$. Непосредственно проверяется (см. также [5]), что $\lambda = (s_0 - a)(t_0 - a)$, где $s_0, t_0 \in [a,b]$, является точкой предельного спектра оператора V_4. Тогда $(b-a)^2 \leq r(V_4) \leq \|V_4\| \leq (b-a)^2$. Поэтому $r(V_4) = (b-a)^2 > 0$.

Оператор V_4 получается возмущением оператора V_1 с частными интегралами компактным оператором

$$\int_a^s \int_a^t n(t,s,\tau,\sigma) x(\tau,\sigma) d\tau d\sigma - \int_a^t \int_a^s n(t,s,\tau,\sigma) x(\tau,\sigma) d\tau d\sigma \,.$$

Учитывая, что при компактных возмущениях области n-нормальности, d-нормальности, нетеровости и фредгольмовости не изменяются [14,15], существенные спектры Густавссона-Вайдмана, Вольфа и Шехтера являются, соответственно, дополнениями этих областей и $\sigma_{ek}(V_4) = \sigma_+(V_4) \ \cap \sigma_-(V_4)$, получим равенство

$$\sigma_a(V_4) = \{0\}, a \in \{+,-,ek,ew,es\} \,. \tag{16}$$

Формула (16) отличается от формулы (15). Из (16) следует, что для уравнения $\lambda x = V_4 x + f$, где $f \in C(D)$, альтернатива Фредгольма справедлива точно тогда, когда $\lambda \neq 0$, а теоремы 1 и 2 вообще говоря не имеют места.

Если оператор $\lambda I - V_4$ имеет обратный оператор $(\lambda I - V_4)^{-1}$, то оператор $(\lambda I - V_4)^{-1}$ допускает представление (12), в котором V_1 заменяется на V_4.

3. Операторы $\tilde{V}_i$ и уравнения $\lambda x = \tilde{V}_i x + f$. Изучаемые в этом разделе операторы и уравнения с частными интегралами и переменными пределами интегрирования принципиально отличаются от операторов и уравнений, рассмотренных в разделе 2.

Из действия операторов $\tilde{V}_i$ $(i = 1,\ldots,4)$ в $C(D)$ вытекает их непрерывность [3-6]. Со спектральными свойствами этих операторов ситуация значительно сложнее, чем с рассмотренными в предыдущем разделе операторами.

Будем предполагать, что $l, m \in C(L^1([a,b]))$, а $n \in C(L^1(D))$. В силу [5, 16] фредгольмовость операторов $\lambda I - \tilde{V}_i$ (фредгольмовость уравнений $\lambda x = \tilde{V}_i + f$), $i = 1,\ldots,4$, равносильна обратимости в $C([a,b])$ операторов $\lambda I - L(s)$ и $\lambda I - M(t)$ при каждом $t, s \in [a,b]$, где

$$(L(s)x)(t) = \int_a^s l(t,s,\tau) x(\tau) d\tau, (M(t)x)(s) = \int_a^t m(t,s,\sigma) x(\sigma) d\sigma \,.$$

В силу теоремы 3.4 из [3] $\sigma_{ew}(\tilde{V}_i) = \sigma_{es}(\tilde{V}_i)$. Тогда для действующего в $C(D)$ оператора $\tilde{V}_i$ справедливо равенство

$$\sigma_{ew}(\tilde{V}_i) = \sigma_{es}(\tilde{V}_i) = \bigcup_{s\in[a,b]} \sigma(L(s)) \bigcup \bigcup_{t\in[a,b]} \sigma(M(t)), i = 1,\ldots,4 \,. \tag{17}$$

В силу равенства (17) справедлива

Теорема 3. *Пусть функции $l, m \in C(L^1([a,b]))$, функция $n \in C(L^1(D))$, f — произвольная функция из $C(D)$ и $\lambda \neq 0$. Тогда в $C(D)$ нетеровость и фредгольмовость операторов $\lambda I - \tilde{V}_i$ и альтернатива Фредгольма для уравнений $\lambda I = \tilde{V}_i + f$, $i = 1, \dots, 4$, имеют место точно тогда, когда λ не принадлежит множеству (17).*

Следующий пример показывает, что даже в случае простейших ядер существенные спектры $\sigma_{ew}(\tilde{V}_i)$ и $\sigma_{es}(\tilde{V}_i)$ отличны от нуля.

Пример 2. Пусть в (2) $l(t,s,\tau) \equiv 1, m(t,s,\sigma) \equiv 0$ и $n(t,s,\tau,\sigma) \equiv 0$. Тогда

$$(\tilde{V}_i x)(t,s) = \int_a^s x(\tau, s) d\tau \,.$$

Аналогично примеру 1, $\|\tilde{V}_i\| = b - a$, а число $\lambda = s_0 - a$, где $s_0 \in [a,b]$, — точка предельного спектра оператора $\tilde{V}_i$. Тогда $b - a \leq r(\tilde{V}_i) \leq \|\tilde{V}_i\| = b - a$, следовательно, $r(\tilde{V}_i) = b - a > 0$. В силу (17) $\sigma_{ew}(\tilde{V}_i) = \sigma_{es}(\tilde{V}_i) \neq \{0\}$.

Теорема 3 и пример 2 показывают, что операторы $\tilde{V}_i$ $(i = 1, \dots, 4)$ с частными интегралами и переменными пределами интегрирования не являются операторами Вольтерра с частными интегралами. Поэтому для изучения в $C(D)$ операторов $\tilde{V}_i$ и уравнений $\lambda x = \tilde{V}_i x + f$ $(i = 1, \dots, 4)$ следует применять общую теорию линейных операторов и уравнений с частными интегралами в $C(D)$, но не теорию линейных операторов и уравнений Вольтерра с частными интегралами.

4. Операторы $W_i, \tilde{W}_i$ и уравнения $\lambda x = W_i x + f$, $\lambda x = \tilde{W}_i x + f$. Операторы W_i и $\tilde{W}_i$ $(i = 1, \dots, 4)$ при ненулевых ядрах $m(t,s,\sigma)$ и $l(t,s,\tau)$, соответственно, не являются операторами Вольтерра с частными интегралами, но являются операторами Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами. Поэтому для изучения операторов $W_i, \tilde{W}_i$ и уравнений $\lambda x = W_i x + f$, $\lambda x = \tilde{W}_i x + f$ $(i = 1, \dots, 4)$ можно использовать результаты из [5,6] об операторах и уравнениях Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами.

В частности, если $l, m \in C(L^1([a,b]))$ и $n \in C(L^1(D))$, то в $C(D)$ обратимость и фредгольмовость уравнений $\lambda x = W_i x + f$ и $\lambda x = \tilde{W}_i x + f$ $(i = 1, \dots, 4)$ равносильна обратимости операторов $\lambda I - M$ и $\lambda I - L$ соответственно, где операторы M и L определяются равенствами

$$(Mx)(t,s) = \int_a^t m(t,s,\sigma) x(t,\sigma) d\sigma, (Lx)(t,s) = \int_a^s l(t,s,\tau) x(\tau,s) d\tau \,.$$

Обратимость в $C(D)$ операторов $\lambda I - M$ и $\lambda I - L$, в свою очередь, равносильна обратимости при каждом $t \in [a,b]$ и при каждом $s \in [a,b]$ операторов $M(t)$ и $L(s)$ соответственно из раздела 3. Отсюда вытекают равенства

$$\sigma(W_i) = \sigma_{ew}(W_i) = \sigma_{es}(W_i) = \bigcup_{t \in [a,b]} \sigma(M(t)) \,, \tag{18}$$

$$\sigma(\tilde{W}_i) = \sigma_{ew}(\tilde{W}_i) = \sigma_{es}(\tilde{W}_i) = \bigcup_{s\in[a,b]} \sigma(L(s)) \tag{19}$$

$(i = 1, \ldots, 4)$.

Аналогично теореме 3 имеет место

Теорема 4. *Если функции $l, m \in C(L^1([a,b]))$ и функция $n \in C(L^1(D))$, то в $C(D)$ нетеровость и фредгольмовость операторов $\lambda I - W_i$ $(\lambda I - \tilde{W}_i)$ и альтернатива Фредгольма для уравнений $\lambda I = W_i + f$ $(\lambda I = \tilde{W}_i + f)$, $i = 1, \ldots, 4$, имеют место точно тогда, когда λ не принадлежит множеству (18) ((19) соответственно).*

Литература

1. Калитвин А.С. Об интегральных уравнениях с частными интегралами, содержащими переменные пределы интегрирования // Материалы международной конференции „Дифференциальные уравнения и их приложения" 26-31 мая 2013, Белгород / Белгород: Политерра, 2013. – С. 103–104.
2. Калитвин А.С. О спектре операторов с частными интегралами и переменными пределами интегрирования // Актуальные проблемы естественных наук и их преподавания: сб. науч. тр. / Липецк: ЛГПУ, 2013. – С. 58–62.
3. Калитвин А.С. Линейные операторы с частными интегралами / Воронеж: ЦЧКИ, 2000. – С. 252
4. Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations / New York-Basel: Marcel Dekker inc., 2000. – 560 p.p.
5. Калитвин А.С., Калитвин В.А. Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами / Липецк: ЛГПУ, 2006. — 177 с.
6. Калитвин А.С., Фролова Е.В. Линейные операторы с частными интегралами. C-теория / Липецк: ЛГПУ, 2004. – 195 с.
7. Гурса Э. Курс математического анализа. Т.3. Ч.2 / ОНТИ, 1934. — 320 с.
8. Мюнтц Г. Интегральные уравнения. Т. 1 / ГТТИ, 1934. — 330 с.
9. Околелов О.П. Исследование уравнений с частными интегральными операторами: Дисс. ...канд. физ.-матем. наук / Иркутск, 1967. – 147 с.
10. Векуа И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений / М.-Л.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1948. – 296 с.
11. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии: Учеб. пособие для университетов / М.: Высш. шк., 1995. – 301 с.
12. Красносельский М.А. и др. Интегральные уравнения / М.: Наука, 1968. – 448 с.
13. Калитвин А.С. Об операторах и уравнениях Вольтерра с частными интегралами // Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна-2012: материалы международной конференции / Воронеж: ВГУ, 2012. – С.91–94.
14. Като Т. Теория возмущений линейных операторов / М.: Мир, 1972. – 740 с.
15. Крейн С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве / М.: Наука, 1971. – 104 с.
16. Kalitvin A.S. On a Class of Integral Equations in the Space of Continuous Functions // Differential Equations. – 2006. – 42; 6. – P.1194–2000.

ABOUT LINEAR OPERATORS AND EQUATIONS WITH PARTIAL INTEGRALS AND WITH VARIABLE BOUNDS OF INTEGRATION

A.S. Kalitvin, V.A. Kalitvin

Lipetsk State Pedagogical University,
Lenina St., 42, Lipetsk, 398020, Russia, e-mail: kalitvinas@mail.ru, kalitvin@gmail.com

Abstract. Four classes of linear operators and equations with partial integrals are selected. It is studied the spectrum and spectrum parts of operators having been defined on the space of continuous functions on a square. The solvability of integral equations with operators pointed out is invetigated.

Key words: operators and equations with partial integrals, Volterra's and Volterra-Fredholm's operators and equations with partial integrals, spectrum.