MSC 30D60, 35J55

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ ЛАМЕ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

С.П. Митин, А.П. Солдатов

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, 308007, г. Белгород, e-mail: soldatov48@gmail.com

Аннотация. На основе подхода, использующего функции аналитические по Дуглису исследуется задача Дирихле плоской теории упругости для системы уравнений Ламе с кусочно-постоянными коэффициентами.

Ключевые слова: система Ламе, задача Дирихле, функции аналитические по Дуглису.

Рассмотрим в области D на плоскости систему Ламе [1,2]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a_{11}\frac{\partial u}{\partial x}+a_{12}\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(a_{21}\frac{\partial u}{\partial x}+a_{22}\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0 \qquad (1)$$

с кусочно постоянными матричными коэффициентами

$$a_{11}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_6\\ \alpha_6 & \alpha_3\end{pmatrix}, \qquad a_{12}=\begin{pmatrix}\alpha_6 & \alpha_4\\ \alpha_3 & \alpha_5\end{pmatrix},$$

$$a_{21}=\begin{pmatrix}\alpha_6 & \alpha_3\\ \alpha_4 & \alpha_5\end{pmatrix}, \qquad a_{22}=\begin{pmatrix}\alpha_3 & \alpha_5\\ \alpha_5 & \alpha_2\end{pmatrix},$$

которые сохраняют постоянное значение в некоторой подобласти $D_0 \subseteq D$ и в ее дополнении $D_1 = D \setminus D_0$. Предполагается, что D и D_0 ограничены сомкнутыми ляпуновскими дугами, соответственно Γ и Γ_0 с общими концами в одной точке τ (можно считать $\tau = 0$), причем в этой точке они некасательны друг к другу.

Элементы α_j матричных коэффициентов, называемые модулями упругости, подчиняются требованию положительной определенности матрицы

$$\alpha=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_4 & \alpha_6\\ \alpha_4 & \alpha_2 & \alpha_5\\ \alpha_6 & \alpha_5 & \alpha_3\end{pmatrix}.$$

Вектор $u = (u_1, u_2)$ характеризует смещение. Он связан со столбцами $\sigma_{(1)} = (\sigma_1, \sigma_3)$, $\sigma_{(2)} = (\sigma_3, \sigma_2)$ тензора напряжений

$$\sigma=\begin{pmatrix}\sigma_1 & \sigma_3\\ \sigma_3 & \sigma_2\end{pmatrix}$$

Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 - 2013 годы (госконтракты № 14.A18.21.0357, № 14.B37.21.0369).

соотношениями

$$\sigma_{(i)} = a_{i1}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{i2}\frac{\partial u}{\partial y}\,, \quad i = 1, 2\,,$$

которые составляют содержание закона Гука.

При отсутствии массовых сил матрица σ удовлетворяет уравнениям равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{(2)}}{\partial y} = 0\,,$$

которые совместно с соотношением Гука и приводят к системе Ламе.

Требуется найти вектор смещения $u = (u_1, u_2) \in C(\overline{D})$, являющийся решением системы (1) в $D_0 \cup D_1$, удовлетворяющий краевому условию Дирихле

$$u\big|_{\Gamma} = f \tag{2}$$

и подчиненный контактному условию

$$(\sigma^+ - \sigma^-)n\big|_{\Gamma_0} = 0\,, \tag{3}$$

где знаки $+$ и $-$ соответствуют его предельным значениям кусочно постоянной матрицы σ на Γ_0 изнутри и снаружи D_0 и n означает единичную нормаль на Γ_0 (внешнюю по отношению к D_0).

Задачи подобного типа возникают в механике композитных материалов [3]. Более типична и хорошо изучена (см., например, [4]- [6]) ситуация, когда Γ_0 является гладкой разомкнутой дугой с концами на ∂D, разбивающая D на две «равноправные» подобласти.

Как и в [6, 7] воспользуемся теоретико-функциональным подходом [8, 9], основанным на представлении общего решения системы Ламе через функции, аналитические по Дуглису. С этой целью рассмотрим характеристическое многочлен эллиптической системы (1):

$$\chi(z) = \det p(z); \quad p(z) = a_{11} + (a_{12} + a_{21})z + a_{22}z^2 = \begin{pmatrix} g_1(z) & g_3(z) \\ g_3(z) & g_2(z) \end{pmatrix}.$$

Возможны два случая, когда в верхней полуплоскости уравнение $\chi(z) = 0$ имеет (i) два различных корня $\nu_1 \neq \nu_2$ и (ii) один кратный корень ν. Соответственно этим случаям положим

$$\text{(i)}\ J = \begin{pmatrix} \nu_1 & 0 \\ 0 & \nu_2 \end{pmatrix},\ \nu_1 \neq \nu_2; \quad \text{(ii)}\ J = \begin{pmatrix} \nu & i \\ 0 & \nu \end{pmatrix}.$$

В каждом из этих случаев найдутся такие линейно независимые векторы $x, y \in \mathbb{C}^2$, что (i) $p(\nu_1)x = p(\nu_2)y = 0$ и, соответственно, (ii) $p(\nu)x = p(\nu)y + p'(\nu)x = 0$. Составим из этих векторов как из столбцов матрицу $b \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ и в обозначениях (1), (7) положим $c = -(a_{21}b + a_{22}bJ)$. В таких обозначениях [8,9] общее решение u системы Ламе и нормальная компонента тензора напряжений в терминах этих матриц описывается равенствами

$$u = \mathrm{Re} b\phi, \quad \sigma n = \mathrm{Re} c\phi'_s\,, \tag{4}$$

где 2−вектор- функция $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ является решением системы Дуглиса

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - J\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

(кратко — J-аналитической функцией) и ϕ'_s означает производную по ортогональному к n направлению. Это представление рассматривается в каждой из подобластей D_0, D_1, причем с точностью до постоянного вектора функция ϕ в каждой из этих подобластей определяется однозначно. В дальнейшем для простоты предполагаем, что матрица J одна и та же для обеих областей D_0 и D_1.

В явном виде матрицы b и c могут быть описаны [10] через корни характеристического многочлена χ. С этой целью представим χ в форме

$$\chi(z) = g_1(z)g_2(z) - g_3^2(z) = h_1(z) - zh_2(z) + z^2h_3(z) \qquad (5)$$

с квадратными трехчленами

$$\begin{aligned} g_1(z) &= \alpha_1 + 2\alpha_6 z + \alpha_3 z^2\,, & h_1(z) &= \beta_2 - \beta_5 z + \beta_4 z^2\,, \\ g_2(z) &= \alpha_3 + 2\alpha_5 z + \alpha_2 z^2\,, & h_2(z) &= \beta_5 - \beta_3 z + \beta_6 z^2\,, \\ g_3(z) &= \alpha_6 + (\alpha_3 + \alpha_4)z + \alpha_5 z^2\,, & h_3(z) &= \beta_4 - \beta_6 z + \beta_1 z^2\,. \end{aligned}$$

Здесь

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_4 & \beta_6 \\ \beta_4 & \beta_2 & \beta_5 \\ \beta_6 & \beta_5 & \beta_3 \end{pmatrix} = (\det\alpha)\alpha^{-1}$$

означает присоединенную матрицу к матрице α, фигурирующей в законе Гука. Эта матрица также положительно определена и определяется элементами

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \alpha_2\alpha_3 - \alpha_5^2\,, & \beta_2 &= \alpha_1\alpha_3 - \alpha_6^2\,, & \beta_3 &= \alpha_1\alpha_2 - \alpha_4^2\,, \\ \beta_4 &= \alpha_5\alpha_6 - \alpha_3\alpha_4\,, & \beta_5 &= \alpha_4\alpha_6 - \alpha_1\alpha_5\,, & \beta_6 &= \alpha_4\alpha_5 - \alpha_2\alpha_6\,. \end{aligned}$$

Очевидно, в случае (i) квадратный трехчлен h_3 с вещественными коэффициентами не может обращаться в нуль в обеих точках ν_1, ν_2, поэтому без ограничения общности можно считать $h_3(\nu_2) \neq 0$. Кроме того, совместное равенство $h_2(\nu_1) = h_3(\nu_1) = 0$ невозможно. В самом деле, тогда в силу (5) и $h_1(\nu_1) = 0$. Следовательно, с учетом приведенных выражений для многочленов h_j заключаем, что вектор $\xi = (1, -\nu_1, \nu_1^2)$ является решением системы $\tilde{\beta}\xi = 0$, где матрица $\tilde{\beta}$ получена из β перестановкой первой и третьей строк и столбцов, что невозможно.

В этих обозначениях соответственно двум случаям (i), (ii) матрицы J имеем равенства

$$b = \begin{pmatrix} g_2(\nu_1) & g_2(\nu_2) \\ -g_3(\nu_1) & -g_3(\nu_2) \end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix} -\nu_1 h_3(\nu_1) & -\nu_2 h_3(\nu_2) \\ h_3(\nu_1) & h_3(\nu_2) \end{pmatrix},\ h_3(\nu_1) \neq 0\,, \qquad (i_1)$$

$$b = \begin{pmatrix} -g_3(\nu_1) & g_2(\nu_2) \\ g_1(\nu_1) & -g_3(\nu_2) \end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix} -\nu_1 h_2(\nu_1) & -\nu_2 h_3(\nu_2) \\ h_2(\nu_1) & h_3(\nu_2) \end{pmatrix},\ h_2(\nu_1) \neq 0, \qquad (i_2)$$

$$b = \begin{pmatrix} g_2(\nu) & g_2'(\nu) \\ -g_3(\nu) & -g_3'(\nu) \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -\nu h_3(\nu) & -h_3(\nu) - \nu h_3'(\nu) \\ h_3(\nu) & h_3'(\nu) \end{pmatrix}, \qquad (ii)$$

где, напомним, в случае (i) предполагается, что $h_3(\nu_2) \neq 0$. Во всех случаях матрицы b и c обратимы.

Как известно, для изотропной среды модули упругости связаны соотношениями

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 2\alpha_3 + \alpha_4, \ \alpha_5 = \alpha_6 = 0\,.$$

Для этой среды имеем матрицу J, отвечающей случаю (ii) с $\nu = i$. Соответственно в качестве матриц b и c можем взять

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & -æ \end{pmatrix}, \quad c = \alpha_3 \begin{pmatrix} -2i & æ - 1 \\ 2 & i(æ + 1) \end{pmatrix} \qquad (6)$$

с положительной постоянной $æ = (\alpha_1 + \alpha_3)/(\alpha_1 - \alpha_3)$.

Отметим, что близкий подход к представлению решений анизотропной плоской теории упругости рассматривался в [11].

Подставляя (4) в соотношения (2), (3), в результате приходим к эквивалентной задаче отыскания J-аналитической в открытом множестве $D_0 \cup D_1 = D \setminus \Gamma_0$ функции ϕ, удовлетворяющей краевым условиям

$$\mathrm{Re} b\phi\big|_{\Gamma} = f, \ \mathrm{Re}[(b\phi)^+ - (b\phi)^-]\big|_{\Gamma_0} = 0, \ \mathrm{Re}[(c\phi)^+ - (c\phi)^-]\big|_{\Gamma_0} = \xi \in \mathbb{R}^2\,, \qquad (7)$$

где постоянный вектор ξ подлежит определению вместе с ϕ. Эти краевые условия можно переписать в единой параметрической форме. С этой целью рассмотрим параметрическое уравнение $x = \gamma_1(t), \ 0 \leq t \leq 1$, дуги $\Gamma = \Gamma_1$, выбранное так, чтобы определяемая им ориентация Γ оставляла область D слева. Предполагается кроме того, что производная γ_1' непрерывна по Гельдеру и по модулю равна 1 на концах $t = 0$ и $t = 1$. Пусть $x = \gamma_0(t)$ имеет аналогичный по отношению к Γ_0.

Для описания граничных значений на дуге Γ_0 удобно эту дугу и ее параметризацию «удвоить», полагая $\Gamma_2 = \Gamma_3 = \Gamma_0$ и $\gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_0$. Тогда тройку функций $\phi \circ \gamma_1$ и $\phi^{\pm} \circ \gamma_0$ на отрезке $[0, 1]$ можем записать в виде трех-компонентного вектора

$$\phi \circ \gamma = (\phi \circ \gamma_1, \phi \circ \gamma_2, \phi \circ \gamma_3); \quad \phi \circ \gamma_2 = \phi^- \circ \gamma_0\,, \ \phi \circ \gamma_3 = \phi^+ \circ \gamma_0\,. \qquad (8)$$

В соответствии с этим краевые условия (7) можем представить в единой матричной форме

$$\mathrm{Re} A(\phi \circ \gamma) = f\,, \quad A = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & -b_0 \\ 0 & c_1 & -c_0 \end{pmatrix}, \qquad (9)$$

где b_k и c_k представляют собой значения b и c в области D_k и вектор с компонентами $f_1 = f \circ \gamma_1, \ f_2 = f_3 = 0$ обозначен снова f.

Эта задача является частным случаем общей задачи Римана, изученной в [12, 13]. Переформулируем применительно к ней соответствующие результаты.

Согласно (8) параметризации γ_j определяют сигнатуру ориентации $e_1 = e_3 = 1,\ e_2 = -1$. Обозначим A^e блочную 3×3-матрицу, полученную из A заменой второго столбца на комплексно сопряженный. В предположении $\det A^e \neq 0$ задача (9) принадлежит к нормальному типу. В частности, эта задача фредгольмова в классе функции ϕ, удовлетворяющих условию Гельдера в каждой из замкнутых областей $D_k,\ k = 0, 1$. Другими словами, однородная задача имеет в этом классе конечное число n линейно независимых решений, а неоднородная задача разрешима тогда и только тогда, когда ее правая часть f «ортогональна» конечному числу n' линейно независимых функционалов.

Формула для вычисления индекса $n - n'$ опирается на так называемый концевой символ задачи — аналитическую на всей комплексной плоскости матрицу-функцию $X(\zeta)$. В малой окрестности нуля открытое множество $D_0 \cup D_1$ разбивается на три криволинейный сектора $S_j,\ 1 \leq j \leq 3$, нумерация которых берется в порядке обхода их общей вершины $\tau = 0$ против часовой стрелки. По условию раствор θ_j каждого сектора S_j положителен. Пусть $\Gamma_j^{\pm}$ означают боковые стороны сектора S_j, причем их нумерация такова, что поворот против часовой стрелки внутри сектора осуществляется от Γ_j^- к Γ_j^+. Обозначим $q_j^{\pm}$ единичный касательный вектор к боковой стороне $\Gamma_j^{\pm}$ в вершине $\tau = 0$. Эти обозначения иллюстрируются рис.1, где в соответствии с (8) дуги Γ_j изображены со стороны отвечающих им граничных значений.

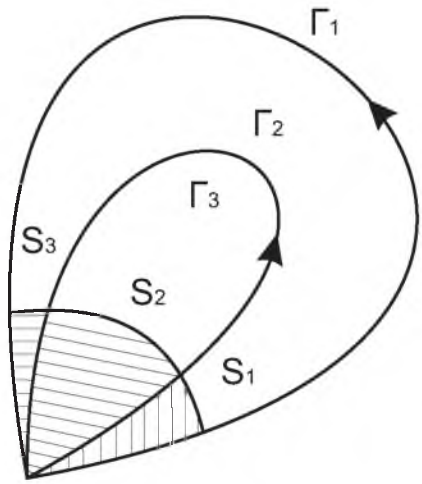

Рис. 1:

Введем линейное отображение $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}^{2\times 2}$ по формуле $[x] = x_1 \cdot 1 + x_2 J$, где J фигурирует в (4), а 1 означает единичную матрицу. Тогда с каждым сектором S_j можем связать матрицу $Q_j = [q_j^+][q_j^-]^{-1}$ и ее комплексную степень $Q_j^{\zeta},\ \zeta \in \mathbb{C}$, как значение функции u^{ζ} от Q_j. Например, в случае матрицы

$$J = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$

отвечающей изотропной среде, имеем выражение

$$Q_j^\zeta = e^{i\vartheta_j\zeta}(1+\zeta\Delta_j), \quad \Delta_j = e^{-i\vartheta_j}\sin\theta_j \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

где положено $\vartheta_j = \arg q_j^+ + \arg q_j^-$ и, напомним, $\theta_j = \arg q_j^+ - \arg q_j^-$.

Семейство из шести векторов $q_j^\pm$ занумеруем следующим единым образом:

$$q_1^- = q_1, \; q_1^+ = q_2; \quad q_2^- = q_3, \; q_2^+ = q_6; \quad q_3^- = q_5, \; q_3^+ = q_4 . \tag{11}$$

Выбор этой нумерации мотивируется тем, что с учетом (8) имеем равенство $q_j = \gamma_j'(0), \; q_{3+j} = -\gamma_j'(1), \quad j = 1,2,3$ (см. также рис. 1).

Теперь все подготовлено к построению матрицы $X(\zeta)$. Исходя из обратимой блочной 3×3- матрицы A^e, рассмотрим блочно-диагональную 6×6-матрицу $B = \mathrm{diag}(A^e, \overline{A^e})$. Обозначая $B_s, \; 1 \le s \le 6$, столбцы этой матрицы, в соответствии с (11) положим

$$X_1(z) = B_1 + \overline{B}_2 Q_1^\zeta, \; X_2(z) = B_3 + \overline{B}_6 Q_2^\zeta, \; X_3(z) = B_5 + \overline{B}_4 Q_3^\zeta .$$

Из векторов $X_j(\zeta)$ и $\overline{X}_j(\zeta) = \overline{X_j(\overline{\zeta})}$ как из столбцов составим 6×6-матрицу X, располагая их в порядке $X_1, X_2, X_3, \overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{X}_3$. В явном виде

$$X = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & \overline{b}_1 & 0 & 0 \\ b_1 Q_1^\zeta & -b_0 & 0 & \overline{b}_1\overline{Q}_1^\zeta & -\overline{b}_0 & 0 \\ c_1 Q_1^\zeta & -c_0 & 0 & \overline{c}_1\overline{Q}_1^\zeta & -\overline{c}_0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 Q_3^\zeta & 0 & 0 & \overline{b}_1\overline{Q}_3^\zeta \\ 0 & -b_0 Q_2^\zeta & b_1 & 0 & -\overline{b}_0\overline{Q}_2^\zeta & \overline{b}_1 \\ 0 & -c_0 Q_2^\zeta & c_1 & 0 & -\overline{c}_0\overline{Q}_2^\zeta & \overline{c}_1 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Пусть матрица $Y(\zeta)$ строится аналогичным образом по $B = 1$.

В каждой полосе $\alpha \le \mathrm{Re}\zeta \le \beta$ определители матриц-функций $X(\zeta)$ и $Y(\zeta)$ имеют конечное число нулей и их отношение имеет ненулевой предел при $\mathrm{Im}\zeta \to \infty$. В соответствии с этим можем ввести на вещественной оси кусочно постоянную целочисленную функцию

$$\chi(\nu) = \frac{1}{2\pi}\arg\left[\frac{\det X(\zeta)}{\det Y(\zeta)}\right]\Bigg|_{\zeta=\nu-i\infty}^{\nu+i\infty}. \tag{13}$$

Заметим, что по теореме Руше разность $\chi(\beta) - \chi(\alpha)$ равна $m - n$, где m и n есть число нулей функции, соответственно, $\det X(\zeta)$ и $\det Y(\zeta)$ в полосе $\alpha < \mathrm{Re}\zeta < \beta$.

В принятых обозначениях формула индекса задачи (8) в классе функций ϕ, непрерывных по Гельдеру в $\overline{D}_k, \; k = 0,1$, имеет следующий вид [13]:

$$n - n' = 6 - \chi(-0) - s(0), \tag{14}$$

где $s(0)$ — число нулей функции $\det X(\zeta)$ на прямой $\mathrm{Re}\zeta = 0$ и $\chi(-0)$ означает левосторонний предел функции $\chi(\nu)$ в точке $\nu = 0$.

Определитель матрицы $\det Y$ подсчитывается элементарно. С помощью (10) легко убедиться, что с точностью до ненулевого постоянного множителя он совпадает с произведением $\sin^2\theta_j\zeta,\ j=1,2,3$. В частности, с с учетом теоремы Руше формулу (14) можем переписать также в форме $n-n'=-\chi(+0)$.

Вычисление определителя матрицы $X(\zeta)$ (фактически над полем скаляров ее порядок равен 12) встречает определенные технические трудности. С помощью простых преобразований этот порядок можно понизить вдвое. В самом деле, умножая второй и пятый столбцы матрицы X на -1 и переставляя ее третью и шестую строки, получим матрицу $\tilde X$ блочного вида

$$\tilde X=\begin{pmatrix} x & \overline{x}\\ y & \overline{y}\end{pmatrix} \tag{15}$$

с элементами

$$x=\begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0\\ b_1Q_1^\zeta & b_0 & 0\\ 0 & c_0Q_2^\zeta & c_1\end{pmatrix},\quad y=\begin{pmatrix} 0 & 0 & b_1Q_3^\zeta\\ 0 & b_0Q_2^\zeta & b_1\\ c_1Q_1^\zeta & c_0 & 0\end{pmatrix}.$$

Матрица x треугольна и легко обращается. Поскольку матрица, полученная из y перестановкой первого и третьего столбцов, имеет ту же структуру, что и x, то это верно и по отношению к y.

В свою очередь из (15) следует, что

$$\det X(\zeta)=C\det(\overline{y}-yx^{-1}\overline{x}),\quad C=\mathrm{const}\neq 0. \tag{16}$$

В явном виде $x^{-1}\overline{x}$ представляет собой матрицу

$$\begin{pmatrix} b_1^{-1}\overline{b_1} & 0 & 0\\ -b_0^{-1}b_1Q_1^\zeta b_1^{-1}\overline{b}_1\overline{Q}_1^\zeta+b_0^{-1}\overline{b}_0 & b_0^{-1}\overline{b}_0 & 0\\ c_1^{-1}c_0Q_2^\zeta b_0^{-1}b_1Q_1^\zeta b_1^{-1}\overline{b}_1-c_1^{-1}c_0Q_2^\zeta b_0^{-1}\overline{b}_1\overline{Q}_1^\zeta & -c_1^{-1}c_0Q_2^\zeta b_0^{-1}\overline{b}_0+c_1^{-1}\overline{c}_0\overline{Q}_2^\zeta & c_1^{-1}\overline{c}_1\end{pmatrix}.$$

Заметим, что аналогично можно вычислить и $y^{-1}\overline{y}$. Подставляя эти выражения в (16), приходим к блочной 3×3-матрице, блоками которой служат 2×2-матрицы (над полем $\mathbb{C}$), т.е. к матрице шестого порядка. Однако вычисление ее определителя встречает весьма громоздкие выкладки и приводит к необозримому выражению.

Помимо формулы индекса, знание нулей определителя $\det X(\zeta)$ по прямой $\mathrm{Re}\zeta=0$ позволяет явно описать асимптотику решений задачи (7) вблизи угловой точки $\tau=0$. Общая ситуация здесь такова [13]. Пусть $\zeta_1,\ldots,\zeta_l$ — все различные нули функции $\det X(\zeta)$ на прямой $\mathrm{Re}\zeta=0$, обозначим n_j порядок полюса матрицы- функции $X^{-1}(\zeta)$ в точке ζ_j. Пусть $\phi(z)$ — произвольное решение задачи (7), причем для любого $\varepsilon>0$ функция $|z|^\varepsilon\phi(z)$ удовлетворяет условию Гельдера в каждой из областей $\overline{D}_0,\overline{D}_1$.

Тогда если правая часть f задачи принадлежит классу Гельдера на Γ и обращается в нуль в точке $\tau=0$, то в каждом из секторов $S_j,\ j=1,2,3$, функция $\phi(z)$ может быть представлена в виде

$$\phi(z)=\sum_{j=1}^{l}[z]^{\zeta_j}P_j(\ln[z])+\phi_0(z),\quad z\in S_j, \tag{17}$$

где $P_j(s)$ есть некоторый многочлен степени $n_j - 1$ (с коэффициентами из $\mathbb{R}^2$), функция $\phi_0(z)$ удовлетворяет условию Гельдера в секторе $\overline{S}_j$ и обращается в его вершине в нуль. Напомним, что для комплексного числа $z = x + iy$ матрица $[z] = x + yJ$, а $[z]^{\zeta_j}$ и $\ln[z]$ есть значения функции, соответственно, u^{ζ_j} и $\ln u$ от матрицы $[z]$. Подставляя (17) в выражения (5), (6), в итоге получим асимптотику вектора смещений u и матрицы напряжений σ исходной задачи (1)-(3).

Класс H функций ϕ, удовлетворяющих условию Гельдера в $\overline{D}_k$, $k = 0, 1$, соответствует в (17) случаю, когда $P_j(s) = 0$ при $\zeta_j \neq 0$ и $P_j(s) = \text{const}$ в противном случае. Обозначим $H^{(1)}$ совокупность всех $\phi \in H$, для которых функция $[z]\phi'(z)$ принадлежит H и обращается в нуль в точке $\tau = 0$. Эти же обозначения используем и для соответствующих классов функций f на дуге Γ.

Из общих результатов [13] следует, что любое решение $\phi \in H$ задачи с правой частью $f \in H^{(1)}$ автоматически принадлежит $H^{(1)}$.

Функции из $H^{(1)}$, очевидно, принадлежат соболевскому пространству $W_1^2(D)$. Решения $u \in H^{(1)}$ задачи (1)-(3) можно рассматривать как обобщенные решения $u \in W_1^2(D)$ задачи Дирихле (2) для системы (1), записанной в матричной дивергентной форме

$$\sum_{i,j=1,2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = 0$$

с кусочно постоянными коэффициентами a_{ij}.

Теория коэрцитивных краевых задач для сильно эллиптических систем вида (18) с кусочно гладкими коэффициентами хорошо изучены [14]. В частности, индекс рассматриваемой задачи (2), (18) в классе W_1^2 равен нулю. Пользуясь плотностью класса $H^{(1)}$ в W_1^2, отсюда аналогично [15] можно прийти к тому же заключению и по отношению к индексу задачи (1)-(3) в классах $H^{(1)}$ и H. Тем самым согласно (14) приходим к равенству $6 - \chi(-0) = s_0$, которое прямым вычислением получить весьма затруднительно.

Литература

1. Лехницкий Г.Г. Теория упругости анизотропного тела / М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.
2. Купрадзе В.Д. Методы потенциала в теории упругости / М.: Физматгиз, 1963.
3. Черепанов Г.П. Механика разрушения композиционных материалов / М.: 1983.
4. Hein V.L., Erdogan F. // Internat. J. of Fracture Mech. – 1971. – 7. – P.317-330.
5. Dempsey J.P., Sinclair G.B. // J. of Elasticity. – 11;3. – P.317-328.
6. Солдатов А.П., Жура Н.А. Смешанно-контактная задача плоской теории упругости // Дифференц. уравн. – 1988. – 24;1. – С.55-64.
7. Солдатов А.П. Система Ламе плоской анизотропной теории упругости // Докл.РАН. – 2002. – 385;2. – С.163-167.
8. Солдатов А.П. О первой и второй краевых задачах для эллиптических систем на плоскости // Дифференц. уравн. – 2003. – 39;5. – С.674-686.
9. Солдатов А.П. Эллиптические системы второго порядка в полуплоскости / Известия РАН (сер. матем.). – 2006. – 70;6. – С.161-192.
10. Абаполова Е.А., Солдатов А.П. Система Ламе теории упругости в плоской ортотропной среде // Вестник СамГУ-естественно научная серия. – 2007. – №6 (56). – С.260-268.
11. Митин С.П. О представлении решений анизотропной теории упругости // Дифференц. уравн. – 1998. – 34;1. – С.94-100.

12. Солдатов А.П. Общая краевая задача теории функций // Докл.АН СССР. – 1988. – 299;4. – С.825-828.
13. Солдатов А.П. Краевые задачи теории функций в областях с кусочно-гладкой границей / Тбилиси: Изд-во ТГУ, Ин-т прикл. матем. им. И.Н.Векуа, II, 1991.
14. Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости / М.: Мир, 1974.
15. Митин С.П., Солдатов А.П. О разрешимости смешанно-контактной задачи плоской теории упругости // Дифференц. уравн. – 1993. – 29;5. – С.885-889.

THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE LAME SYSTEM WITH PIECEWISE CONSTANT COEFFICIENTS

S.P. Mitin, A.P. Soldatov

Belgorod State University,
Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: soldatov48@gmail.com

Abstract. The Dirichlet problem for the Lame system with peacewise constant coefficients in plane elasticity theory is investigated on the basis of Douglis analytic functions.

Key words: Lame's system, Dirichlet's problem, Douglis' analytic functions.