MSC 37J05

О СПЕКТРАЛЬНОМ РАЗЛОЖЕНИИ ГЕНЕРАТОРОВ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

Ю.П. Вирченко, А.В. Субботин

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. Рассматривается класс $2n \times 2n$-матриц четного порядка. Устанавливается достаточное условие, накладываемое на спектральное разложение матриц этого класса, которое гарантирует, что они представляют матрицы $\mathcal{G}$ инфинитезимального сдвига по времени подходящей гамильтоновой системы с n степенями свободы, $n \in \mathbb{N}$.

Ключевые слова: гамильтоновы системы, жорданово представление, инфинитезимальный сдвиг, собственное число, число степеней свободы.

Объектом изучения в настоящем сообщении являются генераторы сдвига по времени линейных автономных гамильтоновых систем. В дальнейшем мы, для краткости, будем называть такие матрицы гамильтоновыми генераторами. В предыдущем сообщении [1] нами был доказано, что любая жорданова клетка четной размерности с нулевым собственным числом является генератором сдвига по времени линейной гамильтоновой системы. Здесь мы дадим доказательство общего утверждения относительно такого вида спектрального разложения матриц четной размерности, которое гарантирует, что они могут представлять собой гамильтоновы генераторы. Гипотеза о верности доказываемого нами утверждения естественным образом возникает из свойства симметричности спектра линейных гамильтоновых систем, установленного в [2, 3]. Сформулируем результат нашей работы.

Теорема. *Пусть $2n \times 2n$-матрица $\mathcal{D}$, $n \in \mathbb{N}$ представима в виде разложения*

$$\mathcal{D} = \left[\bigoplus_{i=1}^{l}(\mathcal{D}_+^{(i)} \oplus \mathcal{D}_-^{(i)})\right] \oplus \left[\bigoplus_{j=1}^{m}\mathcal{D}_0^{(j)}\right], \tag{1}$$

где $l, m \in \mathbb{N}$ таковы, что

$$2\sum_{i=1}^{l} \dim\, \mathcal{D}_+^{(i)} + \sum_{j=1}^{m} \dim\, \mathcal{D}_0^{(j)} = 2n$$

и при этом $\dim\, \mathcal{D}_+^{(i)} = \dim\, \mathcal{D}_-^{(i)}$, $i = 1 \div l$, а числа $\dim\, \mathcal{D}_0^{(j)}$, $j = 1 \div m$ являются четными. В этом разложении все матрицы $\mathcal{D}_\pm^{(i)}$, $i = 1 \div l$, $\mathcal{D}_0^{(j)}$, $j = 1 \div m$ являются жордановыми клетками $(\mathcal{D}_\pm^{(i)})_{kl} = \pm\lambda_i\delta_{kl} + \delta_{k,l-1}$, $k, l = 1 \div \dim\, \mathcal{D}_\pm^{(i)}$, $i = 1 \div l$, $\mathcal{D}_0^{(j)} = \delta_{k,l-1}$, $k, l = 1 \div \dim\, \mathcal{D}_0^{(j)}$, $j = 1 \div m$. Тогда матрица $\mathcal{D}$ эквивалентна матрице $\mathcal{G}$ инфинитезимального *сдвига по времени линейной автономной гамильтоновой системы с n степенями свободы, которая имеет вид*

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} -\mathcal{B}^T & -\mathcal{C} \\ \mathcal{A} & \mathcal{D} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}^T = \mathcal{A}, \ \mathcal{C}^T = \mathcal{C}.$$

Заметим, что в приведенной формулировке не исключен случай, когда некоторые из чисел $\pm\lambda_i$, $i = 1 \div l$ могут равняться нулю. В этом случае, в формулировке теоремы заложено, в частности, предположение о том, что множество таких жордановых клеток с нечетной размерностью и с нулевыми собственными числами может быть разбито на пары клеток с совпадающей размерностью.

Доказательству сформулированного утверждения мы предпошлем несколько вспомогательных лемм из матричной алгебры.

Лемма 1. *Матрица $\mathcal{U}$ размерности n с матричными элементами $\mathcal{U}_{ij} = \delta_{i,n-j+1}$, $i,j = 1 \div n$ является невырожденной. Она переводит верхнетреугольную $n \times n$-матрицу $\mathcal{X}_{ij} = \lambda\delta_{ij} + \mu\delta_{i,j-1}$ в нижнетреугольную $\mathcal{X}^T_{ij} = \lambda\delta_{ij} + \mu\delta_{i-1,j}$, $i,j = 1 \div n$.*

□ Вычислим, используя здесь и далее по тексту работы соглашение о суммировании по повторяющимся индексам,

$$\mathcal{U}^2_{ij} = \mathcal{U}_{ik}\mathcal{U}_{kj} = \delta_{i,n-k+1}\delta_{k,n-j+1} = \delta_{i,n-(n-j+1)+1} = \delta_{ij}\,,$$

то есть $\mathcal{U}^2 = \mathbf{1}$. Отсюда, в частности, следует, что матрица $\mathcal{U}$ не вырождена $\det\mathcal{U}^2 = (\det\mathcal{U})^2 = 1$.

Ввиду указанного свойства матрицы, имеем $\mathcal{U} = \mathcal{U}^{-1}$, и поэтому

$$(\mathcal{U}\mathcal{X}\mathcal{U}^{-1})_{ij} = \mathcal{U}_{ik}\mathcal{X}_{kl}\mathcal{U}_{lj} = \delta_{i,n-k+1}\mathcal{X}_{kl}\delta_{l,n-j+1} = \mathcal{X}_{n-i+1,n-j+1} =$$

$$= \lambda\delta_{n-i+1,n-j+1} + \mu\delta_{n-i+1,n-j} = \lambda\delta_{ij} + \mu\delta_{i-1,j}\,. \quad \blacksquare$$

Лемма 2. *Матрица $\mathcal{U} = \mathrm{diag}\left\{\prod_{j=0}^{k-1}\mu_j; k = 1 \div n\right\}$ размерности n, определяемая числами $\mu_k \neq 0$, $k = 1 \div n$, переводит $n \times n$-матрицу $\mathcal{Y}$ с матричными элементами $\mathcal{Y}_{ij} = \lambda\delta_{ij} + \mu_i\delta_{i,j-1}$, $i,j = 1 \div n$ в клетку Жордана $\mathcal{X}_{ij} = \lambda\delta_{ij} + \delta_{i,j-1}$ размерности n с собственным числом λ.*

□ Из определения матрицы $\mathcal{U}$ следует, что

$$(\mathcal{U}^{-1})_{ij} = \mathrm{diag}\left\{\prod_{j=0}^{k-1}\mu_j^{-1}; k = 1 \div n\right\}.$$

Тогда

$$(\mathcal{U}\mathcal{Y}\mathcal{U}^{-1})_{ij} = \mathcal{U}_{ik}\mathcal{Y}_{kl}(\mathcal{U}^{-1})_{lj} = \left(\delta_{ik}\prod_{s=0}^{k-1}\mu_s\right)(\lambda\delta_{kl} + \mu_k\delta_{k,l-1})\left(\delta_{lj}\prod_{t=0}^{j-1}\mu_t^{-1}\right) =$$

$$= \delta_{ij}\lambda \left(\prod_{s=0}^{i-1}\mu_s\right)\left(\prod_{t=0}^{j-1}\mu_t^{-1}\right) + \delta_{i,j-1}\mu_i \left(\prod_{s=0}^{i-1}\mu_s\right)\left(\prod_{t=0}^{j-1}\mu_t^{-1}\right) =$$

$$= \lambda\delta_{ij} + \mu_i\delta_{i,j-1}\left(\prod_{s=0}^{i-1}\mu_s\right)\left(\prod_{t=0}^{i}\mu_t^{-1}\right) = \lambda\delta_{ij} + \delta_{i,j-1}\,. \qquad \blacksquare$$

Лемма 3. *Пусть $k\times k$-матрица $\mathcal{D}$, $k\in\mathbb{N}$ представима в виде $\mathcal{D} = \mathcal{D}_+ \oplus \mathcal{D}_-$, где матрицы $\mathcal{D}_\pm$ являются жордановыми клетками равной размерности с собственными числами, соответственно, $\pm\lambda$, то есть $(\mathcal{D}_\pm)_{ij} = \pm\lambda\delta_{ij} + \delta_{i,j-1}$, $i,j = 1\div k$. Тогда матрица $\mathcal{D}$ эквивалентна гамильтоновому генератору линейной автономной гамильтоновой системы с k степенями свободы*

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} -\mathcal{B}^T & 0 \\ 0 & \mathcal{B}\end{pmatrix},$$

где $\mathcal{B}_{ij} = (\mathcal{D}_+)_{ij}$, $i,j = 1\div k$.

□ Заменив в утверждении Леммы 2 размерность n на k и положив $\mu_i = -1$, $i = 1\div k$, $\mathcal{Y} = \mathcal{D}_+$ можно, на основании этой леммы, утверждать, что существует неособенная $k\times k$-матрица $\mathcal{U}_2$ такая, что $\mathcal{U}_2^{-1}$ переводит матрицу $\mathcal{D}_-$ в матрицу $-\mathcal{D}_+$, то есть $\mathcal{U}_2^{-1}\mathcal{D}_-\mathcal{U}_2 = -\mathcal{D}_+ \equiv -\mathcal{B}$. Тогда

$$\begin{pmatrix} \mathcal{U}_2^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathcal{D}_- & 0 \\ 0 & \mathcal{D}_+\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathcal{U}_2^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1}\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\mathcal{B} & 0 \\ 0 & \mathcal{B}\end{pmatrix}.$$

Далее, на основании Леммы 1, существует $k\times k$-матрица $\mathcal{U}_1$, которая переводит матрицу $\mathcal{B}$ в матрицу $\mathcal{B}^T$, то есть $\mathcal{U}_1\mathcal{B}\mathcal{U}_1^{-1} = \mathcal{B}^T$. Тогда имеет место

$$\begin{pmatrix} \mathcal{U}_1\mathcal{U}_2^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathcal{D}_- & 0 \\ 0 & \mathcal{D}_+\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathcal{U}_1\mathcal{U}_2^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1}\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\mathcal{B}^T & 0 \\ 0 & \mathcal{B}\end{pmatrix}. \quad \blacksquare \qquad (2)$$

Замечание. Из этой леммы следует, что для любой пары жордановых клеток $\mathcal{D}_+$ и $\mathcal{D}_-$ гамильтонов генератор $\mathcal{G}$, которому соответствует матрица $\mathcal{D}_+\oplus\mathcal{D}_-$ имеет специальный вид (2). Это отражает тот факт, что спектральное разложение генератора не определяет полностью гамильтонову систему.

Непосредственным вычислением проверяется правильность следующей леммы.

Лемма 4. *Пусть имеются матрицы $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ соответственно размерности $2k_1$ и $2k_2$ так, что*

$$\mathcal{F}_i = \begin{pmatrix} \mathcal{K}_i & \mathcal{L}_i \\ \mathcal{M}_i & \mathcal{N}_i\end{pmatrix},$$

где $\mathcal{K}_i$, $\mathcal{L}_i$, $\mathcal{M}_i$, $\mathcal{N}_i$ – произвольные матрицы размерности k_i, $i = 1,2$. Тогда блочная матрица $\mathcal{F}_1\oplus\mathcal{F}_2$ размерности $2(k_1+k_2)$ эквивалентна матрице

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \mathcal{K}_1\oplus\mathcal{K}_2 & \mathcal{L}_1\oplus\mathcal{L}_2 \\ \mathcal{M}_1\oplus\mathcal{M}_2 & \mathcal{N}_1\oplus\mathcal{N}_2\end{pmatrix}.$$

□ Определим матрицу

$$\mathcal{U}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}_{k_1} & 0_{k_1} & 0_{k_1,k_2} & 0_{k_1,k_2}\\ 0_{k_2,k_1} & 0_{k_2,k_1} & \mathbf{1}_{k_2} & 0_{k_2}\\ 0_{k_1} & \mathbf{1}_{k_1} & 0_{k_1,k_2} & 0_{k_1,k_2}\\ 0_{k_2,k_1} & 0_{k_2,k_1} & 0_{k_2} & \mathbf{1}_{k_2}\end{pmatrix},$$

размерности $2(k_1+k_2)$, где $\mathbf{1}_{k_i}$, 0_{k_i} – квадратные, соответственно, единичная и нулевая матрицы размерности k_i, $i=1,2$, а $0_{k_1,k_2}$ и $0_{k_2,k_1}$ – прямоугольные нулевые, соответственно, $k_1\times k_2$- и $k_2\times k_1$-матрицы.

Согласно правилу умножения блочных матриц [4], $\mathcal{V}_{ij}$ и $\mathcal{W}_{ij}$, состоящих из прямоугольных блоков, их перемножение осуществляется по обычному правилу умножения числовых матриц, то есть результатом умножения является блочная матрица, состоящая из блоков $\sum_k \mathcal{V}_{ik}\mathcal{W}_{kj}$. Такое правило перемножения применимо в том случае, если число блочных столбцов в первом сомножителе совпадает с числом блочных строк во втором сомножителе. Кроме того, число столбцов каждого блока матрицы, которая является первым сомножителем, должно совпадать с числом строк каждого блока матрицы – второго сомножителя. В результате, образуется прямоугольная матрица с блоками, каждый из которых имеет число строк, равное числу строк левого сомножителя и число столбцов, равное числу столбцов из правого сомножителя. Используя это правило, находим, что матрица $\mathcal{U}$ ортогональна,

$$\mathcal{U}\mathcal{U}^T=\begin{pmatrix}\mathbf{1}_{k_1} & 0_{k_1} & 0_{k_1,k_2} & 0_{k_1,k_2}\\ 0_{k_2,k_1} & 0_{k_2,k_1} & \mathbf{1}_{k_2} & 0_{k_2}\\ 0_{k_1} & \mathbf{1}_{k_1} & 0_{k_1,k_2} & 0_{k_1,k_2}\\ 0_{k_2,k_1} & 0_{k_2,k_1} & 0_{k_2} & \mathbf{1}_{k_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{1}_{k_1} & 0_{k_1,k_2} & 0_{k_1} & 0_{k_1,k_2}\\ 0_{k_1} & 0_{k_1,k_2} & \mathbf{1}_{k_1} & 0_{k_1,k_2}\\ 0_{k_2,k_1} & \mathbf{1}_{k_2} & 0_{k_2,k_1} & 0_{k_2}\\ 0_{k_2,k_1} & 0_{k_2} & 0_{k_2,k_1} & \mathbf{1}_{k_2}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\mathbf{1}_{k_1} & 0_{k_1,k_2} & 0_{k_1} & 0_{k_1,k_2}\\ 0_{k_2,k_1} & \mathbf{1}_{k_2} & 0_{k_2,k_1} & 0_{k_2}\\ 0_{k_1} & 0_{k_1,k_2} & \mathbf{1}_{k_1} & 0_{k_1,k_2}\\ 0_{k_2,k_1} & 0_{k_2} & 0_{k_2,k_1} & \mathbf{1}_{k_2}\end{pmatrix}=\mathbf{1}\,.$$

Следовательно, $\det\mathcal{U}\neq 0$.

Проверим теперь, что имеет место равенство

$$\mathcal{U}(\mathcal{F}_1\oplus\mathcal{F}_2)\mathcal{U}^T=\mathcal{F}$$

Пользуясь тем же правилом перемножения блочных матриц, имеем

$$\mathcal{U}(\mathcal{F}_1\oplus\mathcal{F}_2)=\begin{pmatrix}\mathbf{1}_{k_1} & 0_{k_1} & 0_{k_1,k_2} & 0_{k_1,k_2}\\ 0_{k_2,k_1} & 0_{k_2,k_1} & \mathbf{1}_{k_2} & 0_{k_2}\\ 0_{k_1} & \mathbf{1}_{k_1} & 0_{k_1,k_2} & 0_{k_1,k_2}\\ 0_{k_2,k_1} & 0_{k_2,k_1} & 0_{k_2} & \mathbf{1}_{k_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathcal{K}_1 & \mathcal{L}_1 & 0_{k_1,k_2} & 0_{k_1,k_2}\\ \mathcal{M}_1 & \mathcal{N}_1 & 0_{k_1,k_2} & 0_{k_1,k_2}\\ 0_{k_2,k_1} & 0_{k_2,k_1} & \mathcal{K}_2 & \mathcal{L}_{k_2}\\ 0_{k_2,k_1} & 0_{k_2,k_1} & \mathcal{M}_{k_2} & \mathcal{N}_2\end{pmatrix}=$$

$$= \begin{pmatrix} \mathcal{K}_1 & \mathcal{L}_1 & 0_{k_1,k_2} & 0_{k_1,k_2} \\ 0_{k_2,k_1} & 0_{k_2,k_1} & \mathcal{K}_2 & \mathcal{L}_2 \\ \mathcal{M}_1 & \mathcal{N}_1 & 0_{k_1,k_2} & 0_{k_1,k_2} \\ 0_{k_2,k_1} & 0_{k_2,k_1} & \mathcal{M}_2 & \mathcal{N}_2 \end{pmatrix},$$

и, точно также, –

$$\mathcal{U}(\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2)\mathcal{U}^T = \begin{pmatrix} \mathcal{K}_1 & \mathcal{L}_1 & 0_{k_1,k_2} & 0_{k_1,k_2} \\ 0_{k_2,k_1} & 0_{k_2,k_1} & \mathcal{K}_2 & \mathcal{L}_2 \\ \mathcal{M}_1 & \mathcal{N}_1 & 0_{k_1,k_2} & 0_{k_1,k_2} \\ 0_{k_2,k_1} & 0_{k_2,k_1} & \mathcal{M}_2 & \mathcal{N}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{k_1} & 0_{k_1,k_2} & 0_{k_1} & 0_{k_1,k_2} \\ 0_{k_1} & 0_{k_1,k_2} & \mathbf{1}_{k_1} & 0_{k_1,k_2} \\ 0_{k_2,k_1} & \mathbf{1}_{k_2} & 0_{k_2,k_1} & 0_{k_2} \\ 0_{k_2,k_1} & 0_{k_2} & 0_{k_2,k_1} & \mathbf{1}_{k_2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathcal{K}_1 & 0_{k_1,k_2} & \mathcal{L}_1 & 0_{k_1,k_2} \\ 0_{k_2,k_1} & \mathcal{K}_2 & 0_{k_2,k_1} & \mathcal{L}_2 \\ \mathcal{M}_1 & 0_{k_1,k_2} & \mathcal{N}_1 & 0_{k_1,k_2} \\ 0_{k_2,k_1} & \mathcal{M}_2 & 0_{k_2,k_1} & \mathcal{N}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{K}_2 & \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \\ \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2 & \mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_2 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

Доказательство теоремы. Пусть матрица $\mathcal{D}$ задана в виде разложения (1), в которой матрицы $\mathcal{D}_\pm^{(i)}$, $i = 1 \div l$ и $\mathcal{D}_0^{(j)}$, $j = 1 \div m$ обладают свойствами, указанными в условии теоремы. Каждая матрица $\mathcal{D}_+^{(i)} \oplus \mathcal{D}_-^{(i)}$, согласно утверждению Леммы 3, посредством определенной матрицы $\mathcal{U}_+^{(i)}$, приводится к $2k_i \times 2k_i$-матрице (независимо от того, равно собственное число нулю или нет)

$$\mathcal{G}_+^{(i)} = \begin{pmatrix} -\mathcal{B}_+^{(i)\,T} & 0 \\ 0 & \mathcal{B}_+^{(i)} \end{pmatrix} = \mathcal{U}_+^{(i)}(\mathcal{D}_+^{(i)} \oplus \mathcal{D}_-^{(i)})\mathcal{U}_+^{(i)-1}, \qquad k_i = \dim\, \mathcal{D}_+^{(i)}, \qquad i = 1 \div l.$$

Согласно результату работы [1], каждая матрица $\mathcal{D}_0^{(j)}$ четной размерности, посредством определенной обратимой матрицы $\mathcal{U}_0^{(j)}$ приводится к $k_j \times k_j$-матрице (k_j – четное число)

$$\mathcal{G}_0^{(j)} = \begin{pmatrix} -\mathcal{B}_0^{(j)\,T} & 0 \\ \mathbf{1}_j & \mathcal{B}_0^{(j)} \end{pmatrix} = \mathcal{U}_0^{(j)}\mathcal{D}_0^{(j)}\mathcal{U}_0^{(j)-1}, \qquad k_j = \dim\, \mathcal{D}_0^{(j)}, \qquad j = 1 \div m.$$

Определим теперь матрицы

$$\mathcal{V}_+^{(i)} = \left[\bigoplus_{j=1}^{i-1} \mathbf{1}_{k_j}\right] \oplus \mathcal{U}_+^{(i)} \oplus \left[\bigoplus_{j=i+1}^{l} \mathbf{1}_{k_j}\right], \qquad i = 1 \div l,$$

причем полагается, что прямые суммы в квадратных скобках равны нулю, соответственно, первая при $i = 1$, а вторая – при $i = l$.

Кроме того, введем матрицы

$$\mathcal{V}_0^{(j)} = \left[\bigoplus_{i=1}^{j-1} \mathbf{1}_{k_i}\right] \oplus \mathcal{U}_0^{(j)} \oplus \left[\bigoplus_{i=j+1}^{m} \mathbf{1}_{k_i}\right], \qquad j = 1 \div m$$

с аналогичным соглашением относительно интерпретации этой формулы при $j = 1$ и $j = m$. Все матрицы из совокупности $\{\mathcal{V}_+^{(i)}; i = 1 \div l\} \cup \{\mathcal{V}_0^{(j)}; j = 1 \div m\}$, очевидным образом, коммутируют друг с другом. Тогда матрица

$$\mathcal{V} = \left(\prod_{i=1}^{l} \mathcal{V}_+^{(i)}\right)\left(\prod_{j=1}^{m} \mathcal{V}_0^{(j)}\right)$$

переводит матрицу $\mathcal{D}$ в

$$\mathcal{V}\mathcal{D}\mathcal{V}^{-1} = \left[\bigoplus_{i=1}^{l} \mathcal{G}_+^{(i)}\right] \oplus \left[\bigoplus_{j=1}^{m} \mathcal{G}_0^{(j)}\right].$$

Вводя единую нумерацию для совокупности матриц $\{\mathcal{G}_+^{(i)}; i = 1 \div l\} \cup \{\mathcal{G}_0^{(j)}; j = 1 \div m\} \equiv \{\mathcal{G}^{(i)}; i = 1 \div l + m\}$, последнее равенство запишем в виде

$$\mathcal{V}\mathcal{D}\mathcal{V}^{-1} = \bigoplus_{i=1}^{l+m} \mathcal{G}^{(i)}, \tag{4}$$

где все матрицы $\mathcal{G}^{(i)}$, $i = 1 \div (l + m)$ имеют четную размерность. После этого применим рассуждение по индукции, приводящее матрицу в правой части последнего равенства, посредством преобразования на основе матрицы $\mathcal{W}$, к матрице

$$\begin{pmatrix} -\mathcal{B}^T & -\mathcal{C} \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} \end{pmatrix} = \mathcal{W}\left(\bigoplus_{i=1}^{l+m} \mathcal{G}^{(i)}\right)\mathcal{W}^{-1}, \tag{5}$$

где

$$\mathcal{B} = \bigoplus_{i=1}^{l+m} \mathcal{B}^{(i)}, \quad \mathcal{A} = \bigoplus_{i=1}^{l+m} \mathcal{A}^{(i)} = \bigoplus_{i=1}^{m} 1_{k_i}, \qquad \mathcal{C} = \bigoplus_{i=1}^{l+m} \mathcal{C}^{(i)} = 0.$$

При $l + m = 1$ сформулированное утверждение является тавтологией. Пусть оно справедливо при каком-то значении $(l+m)$, то есть в этом случае имеет место равенство (5) с размерностью матрицы $2n$. Тогда индукционный шаг к значению числа составляющих в $l+m+1$ в разложении (4) осуществляется применением Леммы 4 к $2(n+1) \times 2(n+1)$-матрице

$$\bigoplus_{i=1}^{l+m+1} \mathcal{G}^{(i)} = \begin{pmatrix} -\mathcal{B}^T & -\mathcal{C} \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -\mathcal{B}^{(l+m+1)\,T} & -\mathcal{C}^{(l+m+1)} \\ \mathcal{A}^{(l+m+1)} & \mathcal{B}^{l+m+1} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (-\mathcal{B}^T) \oplus (-\mathcal{B}^{(l+m+1)\,T}) & (-\mathcal{C}) \oplus (-\mathcal{C}^{(l+m+1)}) \\ \mathcal{A} \oplus \mathcal{A}^{(l+m+1)} & \mathcal{B} \oplus \mathcal{B}^{(l+m+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\mathcal{B} \oplus \mathcal{B}^{(l+m+1)})^T & -(\mathcal{C} \oplus \mathcal{C}^{(l+m+1)}) \\ \mathcal{A} \oplus \mathcal{A}^{(l+m+1)} & \mathcal{B} \oplus \mathcal{B}^{(l+m+1)} \end{pmatrix}.$$

■

Заметим, что перестановка блочных строк и столбцов матрицы $\bigoplus_{i=1}^{l+m} \mathcal{G}^{(i)}$ посредством преобразования $\mathcal{W}(\cdot)\mathcal{W}^{-1}$ соответствует тривиальному переупорядочению фазовых переменных гамильтоновой системы, первоначально записанных в порядке $\langle p_1, q_1, p_2, q_2, ..., p_n, q_n\rangle$, к следующему порядку $\langle p_1, p_2, ..., p_n, q_1, q_2, ..., q_n\rangle$.

Литература

1. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. Полностью вырожденные линейные гамильтоновы системы // Belgorod State University Scientific Bulletin. – 2012. – №23 (142);29. – С.215-218.
2. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. Симметричность спектра линейных гамильтоновых систем // Belgorod State University Scientific Bulletin. – 2011. – 17(112);24. – С.179-180.
3. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. Свойство локальной обратимости гамильтоновых динамических систем // Материалы Международной конференции «Комплексный анализ и его приложения в дифференциальных уравнениях и теории чисел» Белгород, 17-21 октября 2011 / С.37-38.
4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / М.: Наука, 1966. – 576 с.

ABOUT SPECTRAL DECOMPOSITION OF GENERATORS OF LINEAR HAMILTONIAN SYSTEMS

Yu.P. Virchenko, A.V. Subbotin

Belgorod State University,
Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail:virch@bsu.edu.ru

Abstract. The class of even order $2n \times 2n$-matrices is under consideration. It is proposed the sufficient condition concerned their canonical Jordan's representations such that they are represented matrices $\mathcal{G}$ of some infinitesimal temporal shifts of appropriate Hamiltonian systems with n freedom degrees, $n \in \mathbb{N}$.

Key words: hamiltonian systems, Jordan's representation, infinitesimal shift, eigenvalue, number of freedom degrees.