MSC 35Q05

О ВОЗМУЩЕНИИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА-ПУАССОНА-ДАРБУ ПЕРЕМЕННЫМ ОГРАНИЧЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

А.Н. Бабаев, А.В. Глушак

Белгородский государственный университет,
ул.Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: Babaev@bsu.edu.ru, Glushak@bsu.edu.ru

Аннотация. Рассматривается задача Коши для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу при возмущении постоянного неограниченного оператора переменным ограниченным оператором.

Ключевые слова: уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу, возмущение, переменный ограниченный оператор.

Пусть A — неограниченный замкнутый оператор и $k > 0$. В банаховом пространстве E рассмотрим задачу Коши для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу

$$u''(t) + \frac{k}{t}u'(t) = Au(t), \tag{1}$$

$$u(0) = u_0, \;\; u'(0) = 0. \tag{2}$$

Под решением задачи Коши (1), (2) мы будем понимать дважды непрерывно дифференцируемую на интервале $(0, +\infty)$ функцию $u(t)$, удовлетворяющую уравнению (1) на интервале $(0, +\infty)$ и условию (2).

Класс операторов A, с которым задача Коши (1), (2) равномерно корректна, обозначим через G_k, а соответствующий разрешающий оператор, который назовем операторной функцией Бесселя (ОФБ), — через $Y_k(t)$, т.е.

$$u(t) = Y_k(t)u_0\,. \tag{3}$$

Критерий равномерной корректности и свойства ОФБ $Y_k(t)$ изучались в работе [1]. В работе [2] исследован вопрос о принадлежности $G_k, k \geq 0$ возмущённого оператора $A + B$ в случаях, когда B — постоянный ограниченный оператор или $B \in G_m,\ m \geq 0$.

В настоящей работе рассматривается случай, когда уравнение (1) возмущается переменным ограниченным оператором $B(t)$. При доказательстве основного утверждения использованы результаты работ [3], [4].

Пусть $B(t)$ — переменный, ограниченный сильно непрерывный оператор. В банаховом пространстве E рассмотрим уравнение

$$u''(t) + \frac{k}{t}u'(t) = (A + B(t))u(t). \tag{4}$$

Работа второго автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 13-01-00378.

Теорема 1. *Пусть $A \in G_k$, $k \geq 0$, а $G(t,s)$ — сильно непрерывный при $t \geq s > 0$ оператор, удовлетворяющий операторному дифференциальному уравнению*

$$\frac{\partial^2 G(t,s)}{\partial t^2} - \frac{k^2-2k}{4t^2}G(t,s) - B(t)G(t,s) = \frac{\partial^2 G(t,s)}{\partial s^2} - \frac{k^2-2k}{4s^2}G(t,s) \tag{5}$$

и граничным условиям

$$\frac{dG(t,t)}{dt} = \frac{1}{2}B(t), \quad \lim_{s\to 0} G(t,s)s^{(k-3)/4} = 0. \tag{6}$$

Тогда функция

$$u(t) = Y_k(t)u_0 + t^{-k/2}\int\limits_0^t G(t,s)s^{k/2}Y_k(s)u_0 ds \tag{7}$$

является решением задача Коши (4), (2).

□ Заметим, что из (1), (3) следует, что для первого слагаемого в представлении (7) справедливо равенство

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(Y_k(t)u_0\right) + \frac{k}{t}\frac{d}{dt}\left(Y_k(t)u_0\right) = AY_k(t)u_0. \tag{8}$$

Обозначим второе слагаемое в представлении (7) через $\Phi(t)$, т.е.

$$\Phi(t) = t^{-k/2}\int\limits_0^t G(t,s)s^{k/2}Y_k(s)u_0\, ds. \tag{9}$$

Дважды дифференцируя (9) по t, будем иметь

$$\Phi'(t) = t^{-k/2}\int\limits_0^t \left(\frac{\partial}{\partial t}G(t,s) - \frac{k}{2}t^{-1}G(t,s)\right)s^{k/2}Y_k(s)u_0\, ds + G(t,t)Y_k(t)u_0, \tag{10}$$

$$\Phi''(t) = t^{-k/2}\int\limits_0^t \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}G(t,s) - kt^{-1}\frac{\partial}{\partial t}G(t,s) + \frac{2k+k^2}{4}t^{-2}G(t,s)\right) \times$$
$$\times\ s^{k/2}Y_k(s)u_0\, ds + \left(2\frac{d}{dt}G(t,t) - \frac{k}{2}t^{-1}G(t,t)\right)Y_k(t)u_0 + G(t,t)\frac{d}{dt}Y_k(t)u_0. \tag{11}$$

Пусть теперь

$$\Psi(t) = \Phi''(t) + \frac{k}{t}\Phi'(t). \tag{12}$$

Тогда, используя равенства (10), (11), получим

$$\Psi(t) = t^{-k/2}\int\limits_0^t \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}G(t,s) - \frac{k^2-2k}{4t^2}G(t,s)\right)s^{k/2}Y_k(s)u_0\, ds +$$

$$+\left(2\frac{d}{dt}G(t,t)+\frac{k}{2t}G(t,t)\right)Y_k(t)u_0+G(t,t)\frac{d}{dt}Y_k(t)u_0. \qquad (13)$$

Обозначим интеграл, стоящий в правой части (13) через $I(t)$ и упростим его, используя (5). В результате, находим

$$I(t)=\int\limits_0^t\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}G(t,s)-\frac{k^2-2k}{4}t^{-2}G(t,s)\right)s^{k/2}Y_k(s)u_0\,ds=$$

$$=\int\limits_0^t\frac{\partial^2}{\partial s^2}G(t,s)s^{k/2}Y_k(s)u_0\,ds-\frac{k^2-2k}{4}\int\limits_0^t G(t,s)s^{k/2-2}Y_k(s)u_0\,ds+$$

$$+\int\limits_0^t B(t)G(t,s)s^{k/2}Y_k(s)u_0\,ds. \qquad (14)$$

Рассмотрим первый интеграл, стоящий в правой части (14), проинтегрировав дважды по частям,

$$\int\limits_0^t\frac{\partial^2}{\partial s^2}G(t,s)s^{k/2}Y_k(s)u_0\,ds=-t^{k/2}\left(\frac{k+2t}{2t}G(t,t)\left(Y_k(t)+\frac{d}{dt}Y_k(t)\right)u_0\right)+$$

$$+\frac{k^2-2k}{4}\int\limits_0^t G(t,s)s^{k/2-2}Y_k(s)u_0\,ds+\int\limits_0^t G(t,s)s^{k/2}\left(\frac{d^2}{ds^2}Y_k(s)+\frac{k}{s}\frac{d}{ds}Y_k(s)\right)u_0\,ds. \qquad (15)$$

Подставляя (15) в (14) и упростив, получим

$$I(t)=-t^{k/2}\left(\frac{k+2t}{2t}G(t,t)\left(Y_k(t)+\frac{d}{dt}Y_k(t)\right)u_0\right)+\int\limits_0^t B(t)G(t,s)s^{k/2}Y_k(s)u_0\,ds+$$

$$+\int\limits_0^t G(t,s)s^{k/2}\left(\frac{d^2}{ds^2}Y_k(s)+\frac{k}{s}\frac{d}{ds}Y_k(s)\right)u_0\,ds. \qquad (16)$$

Подставляя (16) в (13) и упростив, будем иметь

$$\Psi(t)=(A+B(t))t^{-k/2}\int\limits_0^t G(t,s)s^{k/2}Y_k(s)u_0\,ds+B(t)Y_k(t)u_0=$$

$$=(A+B(t))\varphi(t)+B(t)Y_k(t)u_0. \qquad (17)$$

Возвращаясь к (7), используя (8), (9), (12) и (17), находим

$$u''(t)+\frac{k}{t}u'(t)=AY_k(t)u_0+(A+B(t))\Phi(t)+B(t)Y_k(t)u_0$$

или

$$u''(t) + \frac{k}{t}u'(t) = (A + B(t))u(t).$$

Таким образом, определяемая равенством (7) функция $u(t)$ является решением задачи Коши (4), (2) для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу. ■

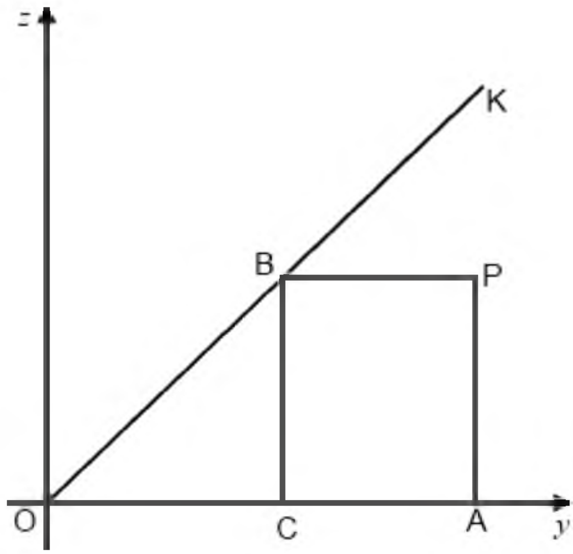

Рис. 1. Области интегрирования.

Теорема 2. *Дифференциальное уравнение* (5) *с условиями* (6) *эквивалентно интегральному уравнению*

$$H(\xi,\eta) = \frac{1}{4}\int\limits_0^{\xi} v(y,\eta)B(\sqrt{y})y^p\, dy + \int\int_{OBPA} v(z,y)B(\sqrt{y}+\sqrt{z})H(y,z)\, dydz, \qquad (18)$$

где

$$y = \frac{1}{4}(t+s)^2, \quad z = \frac{1}{4}(t-s)^2, \quad G(t,s) = (y-z)^{-p+\frac{1}{2}}H(y,z), \quad p = \frac{k-1}{4}\ ,$$

а функция $v(z,s)$ *непрерывна внутри областей* OBC *и* $CAPB$ (см. рис. 1)*и задаётся формулами*

$$v(y,z) = (\eta - y)^{-\alpha}(z-\xi)^{-\alpha}(z-y)^{2\alpha}{}_2F_1\left(\alpha,\alpha,1,\frac{(y-\xi)(z-\eta)}{(y-\eta)(z-\xi)}\right)$$

в области $CAPB$. *Здесь* ${}_2F_1$ — *гипергеометрическая функция, и*

$$v(y,z) = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\frac{(\Gamma(1-\alpha))^2}{\Gamma(2-2\alpha)}(\eta-\xi)^{1-2\alpha}(y-s)(z-\xi)^{\alpha-1}(\eta-y)^{\alpha-1}\ \times$$

$$\times\ {}_2F_1\left(1-\alpha,1-\alpha,2-2\alpha,\frac{(y-s)(\eta-\xi)}{(y-\eta)(z-\xi)}\right),$$

в области OBC.

На рис. 1, граничные условия заданы на оси Oy и прямой OK, прямые PA, PB и BC – это $y = \xi$, $z = \eta$ и $y = \eta$, соответственно.

□ Доказательство теоремы аналогично рассуждениям § 2 работы [3]. ■

Теорема 3. *Интегральное уравнение* (18) *имеет решение внутри области* $0 < \eta < \xi$.

□ Доказательство теоремы проводится методом последовательных приближений и повторяет рассуждения § 3 работы [3]. ■

Обозначим далее

$$J(t,s)u_0 = \begin{cases} (1-k)^{-1}\left(t^{1-k}s^kY_{2-k}(t)Y_k(s) - sY_k(t)Y_{2-k}(s)\right)u_0, \text{ для } k>0,\ k\neq 1; \\ s\left(Z_1(t)Y_1(s) - Y_1(t)Z_1(s)\right)u_0, \text{ для } k=1, \end{cases} \tag{19}$$

где $Z_1(t)u_0$ – оператор-функция, определяемая равенством

$$Z_1(t)u_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^1 (1-s^2)^{-1/2}\ln\left(t(1-s^2)\right)Y_0(t)u_0.$$

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и пусть для* $s < t$ *справедлива оценка*

$$\|J(t,s)\| \le M(t-s)e^{\omega(t-s)}. \tag{20}$$

Тогда определяемая равенством (7) *функция* $u(t)$ *является единственным решением задачи Коши* (4), (2) *для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу.*

□ Учитывая теоремы 1 – 3, нам осталось доказать лишь единственность решения задачи Коши (4), (2) с нулевыми начальными условиями (2).

Предположим противное, а именно, что существует $w(t) : R \to D(A)$, удовлетворяющая задаче Коши (4), (2) с нулевыми начальными условиями (2). Тогда $w(t)$ удовлетворяет (см. [4]) интегральному уравнению

$$w(t) = \int_0^t J(t,\tau)B(\tau)w(\tau)\,d\tau, \tag{21}$$

где $J(t,\tau)$ определена в (19).

Обозначив $K = \sup(\|B(\tau)\|)$ и $m_t = \sup\limits_{\tau\in[0;t]}(\|w(\tau)\|)$, мы получим

$$m_t \le \int_0^t M(t-\tau)e^{\omega(t-\tau)}Km_t d\tau \le MKm_te^{\omega t}\,\frac{t}{\omega} < m_t\,,$$

если t выбрано достаточно малым. Это значит, $w = 0$ на $[0; t_0]$. Аналогично, $w = 0$ на $[t_0; 2t_0]$ и, следовательно, $w = 0$ на $[0; +\infty)$. Последнее и означает единственность. ■

Отметим, что частный случай теоремы 4, когда $B(t) = q(t)I$ и $q(t)$ – скалярная функция, рассмотрен ранее в работе [15].

Литература

1. Глушак А.В. Операторная функция Бесселя // ДАН. – 1997. – 352;5. – С.587-589.
2. Глушак А.В. О возмущении абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу // Матем. заметки. – 1996. – 60;3. – С.363-369.
3. Волк В.Я. Научные сообщения и задачи о формулах обращения для дифференциального уравнения с особенностью при x=0 // Успехи математических наук. – 1953. – VIII №4 (56) №6. – С.141-151.
4. Глушак А.В., Кононенко В.И., Шмулевич С.Д. Об одной сингулярной абстрактной задаче Коши // Известия ВУЗов. Математика. – 1986. – №6. – С.55–56.
5. Глушак А.В. Регулярное и сингулярное возмущения абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу // Математические заметки. – 1999. – 66;3. – С.364–371.

ABOUT PERTURBATION OF CAUCHY PROBLEM FOR THE EULER-POISSON-DARBOUX EQUATION BY VARIABLE BOUNDED OPERATOR

A.N. Babaev, A.V. Glushak

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, email: Babaev@bsu.edu.ru, Glushak@bsu.edu.ru

Abstract. Cauchy's problem for the Euler-Poisson-Darboux equation is under consideration in the case when constant unbounded operator is perturbed by variable bounded operator.

Key words: The Euler-Poisson-Darboux equation, perturbation, variable bounded operator.