MSC 35J45

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ШВАРЦА В НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ СЛУЧАЯХ

В.Г. Николаев

Новгородский Государственный университет,
Институт электронных и информационных систем,
ул. Большая Санкт-Петербургская, 41, Великий Новгород, 173003, Россия, e-mail:vg14@inbox.ru

Аннотация. Статья посвящена вопросу об единственности решения однородной задачи Шварца для вектор-функций, аналитических по Дуглису. Доказана единственность для определенного типа матриц произвольной размерности. Найден класс матриц, для которых единственности нет. В случае размерности два уставлена единственность решения задачи для круга.

Ключевые слова: вектор-функция, голоморфная функция, частная производная, область, замкнутый контур, матрица, собственное число, собственный вектор.

Настоящая статья посвящена изучению однородной задачи Шварца для функций, аналитических по Дуглису.

Определение 1. *Пусть комплексная n-вектор-функция $\phi(x,y)$ двух вещественных переменных x,y имеет в области $D\subset\mathbb{R}^2$ первые частные производные по x и по y и $J\in\mathbb{C}^{n\times n}$ — матрица, все собственные числа которой лежат в верхней полуплоскости. Пусть в области D выполнено равенство*

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}-J\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x}=0\,. \tag{1}$$

Тогда функцию ϕ назовем аналитической по Дуглису, или J-аналитической в области D. В скалярном случае, при $J=\lambda$, $\operatorname{Im}\lambda\neq 0$ функцию $\phi(z)$, удовлетворяющую в области $D\subset\mathbb{R}^2$ соотношению $\phi_y-\lambda\cdot\phi_x=0$, назовем λ-голоморфной. Число λ также называют показателем функции $\phi(z)$.

При $\lambda=i$ $\phi(z)$ совпадает с обычной голоморфной функцией.

Определение 2. *Будем говорить, что функция $\phi(z)$ соответствует матрице J, если для них выполнено* (1).

Как показано в [1], условия (1) достаточно для аналитичности функции ϕ. При этом не нужно требовать даже непрерывности первых частных производных.

Нелишне отметить, что аналитические по Дуглису функции широко применяются при исследовании решений краевых задач для эллиптических уравнений в частных производных [1], поэтому их изучение представляет большой самостоятельный интерес.

1. Постановка однородной задачи Шварца [2]. Пусть односвязная область D ограничена гладким контуром Г. Требуется найти J-аналитическую в области D функцию $\phi(z)$, которая непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$ и удовлетворяет краевому условию

$$\operatorname{Re}\phi\big|_{\Gamma} = 0\,. \tag{2}$$

Очевидными решениями этой задачи служат постоянные векторы $\phi = i\overline{x}$, $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, которые назовем тривиальными решениями.

Наше дальнейшее исследование будет посвящено вопросу единственности задачи Шварца, то есть для каких матриц J и областей D задача (2) имеет только постоянные решения. Всюду для краткости будем обозначать ϕ_x и ϕ_y частные производные функции $\phi(x,y)$ по x и по y соответственно.

2. Одномерный случай. Для $n = 1$ имеет место довольно очевидное

Предложение 1. *Пусть скалярная комплексная функция $\phi(z)$ является λ-голоморфной в конечной области $D \subset \mathbb{R}^2$ с границей Г. Тогда задача (2) допускает только тривиальные решения.*

□ Пусть $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 i$, $\lambda_2 \neq 0$. После обратимой подстановки

$$x = x' - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}y', \qquad y = \frac{1}{\lambda_2}y' \tag{3}$$

функция $\phi(z)$ будет голоморфной с показателем $\lambda = i$. Для нее доказываемое утверждение является известным фактом. ■

3. Многомерный случай. Для $n > 1$ докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть столбцы обратимой матрицы $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$, начиная со второго, кратны вещественным векторам, и матрица $J_1 = Q^{-1}JQ$ — нижнетреугольная. Тогда задача (2) допускает только тривиальные решения.*

□ Отметим, что вектор $\overline{x}_1$ в матрице $Q = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ *может и не быть кратным вещественному.* Кроме того, векторы $\overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n$ не именно вещественные, а кратные таковым. Поделим каждый из них на соответствующий комплексный множитель так, чтобы они стали вещественными. Их обозначения оставим прежними.

Обозначим $\overline{x}'_1$ такой реальный вектор, что *вещественная* матрица $Q' = (\overline{x}'_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ – неособая. Тогда матрица $J'_1 = (Q')^{-1}J(Q')$ оператора J в новом базисе Q' останется нижнетреугольной. Пусть n-вектор-функция $\phi(z)$ является J-аналитической в области D с границей Г. Подставив $J = (Q')J'_1(Q')^{-1}$ в (1), получим:

$$\phi_y - (Q')J'_1(Q')^{-1}\cdot\phi_x = 0\,,$$

или, умножая обе части на $(Q')^{-1}$,

$$[(Q')^{-1}\phi]_y - J'_1\cdot[(Q')^{-1}\phi]_x = 0\,. \tag{4}$$

Матрица J_1' имеет вид

$$J_1' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \zeta & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & * & * & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{5}$$

При этом по главной диагонали у нее стоят собственные числа матрицы J, так как она подобна ей. Поскольку Q' – вещественная неособая матрица, то задача (2) равносильна условию

$$\mathrm{Re}\,[(Q')^{-1}\phi]\,\big|_\Gamma = 0\,. \tag{6}$$

Пусть скалярная комплексная функция $p(x,y)$ — это первая компонента вектор-функции $(Q')^{-1}\phi(z)$. Тогда первое уравнение (4) в силу (5) примет вид $p_y - \lambda_1 \cdot p_x = 0$, то есть $p(x,y)$ — λ_1-голоморфная функция. При этом в силу (6) $\mathrm{Re}\,p(x,y)\big|_\Gamma = 0$. Отсюда с учетом предложения 1 имеем $p(x,y) = \mathrm{const}$.

Пусть теперь $q(x,y)$ — вторая компонента вектор-функции $(Q')^{-1}\phi(z)$. Тогда второе уравнение (4), с учетом (5), примет вид

$$q_y - \lambda_2 \cdot q_x = \frac{\partial}{\partial x}(\zeta \cdot p) = \frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{const}) = 0\,,$$

то есть функция $q(x,y)$ будет λ_2-голоморфной. При этом в силу (6) $\mathrm{Re}\,q(x,y)\big|_\Gamma = 0$. Отсюда согласно предложению 1 имеем $q(x,y) = \mathrm{const}$. Применяя далее тривиальную индукцию, получаем: $(Q')^{-1}\phi(z) = \mathrm{const}$, то есть $\phi(z) = \mathrm{const}$, что и требовалось. ■

Замечание 1. Случаю $n = 2$ в теореме 1 соответствуют 2×2-матрицы, имеющие *хотя бы один* вещественный собственный вектор.

Замечание 2. Разумеется, матрицу J_1 в формулировке теоремы 1 можно выбрать и верхне треугольной. Тогда в матрице Q кратными вещественным должны быть векторы $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_{n-1}$, то есть все, кроме крайнего правого.

4. Выделим класс матриц, для которых нет единственности решения задачи (2). Имеет место

Теорема 2. *Пусть матрицы $J_1, J_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Для того, чтобы для данной матрицы $J = J_1 + J_2 i$ существовала соответствующая ей непостоянная линейная вектор-функция $\phi(x,y)$, удовлетворяющая однородному условию $\mathrm{Re}\,\phi \equiv 0$, необходимо и достаточно выполнение условия* $\det J_2 = 0$.

□ Необходимость. Положим

$$\phi(x,y) = i[x\overline{a} + y\overline{b}]\,, \tag{7}$$

где $\overline{a}$ и $\overline{b}$ — вещественные n-векторы, подлежащие определению. Тогда $\mathrm{Re}\,\phi(x,y) \equiv 0$. Нам нужно, чтобы эта функция была аналитической по Дуглису. Для нахождения векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ подставим (7) в (1): $i\overline{b} = (J_1 + J_2 i)i\overline{a}$, то есть

$$i\overline{b} = iJ_1\overline{a} - J_2\overline{a}\,. \tag{8}$$

Как нетрудно видеть, (8) возможно только при выполнении условия

$$J_2\overline{a} = 0\,. \tag{9}$$

Если в (8) вектор $\overline{a} = 0$, то $\overline{b} = 0$. Откуда в силу (7) функция $\phi(x, y) = 0$. Поэтому для выполнения условия $\phi(x, y) \neq 0$ необходимо, чтобы $\overline{a} \neq 0$, а это согласно (9) возможно только если $\det J_2 = 0$.

Достаточность. Пусть $\det J_2 = 0$. Подставив любое нетривиальное решение (9) в (8), получим вектор $\overline{b} = J_1\overline{a}$ и тем самым восстановим не равную константе линейную функцию $\phi(x, y)$ вида (7). Она будет удовлетворять (8), то есть соответствовать матрице J. ■

В качестве иллюстрации утверждения теоремы 2 приведем

Пример 1. Пусть

$$J = \begin{pmatrix} i+1 & i \\ i & i-1 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \phi = \begin{pmatrix} (y+x)i \\ (y-x)i \end{pmatrix}.$$

Матрица J имеет собственное число $\lambda = i$ кратности два. Здесь $\det J_2 = 0$, $\operatorname{Re}\phi \equiv 0$.

5. Преобразования однородной задачи Шварца для размерности $n = 2$. Если матрица $J \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ не имеет вещественных собственных векторов, то, в силу замечания 1, теорема 1 к ней не применима. И в этом случае возможны примеры неединственности задачи (2) в виде квадратичных вектор-функций. Приведем один из них.

Пример 2. Пусть

$$J = \begin{pmatrix} -i & 2 \\ 2 & 3i \end{pmatrix}, \quad \phi(z) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - 1 + xy\,i \\ (x^2 + y^2)\,i \end{pmatrix}.$$

Матрица J имеет собственное число $\lambda = i$ кратности два, а ее единственный собственный вектор имеет вид $(1, i)$. Как нетрудно видеть, $\operatorname{Re}\phi\big|_\Gamma = 0$ на эллипсе $\Gamma:\ \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = 1$, но при этом $\phi \neq \mathrm{const}$.

В этом и следующем пунктах изучаются именно такие матрицы $J \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, то есть матрицы, имеющие собственное число $\lambda = i$ кратности два, но собственный вектор которых не кратен вещественному.

В контрпримере 2 область D — эллипс. Возникает вопрос: для каких областей задача (2) имеет только тривиальные решения? В теореме 4 ниже будет доказано, что *такой областью будет произвольный круг.* Но сначала в этом пункте преобразуем задачу (2) к некоторому специальному виду (20).

Построим жорданов базис Q матрицы J. Обозначим вектор $\overline{x} = (1, 0)$, тогда вектор $\overline{y} = (J - iE)\cdot\overline{x} \neq 0$, так как матрица J, обладающая указанным выше свойством, будет нетреугольной. Из последнего равенства: $J\overline{x} = \overline{y} + i\overline{x}$. При этом $J\overline{y} = J(J - iE)\cdot\overline{x} = (J - iE + iE)(J - iE)\cdot\overline{x} = (J - iE)^2\cdot\overline{x} + iE(J - iE)\cdot\overline{x} = i\overline{y}$, так как $(J - iE)^2 = 0$ согласно теореме Кэли-Гамильтона. Таким образом, вектор $\overline{y} = (a, b)$ будет собственным для матрицы J; *по условию он не кратен вещественному.*

Обозначим

$$Q = (\overline{x}, \overline{y}) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 + a_2 i \\ 0 & b_1 + b_2 i \end{pmatrix}, \tag{10}$$

и вычислим матрицу

$$J_1 = Q^{-1} J Q = \frac{1}{b} \begin{pmatrix} b & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (J\overline{x}, J\overline{y}) = \frac{1}{b} \begin{pmatrix} b & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (\overline{y} + i\overline{x}, i\overline{y}) =$$

$$= \frac{1}{b} \begin{pmatrix} b & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a + i & ai \\ b & bi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Таким образом, матрица $J_1 = Q^{-1} J Q$ будет жордановой формой матрицы J, а Q – ее жордановым базисом.

Пусть 2-вектор-функция $\phi(z)$ удовлетворяет (1) и (2) в области $D \subset \mathbb{R}^2$, ограниченной контуром Γ. Так как согласно (11) $J = Q J_1 Q^{-1}$, то, с учетом (1),

$$\phi_y - Q J_1 Q^{-1} \cdot \phi_x = 0, \quad (x, y) \in D,$$

откуда, умножая обе части на Q^{-1},

$$(Q^{-1}\phi)_y - J_1 \cdot (Q^{-1}\phi)_x = 0. \tag{12}$$

Обозначим:

$$\phi^0(x, y) = Q^{-1} \cdot \phi(x, y) = \begin{pmatrix} f(z) \\ \psi(x, y) \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Теперь выпишем (12) с учетом (11) и (13) более подробно:

$$\frac{d}{dy} \begin{pmatrix} f(z) \\ \psi(x, y) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} \cdot \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} f(z) \\ \psi(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Первая строка (14) означает, что $f(z)$ – голоморфная функция с показателем $\lambda = i$. Согласно второй строке функция $\psi(x, y)$ удовлетворяет условию

$$\psi_y - i \cdot \psi_x = f'_x(z) = f'_z(z). \tag{15}$$

Обозначив $f(z) = p + iq$ и $\psi(x, y) = u + iv$, выразим функцию $\phi(x, y)$ из (13) с учетом (10):

$$\phi(x, y) = Q \cdot \phi^0(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 + a_2 i \\ 0 & b_1 + b_2 i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p + iq \\ u + iv \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} p(x, y) + a_1 \cdot u(x, y) - a_2 \cdot v(x, y) + i \cdot g_1(x, y) \\ b_1 \cdot u(x, y) - b_2 \cdot v(x, y) + i \cdot g_2(x, y) \end{pmatrix}, \tag{16}$$

где g_1 и g_2 обозначена комплексная часть функции $\phi(z)$, конкретный вид которой нам не интересен.

В силу (13) и условия $\phi(z) \in C(\overline{D})$ имеем: $f(z) \in C(\overline{D})$, $\psi(x,y) \in C(\overline{D})$. Поэтому вещественные функции p, u, v из (16) непрерывны на Γ.

Условие $\operatorname{Re}\phi\big|_\Gamma = 0$ в силу (16) равносильно следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно переменных $u(\xi)$ и $v(\xi)$, $\xi \in \Gamma$:

$$\begin{cases} a_1 \cdot u(\xi) - a_2 \cdot v(\xi) = -p(\xi)\,, \\ b_1 \cdot u(\xi) - b_2 \cdot v(\xi) = 0\,. \end{cases} \tag{17}$$

Определитель Δ системы (17) имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & -a_2 \\ b_1 & -b_2 \end{vmatrix} \neq 0\,,$$

так как по условию собственный вектор $\overline{y} = (a,b)$ не вещественный. Следовательно, система (17) имеет единственное решение $u = (b_2/\Delta)\cdot p = k \cdot p$, $v = (b_1/\Delta)\cdot p = m\cdot p$, *определенное на контуре* Γ. Итак,

$$\psi(\xi) = u + iv = (k+mi)\cdot p(\xi) = \frac{1}{2}\cdot(k+mi)\cdot[f(\xi) + \overline{f}(\xi)], \quad \xi \in \Gamma\,, \tag{18}$$

поскольку $p = \operatorname{Re} f(z) = (1/2)\cdot[f + \overline{f}]$.

С другой стороны, непосредственной подстановкой проверяется, что общее решение (15) имеет вид

$$\psi(x,y) = \frac{i}{2}\,\overline{z}\cdot f'_z(z) + F_1(z)\,, \tag{19}$$

где $F_1(z)$ – произвольная голоморфная в области D функция, и обозначено $\overline{z} = x - iy$.

Объединяя (18) и (19), имеем на Γ :

$$\frac{i}{2}\,\overline{z}\cdot f'(z) + F_1(z) = \frac{1}{2}\cdot(k+mi)\cdot[f+\overline{f}]\,,$$

то есть

$$\overline{z}\cdot f'(z) + l\cdot\overline{f}(z) + F(z)\big|_\Gamma = 0\,, \tag{20}$$

где

$$l = ki - m = \frac{b_2 i - b_1}{\Delta} \neq 0, \quad F(z) = l\cdot f(z) - 2iF_1(z)\,. \tag{21}$$

Итак, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть $\phi(z)$ — решение задачи* (2), *соответствующее матрице $J \in \mathbb{C}^{2\times 2}$. Тогда по ϕ можно построить голоморфные в D функции $f(z) \in C(\overline{D})$ и $F(z)$, для которых выполнено* (20).

«Привязка» матрицы J к уравнению (20) осуществляется комплексным числом l в (21).

Замечание 3. Несложно показать, что алгоритм построения формулы (20) обратим. Поэтому верно следующее утверждение: *пусть матрице J соответствует число l в* (21) *и пусть существуют голоморфные в области D функции $f(z) \in C(\overline{D})$ и $F(z)$, для* *которых верно (20). Тогда по ним можно построить решение ϕ задачи (2), соответствующее матрице J.*

6. Единственность для размерности $n = 2$. Имеет место

Теорема 4. *Пусть матрица $J = J_1 + J_2 i$, где $J_1, J_2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $\det J_2 \neq 0$. Матрица J имеет собственное число $\lambda = i$ кратности два, а ее собственный вектор не кратен вещественному. Тогда задача (2) для произвольного круга K имеет только тривиальные решения.*

□ Ограничимся рассмотрением единичного круга K. К случаю произвольного круга радиуса r можно затем перейти с помощью линейной подстановки $x' = rx+a,\ y' = ry+b$ в (1).

Пусть $\phi(z)$ — решение задачи (2) в K. Применим теорему 3, где Γ — единичная окружность. Разложим функции $f(z)$ и $\overline{f}(z)$ в ряд Тейлора в круге K :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k, \quad \overline{f}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \overline{a}_k \overline{z}^k, \quad z \in K .$$

По $\overline{f}(z)$ образуем функцию

$$\widetilde{f}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \overline{a}_k \frac{1}{z^k}, \tag{22}$$

которая будет голоморфна в $\mathbb{C} \setminus \overline{K}$, то есть вне замыкания круга K. При этом

$$\widetilde{f}(z)\big|_{\Gamma+} = \overline{f}(z)\big|_{\Gamma-}, \quad \overline{z}\big|_{\Gamma} = \frac{1}{z}\big|_{\Gamma}, \tag{23}$$

где $g\big|_{\Gamma+}$, $g\big|_{\Gamma-}$ — предельные значения функций снаружи и изнутри круга K соответственно.

С учетом (23) из формулы (20) следует равенство

$$\frac{1}{z} \cdot f'(z)\big|_{\Gamma-} + l \cdot \widetilde{f}(z)\big|_{\Gamma+} + F(z)\big|_{\Gamma-} = 0 . \tag{24}$$

Функция $\widetilde{f}(z)$ непрерывна в $\overline{\mathbb{C} \setminus K}$, так как $f(z) \in C(\overline{K})$ согласно теореме 3. Поэтому из (24) вытекает аналитическая продолжимость $\widetilde{f}(z)$ в некоторое внутреннее кольцо $K^- \subset K$ через окружность Γ [3]. Как известно, такое продолжение единственно. Поэтому в силу (24) в K^- можно положить

$$\widetilde{f}(z) = \frac{1}{l}\left(-\frac{1}{z} \cdot f'(z) - F(z)\right), \quad z \in K^- . \tag{25}$$

С другой стороны, функция $\widetilde{f}(z)$ разложима вне круга K в ряд Лорана (22). В силу единственности такого разложения ее аналитическое продолжение к кольцу $K^- \subset K$ тоже может быть представлено в виде (22). Остается заметить, что формулы (22) и (25) являются противоречивыми, если функция $f(z)$ отлична от линейной. Таким образом, $f(z) = a_0 + a_1 z$. Тогда (20) можно переписать в виде

$$\overline{z} \cdot a_1 + l(\overline{a}_0 + \overline{a}_1 \overline{z}) + F(z)\big|_\Gamma = 0\,. \tag{26}$$

Функция $\overline{z} \cdot a_1 + l\overline{a}_1\overline{z}$ в (26) является антиголоморфной ($\lambda = -i$). Как известно, она может совпадать с голоморфной $-F(z) - l\overline{a}_0$ на Γ только если обе эти функции постоянны. Следовательно в (26) $a_1 + l\overline{a}_1 = 0$. Поэтому $F(z) \equiv -l\overline{a}_0 = \text{const}$. Отсюда с учетом (13), (19) и (21) вытекает, что вектор-функция $\phi(z)$ будет линейной. Поэтому (2) для нее означает, что $\operatorname{Re}\phi \equiv 0$. Так как по условию $\det J_2 \neq 0$, то в силу теоремы 2 $\phi(z)$ не может быть непостоянной. Следовательно, $\phi(z) \equiv \text{const}$, что и требовалось. ■

Следствие. *Пусть матрица $J \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ имеет собственное число λ, $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ и собственный вектор, не кратный вещественному. Пусть $\omega_\lambda(z) = x + \lambda y$. Обозначим область $K_\lambda = \omega_\lambda(K)$. Тогда для матрицы J задача (2) в области K_λ имеет только тривиальные решения.*

□ Доказательство вытекает из формул (3), с помощью которых λ-голоморфная функция переводится в голоморфную с показателем $\lambda = i$. ■

Литература

1. Солдатов А.П. Функции, аналитические по Дуглису / Издательство НовГУ, 1995. – 196 с.
2. Солдатов А.П. Задача Шварца для функций, аналитических по Дуглису // Современная математика и ее приложения. – 2010. – 67. – С.97-100.
3. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной / М.: Наука, 2004. – 320 с.

UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF THE SCHWARZ PROBLEM IN SOME SPECIAL CASES

V.G. Nilkolaev

Bolshaya Sankt-Peterburgskaya, 41, Novgorod, 173003, Russia, e-mail: vg14@inbox.ru

Abstract. The study of solution uniqueness of the Schwarz homogeneous problem connected with vector-valued functions being analytic on Douglis is done. It is established the theorem of uniqueness for the certain type of matrixes of arbitrary dimension. It is found the class of matrixes for which the uniqueness is not present. In two-dimensional case, it is proved that the uniqueness of the solution takes place when the domain boundary is the circle.

Key words: vector-function, holomorphic function, partial derivative, area, closed contour, matrix, eigenvalue, eigenvector.