MSC 81P20

О ТЕОРЕМЕ ГЕЛЬМГОЛЬЦА ДЛЯ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ В СРЕДНЕМ КВАДРАТИЧНОМ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

Л.Т. Фат, Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. Теорема Гельмгольца о разложении векторного поля $A_i(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2, 3$ на сумму потенциального и соленоидального векторных полей обобщается на случай, когда поле $A_i(\mathbf{x})$ не стремится к нулю при $|\mathbf{x}| \to \infty$, а, наоборот, принадлежит пространству почти периодических в среднем квадратичном вектор-функций на $\mathbb{R}^3$, которое является пополнением линейного многообразия периодических функций на $\mathbb{R}^3$ в метрике, порождаемой скалярным произведением $\lim_{\Lambda \to \mathbb{R}^3} |\Lambda|^{-1} \int_\Lambda (\cdot, (\cdot)^*) d\mathbf{x}$.

Ключевые слова: потенциальное поле, соленоидальное поле, функции почти периодические в среднем квадратичном, теорема Гельмгольца.

1. Введение. В математической физике часто используется важное утверждение о векторных нолях, которое называют теоремой Гельмгольца. Оно состоит в том, векторное ноле $\mathbb{R}^3$ может быть представлено в виде суммы двух слагаемых – потенциального и соленоидального векторных нолей, причем, при некоторых дополнительных условиях такое представление векторного ноля однозначно (или, с точностью до постоянного вектора). Это утверждение, хотя и является довольно понятным с физической точки зрения, однако, при проявлении его точного математического смысла, оно оказывается стесненным ограничениями, которые носят, но видимому, технический характер. Во всяком случае, авторам неизвестен такой контрпример, когда гладкое векторное, заданное на $\mathbb{R}^3$, не обладало бы указанным свойством. Существенно также то, что для гладкого ноля, заданного в компактной области в $\mathbb{R}^3$, доказательство теоремы Гельмгольца очень просто и не требует дополнительных ограничений на поле $A_i(\mathbf{x})$, $i = 1, 2, 3$ для ее справедливости.

При распространении теоремы Гельмгольца на некомпактные области и, в частности, на все пространство $\mathbb{R}^3$ в литературе, обычно, используется такое математическое уточнение этого утверждения, при котором требуется, чтобы поле $A_i(\mathbf{x})$ достаточно быстро стремилось к нулю на бесконечности при $|\mathbf{x}| \to \infty$ [1, 2, 3]. Однако, для многих постановок задач математической физики, связанных с векторными полями на $\mathbb{R}^3$, это требование является сильно ограничительным, что обесценивает содержание теоремы Гельмгольца. В этом сообщении мы покажем, что утверждению теоремы Гельмгольца можно придать точный математический смысл для таких векторных полей на $\mathbb{R}^3$, которые составляют специальное гильбертово пространство (см., по этому поводу [4].), образованное пополнением линейного многообразия всевозможных периодических полей на $\mathbb{R}^3$. Мы называем их *векторные поля почти-периодические в среднем квадратичном.*

2. Теорема Гельмгольца. *Пусть* $A_i(\mathbf{x})$, $i = 1, 2, 3$ — *гладкое векторное поле на* $\mathbb{R}^3$. *Оно представимо в виде суммы двух полей*

$$A_i(\mathbf{x}) = B_i(\mathbf{x}) + \nabla_i \Phi(\mathbf{x}) \,, \quad i = 1, 2, 3 \,, \tag{1}$$

где $\nabla_i B_i(\mathbf{x}) = 0$.

Доказательство утверждения, составляющее содержание теоремы Гельмгольца, основано на однозначном определении потенциальной составляющей $\nabla_i \Phi$, $i = 1, 2, 3$ при каких-то дополнительных ограничениях на поле $A_i(\mathbf{x})$, $i = 1, 2, 3$. Из разложения (1) следует, что

$$f(\mathbf{x}) = \Delta \Phi(\mathbf{x}) \,, \tag{2}$$

где введено обозначение $f(\mathbf{x}) = (\nabla, \mathbf{A}(\mathbf{x}))$. Тогда потенциал $\Phi(\mathbf{x})$ может быть определен как решение этого уравнения, если таковое существует на всем $\mathbb{R}^3$.

При стандартном доказательстве теоремы Гельмгольца этот подход реализуется в случае, когда поле $A_i(\mathbf{x})$ достаточно быстро стремится к нулю при $|\mathbf{x}| \to \infty$ вместе со своими производными, то есть, когда $|f(\mathbf{x})| \to 0$. Это позволяет применить преобразование Фурье в $\mathbb{R}^3$ к обеим частям уравнения (2), определяя его для функций $f(\mathbf{x})$ и $\Phi(\mathbf{x})$,

$$\bar{f}(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int\limits_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{x}) \exp(-i(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{x})) d\mathbf{x} \,, \qquad \bar{\Phi}(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \Phi(\mathbf{x}) \exp(-i(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{x})) d\mathbf{x} \,,$$

$$\bar{f}(\boldsymbol{\kappa}) = -\boldsymbol{\kappa}^2 \bar{\Phi}(\boldsymbol{\kappa})$$

так, что при этом выполняется

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{|\bar{f}(\boldsymbol{\kappa})|}{|\boldsymbol{\kappa}|^2} d\boldsymbol{\kappa} < \infty \,. \tag{3}$$

Последнее позволяет применить обратное преобразование Фурье и восстановить однозначным образом потенциал $\Phi(\mathbf{x})$ в виде

$$\Phi(\mathbf{x}) = -\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\bar{f}(\boldsymbol{\kappa})}{|\boldsymbol{\kappa}|^2} \exp(i(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{x})) d\boldsymbol{\kappa} = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{f(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{y} \,, \tag{4}$$

причем скалярное поле $\Phi(\mathbf{x})$ является гладким и имеет место

$$\nabla \Phi(\mathbf{x}) = -i \int\limits_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{\kappa} \frac{\bar{f}(\boldsymbol{\kappa})}{|\boldsymbol{\kappa}|^2} \exp(i(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{x})) d\boldsymbol{\kappa} \,.$$

После этого, $B_i(\mathbf{x}) = A_i(\mathbf{x}) - \nabla_i \Phi(\mathbf{x})$ и $\nabla_i B_i(\mathbf{x}) = 0$ по построению. Ясно, что выполненное при таком подходе разбиение (1) можно видоизменять, добавляя к функции $\Phi(\mathbf{x})$, определяемой (4), произвольную гармоническую функцию $\Psi(\mathbf{x})$, $\Delta \Psi(\mathbf{x}) = 0$.

3. Почти-периодические в среднем квадратичном векторные поля. Введем пространства полей на $\mathbb{R}^3$ (скалярных и векторных), которые не стремятся к пулю при $|\mathbf{x}| \to \infty$, а, наоборот, ведут себя «квазипериодическим образом». Пространство скалярпых полей такого типа мы обозначим посредством $\overline{\mathbb{L}}_2(\mathbb{R}^3)$, соответственно, аналогичные векторные поля составляют пространство $\overline{\mathbb{L}}_2(\mathbb{R}^3) \times \overline{\mathbb{L}}_2(\mathbb{R}^3) \times \overline{\mathbb{L}}_2(\mathbb{R}^3)$. Элементы этих пространств мы будем называть, соответственно, скалярными и векторными нолями, почти-периодическими в среднем квадратичном.

Пусть комплекспозначпая функция $u(\mathbf{x})$ такова, что для нее существует пекомпланарный набор векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ такой, относительно которых она обладает свойством

$$u(\mathbf{x} + n_1\mathbf{e}_1 + n_2\mathbf{e}_2 + n_3\mathbf{e}_3) = u(\mathbf{x})\,, \qquad n_j \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, 2, 3\,. \tag{5}$$

Такую функцию мы будем называть 3-периодической с набором векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ – периодов этой функции.

На линейном многообразии $\mathbb{T}_3$ всех 3-периодических функций на $\mathbb{R}^3$ введем билинейный функционал

$$(u, v) = \lim_{\Lambda \to \mathbb{R}^3} \frac{1}{|\Lambda|} \int\limits_{\Lambda} u(\mathbf{x}) v^*(\mathbf{x}) d\mathbf{x}\,, \tag{6}$$

где Λ — произвольный расширяющийся набор самоподобных друг другу относительно некоторого центра в $\mathbb{R}^3$ параллелепипедов и $|\Lambda|$ – объемы этих параллелепипедов. Легко проверяется, что этот функционал представляет собой невырожденное скалярное произведение на $\mathbb{T}_3$.

Определение. *Пространство $\overline{\mathbb{L}}_2(\mathbb{R}^3)$ является пополнением линейного многообразия $\mathbb{T}_3$ всех 3-периодических иа $\mathbb{R}^3$ полей $u(\mathbf{x})$ в топологии, порождаемой скалярным произведением (6).*

Это пространство несепарабельно.

Для векторных комплекспозначпых нолей $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ на $\mathbb{R}^3$ определения свойства 3-периодичности и скалярного произведения па линейном многообразии $\mathbb{T}_3 \times \mathbb{T}_3 \times \mathbb{T}_3$ всех 3-периодических векторных нолей даются аналогичным образом,

$$\mathbf{U}(\mathbf{x} + n_1\mathbf{e}_1 + n_2\mathbf{e}_2 + n_3\mathbf{e}_3) = \mathbf{U}(\mathbf{x})\,, \qquad n_j \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, 2, 3\,; \tag{7}$$

$$(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \lim_{\Lambda \to \mathbb{R}^3} \frac{1}{|\Lambda|} \int\limits_{\Lambda} U_i(\mathbf{x}) V_i^*(\mathbf{x}) d\mathbf{x}\,. \tag{8}$$

В соответствии с данными определениями и базовыми утверждениями теории гильбертова пространства [4], любая комплекспозначпая функция $u(\mathbf{x})$ из $\overline{\mathbb{L}}_2(\mathbb{R}^3)$ представима в виде разложения но набору взаимпоортогональпых относительно скалярного произведения (6) функций $\exp(i(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{x}))$, $\boldsymbol{\kappa} \in \mathfrak{K}(u)$,

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{\boldsymbol{\kappa} \in \mathfrak{K}(u)} \bar{u}(\boldsymbol{\kappa}) \exp(i(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{x}))\,, \tag{9}$$

в котором суммирование ведется по не более чем счетному набору векторов $\mathfrak{K}(u)$, определяемому функцией $u(\mathbf{x})$. При этом коэффициенты ряда

$$\bar{u}(\boldsymbol{\kappa}) = \lim_{\Lambda \to \mathbb{R}^3} \frac{1}{|\Lambda|} \int\limits_{\Lambda} u(\mathbf{x}) \exp(-i(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{x})) d\mathbf{x} \tag{10}$$

удовлетворяют условию

$$\sum_{\boldsymbol{\kappa} \in \mathfrak{K}(u)} |\bar{u}(\boldsymbol{\kappa})|^2 < \infty \,. \tag{11}$$

Существенно, что коэффициенты $\bar{u}(\boldsymbol{\kappa})$ не равны нулю только лишь для векторов $\boldsymbol{\kappa}$ из набора $\mathfrak{K}(u)$ [4].

Ряд (9) сходится в смысле метрики пространства $\bar{\mathbb{L}}_2(\mathbb{R}^3)$, порождаемой скалярным произведением (6). Наоборот, если функция $u(\mathbf{x})$ определяется рядом (9), в котором коэффициенты удовлетворяют условию (11), то она принадлежит пространству $\bar{\mathbb{L}}_2(\mathbb{R}^3)$.

Аналогично, любое векторное поле $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ из $\bar{\mathbb{L}}_2(\mathbb{R}^3) \times \bar{\mathbb{L}}_2(\mathbb{R}^3) \times \bar{\mathbb{L}}_2(\mathbb{R}^3)$ представимо в виде сходящегося в метрике этого пространства ряда

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \sum_{\boldsymbol{\kappa} \in \mathfrak{K}(\mathbf{U})} \bar{\mathbf{U}}(\boldsymbol{\kappa}) \exp(i(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{x})) \tag{12}$$

с квадратично суммируемым по набору векторов $\mathfrak{K}(\mathbf{U})$ рядом коэффициентов – компексноэначных вектор-функций

$$\bar{\mathbf{U}}(\boldsymbol{\kappa}) = \lim_{\Lambda \to \mathbb{R}^3} \frac{1}{|\Lambda|} \int\limits_{\Lambda} \mathbf{U}(\mathbf{x}) \exp(-i(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{x})) d\mathbf{x} \,, \qquad \sum_{\boldsymbol{\kappa} \in \mathfrak{K}(\mathbf{U})} |\bar{\mathbf{U}}(\boldsymbol{\kappa})|^2 < \infty \,. \tag{13}$$

4. Теорема Гельмгольца в $[\bar{\mathbb{L}}_2(\mathbb{R}^3)]^3$. Покажем, что утверждение теоремы Гельмгольца справедливо для векторных полей из пространства $[\bar{\mathbb{L}}_2(\mathbb{R}^3)]^3$. Пусть поле $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ – гладкое и принадлежит $[\bar{\mathbb{L}}_2(\mathbb{R}^3)]^3$ вместе со своими частными производными. В частности, это означает, что имеет место

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{\boldsymbol{\kappa} \in \mathfrak{K}(\mathbf{A})} \bar{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\kappa}) \exp(i(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{x})) \,,$$

где коэффициенты

$$\bar{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\kappa}) = \lim_{\Lambda \to \mathbb{R}^3} \frac{1}{|\Lambda|} \int\limits_{\Lambda} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \exp(-i(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{x})) d\mathbf{x}$$

обладают свойством

$$\sum_{\boldsymbol{\kappa} \in \mathfrak{K}(\mathbf{A})} |\bar{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\kappa})|^2 < \infty \,.$$

Кроме того, их этого предположения следует, что $(\nabla, \mathbf{A}(\mathbf{x})) \in \bar{\mathbb{L}}_2(\mathbb{R}^3)$. Следовательно, справедливо разложение

$$f(\mathbf{x}) = (\nabla, \mathbf{A}(\mathbf{x})) = \sum_{\boldsymbol{\kappa} \in \mathfrak{K}(\mathbf{A})} (\boldsymbol{k}, \bar{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\kappa})) \exp(i(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{x})) \tag{14}$$

такое, что коэффициент ряда равен нулю при $\boldsymbol{k} = 0$ и

$$\sum_{\boldsymbol{\kappa}\in\mathfrak{K}(\mathbf{A})} |(\boldsymbol{k}, \bar{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\kappa}))|^2 < \infty\,.$$

Будем искать теперь компоненты разложения (1) поля $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ в пространстве $[\bar{\mathbb{L}}_2(\mathbb{R}^3)]^3$. Тогда представим искомый потенциал $\Phi(\mathbf{x})$ в виде ряда

$$\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{\boldsymbol{\kappa}\in\mathfrak{K}(\Phi)} \bar{\Phi}(\boldsymbol{\kappa}) \exp(i(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{x}))\,, \tag{15}$$

в котором коэффициенты $\bar{\Phi}(\boldsymbol{\kappa})$ обладают свойством

$$\sum_{\boldsymbol{\kappa}\in\mathfrak{K}(\Phi)} \boldsymbol{\kappa}^2 |\bar{\Phi}(\boldsymbol{\kappa})|^2 < \infty\,. \tag{16}$$

Подстановка разложения (15) в уравнение $\Delta\Phi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ и сравнение полученного выражения с разложением (14) дает

$$\bar{\Phi}(\boldsymbol{\kappa}) = -\frac{(\boldsymbol{\kappa}, \bar{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\kappa}))}{\boldsymbol{\kappa}^2}\,,$$

так как коэффициент разложения при $\boldsymbol{\kappa} = 0$ по построению равен нулю. Таким образом, в пространстве $\bar{\mathbb{L}}_2(\mathbb{R}^3)$ уравнение $\Delta\Phi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ однозначно разрешимо и при этом векторное поле

$$\nabla\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{\boldsymbol{\kappa}\in\mathfrak{K}(\Phi)} \boldsymbol{\kappa}\bar{\Phi}(\boldsymbol{\kappa}) \exp(i(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{x}))\,,$$

ввиду (16), принадлежит пространству $[\bar{\mathbb{L}}_2(\mathbb{R}^3)]^3$.

Заметим теперь к полю $\nabla\Phi(\mathbf{x})$ можно добавить постоянный вектор (слагаемое с $\boldsymbol{\kappa} = 0$), что не изменит его потенциальности и при этом результирующее поле снова содержится в $[\bar{\mathbb{L}}_2(\mathbb{R}^3)]^3$.

После определения потенциала $\Phi(\mathbf{x})$ определим поле

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) - \nabla\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{\boldsymbol{\kappa}\in\mathfrak{K}(\Phi)} \left(\bar{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\kappa}) - \boldsymbol{\kappa}\bar{\Phi}(\boldsymbol{\kappa})\right) \exp(i(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{x}))\,,$$

которое, по построению, является соленоидальным. Изменение поля $\nabla\Phi(\mathbf{x})$ на постоянный вектор оставляет поле $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ быть соленоидальным. Таким образом, мы убедились в справедливости следующего утверждения.

Теорема. *Если векторное поле $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ гладкое вместе со своими частными производными и принадлежит пространству $[\bar{\mathbb{L}}_2(\mathbb{R}^3)]^3$, то оно представимо однозначным образом в виде суммы $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) + \mathbf{C}(\mathbf{x})$ с точностью до постоянного слагаемого, составляющие которой принадлежат пространству $[\bar{\mathbb{L}}_2(\mathbb{R}^3)]^3$ и поле $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ соленоидальное, а поле $\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \nabla\Phi(\mathbf{x})$ потенциальное.*

Литература

1. Кочин Н.Е. — Векторное исчисление и начала тензорного анализа / М.: Наука, 1965. – 428 с.
2. Корн Г.А., Корн Т.М. Справочник по математике для научных работников и инженеров / М.: «Наука», 1981. – 720 с.
3. Ли Цзун Дао Математические методы в физике /пер. с англ./ М.: Мир, 1965. – (Lee T.D. Mathematical methods of physics / New York: Columbia university, 1963. – 296 c.)
4. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве / М.: Наука, Физматлит, 1966. – 544 с.

ON HELMHOLTZ's THEOREM OF AVERAGE QUADRATICALLY ALMOST-PERIODIC VECTOR FIELDS

Lam Tan Phat, Yu.P. Virchenko

Belgorod State University,
Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail:virch@bsu.edu.ru

Abstract. The Helmholtz theorem concerned to the decomposition of vector field $A_i(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2, 3$ on the sum potential field and solenoidal one is generalized in the case when the field $A_i(\mathbf{x})$ does not tend to zero at $|\mathbf{x}| \to \infty$, but, conversely, it belongs to the space of quadratically averaged almost periodic vector functions on $\mathbb{R}^3$. The space is the completion of the linear manifold of all periodic functions on $\mathbb{R}^3$ according to the metrics generated by scalar composition $\lim_{\Lambda \to \mathbb{R}^3} |\Lambda|^{-1} \int_\Lambda (\cdot, (\cdot)^*) d\mathbf{x}$.

Key words: potential field, solenoidal field, quadratically average almost periodic functions, Helmholtz's theorem.