Прикладная математика & Физика, 2023, том 55, № 1. С. 39–48.
Applied Mathematics & Physics, 2023, Volume 55, No 1. P. 39–48.

УДК 517.3 DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-1-39-48
MSC 31B15; 47G10; 44A15; 46E30
оригинальное исследование

ОБ ОБОБЩЕННЫХ ПОТЕНЦИАЛАХ БЕССЕЛЯ В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ЛЕБЕГА

А. Л. Джабраилов

(*Статья представлена членом редакционной коллегии Э. Л. Шишкиной*)

Чеченский государственный университет им. А. А. Кадырова,
Грозный, 364024, Россия

E-mail: ahmed_0065@mail.ru

Аннотация. В статье рассматривается оператор типа свертки, представленный обобщенным потенциалом Бесселя. Изучается действие обобщенного потенциала Бесселя в специальном лебеговом классе функций со степенным весом. Доказана теорема об ограниченности обобщенного потенциала Бесселя в весовом классе Лебега. Также показано, что обобщенный потенциал Бесселя в весовом лебеговом классе функций является оператором слабого типа в смысле нормы, построенной при помощи весовой функции распределения. Эти результаты являются распространением теории Харди – Литтлвуда – Соболева о дробном интегрировании на случай обобщенного потенциала Бесселя.

Ключевые слова: обобщенный потенциал Бесселя, ограниченность оператора, оператор слабого типа

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ по гос.заданию FEGS-2020-0001.

Для цитирования: Джабраилов А. Л. 2023. Об обобщенных потенциалах Бесселя в весовом пространстве Лебега. Прикладная математика & Физика, 55(1): 39–48. DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-1-39-48

Original Research

ON GENERALISED BESSEL POTENTIALS IN WEIGHTED LEBESGUE SPACE

Akhmed Dzhabrailov

(*Article submitted by a member of the editorial board E. L. Shishkina*)

Kadyrov Chechen State University,
Grozny, 36402, Russia

E-mail: ahmed_0065@mail.ru

Abstract. The article considers the convolution type operator represented by the generalized Bessel potential. The action of the generalized Bessel potential in a special Lebesgue class of functions with power weight is studied. A theorem on the boundedness of the generalized Bessel potential in the weighed Lebesgue class is proved. It is also shown that the generalized Bessel potential in the weighted Lebesgue class of functions is a weak type operator in the sense of a norm constructed using a weighted distribution function. These results are an extension of the Hardy – Littlewood – Sobolev theory of fractional integration to the case of a generalized Bessel potential.

Keywords: Generalized Bessel Potential, Bounded Operator, Operator of Weak Type

Acknowledgements: The work is supported of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation on a state assignment FEGS-2020-0001.

For citation: Dzhabrailov Akhmed. 2023. On generalised Bessel potentials in weighted Lebesgue space. Applied Mathematics & Physics, 55(1): 39–48 (in Russian). DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-1-39-48

1. Введение. Дробные степени многомерных дифференциальных операторов находят широкое применение при решении аналитических задач в евклидовых пространствах, неоднородных уравнениях и при исследовании граничных значений функций из различных функциональных пространств. Дробные отрицательные степени многомерных дифференциальных операторов называются потенциалами. Они принимают существенное участие и в ряде вероятностных задач, в частности в марковских процессах.

Наиболее изученной является дробная степень оператора Лапласа $(-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}}$, $\alpha > 0$, называемая потенциалом Рисса (см. [20]). Однако, операторы $(-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}}$ демонстрируют рост своего ядра на бесконечности при значениях α, больших размерности пространства. Поэтому в теориях, где важно поведение оператора на бесконечности, предпочтение отдается дробным степеням оператора $(I-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}}$, $\alpha > 0$, где I —

тождественный оператор. Операторы $(I-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}}$, $\alpha>0$ называются потенциалами Бесселя. Потенциалы Бесселя благодаря своим хорошим аналитическим свойствам оказываются более удобными, а значит, и предпочтительными при построении классов дробной гладкости, кроме того, они принимают существенное участие и в ряде вероятностных задач, в частности в марковских процессах. Подробное изложение теории потенциала Бесселя в конечномерных пространствах содержится в [12]. Для аналитических целей они введены и изучены в [21].

В этой статье изучается обобщение оператора $(I-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}}$, $\alpha>0$ на случай, когда вместо Δ рассматривается оператор Лапласа – Бесселя $\Delta_\gamma=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}+\frac{\gamma}{x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}\right)$, $\gamma_i>0$, $i=1,\dots,n$. Оператор $(I-\Delta_\gamma)^{-\frac{\alpha}{2}}$, $\alpha>0$ носит название «обобщенный потенциал Бесселя» [13, 2, 3]. Наша задача в этой статье – описать действие оператора $(I-\Delta_\gamma)^{-\frac{\alpha}{2}}$, $\alpha>0$ в специальном лебеговом классе функций со степенным весом, докажем его ограниченность в таком классе функций и покажем, что он является оператором слабого типа в смысле нормы, построенной при помощи весовой функции распределения.

2. Обобщенный потенциал Бесселя. Рассмотрим многомерное преобразование Ханкеля функции f вида

$$\mathbf{F}_\gamma[f](\xi)=\mathbf{F}_\gamma[f(x)](\xi)=\widehat{f}(\xi)=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}f(x)\,\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)x^\gamma dx,\qquad x\in\mathbb{R}^n,\qquad x^\gamma=\prod_{i=1}^{n}x_i^{\gamma_i},$$

где $\gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_n)$ – мультииндекс, составленный из положительных фиксированных вещественных чисел $\gamma_i\geq 0$, $i=1,\dots,n$, $\mathbb{R}^n_+=\{x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \ x_1>0,\dots,x_n>0\}$,

$$\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)=\prod_{i=1}^{n}j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(x_i\xi_i),\qquad \mathbf{j}_\gamma(0,\xi)=1,$$

а j_ν задается формулой (см. [4], стр. 10 и [5])

$$j_\nu(x)=\frac{2^\nu\Gamma(\nu+1)}{x^\nu}\,J_\nu(x), \tag{1}$$

J_ν — функция Бесселя первого рода. Функция j_ν называется нормированной функцией Бесселя первого рода, поскольку $j_\nu(0)=1$.

Формула обращения $\mathbf{F}_\gamma$ имеет вид

$$\mathbf{F}^{-1}_\gamma[\widehat{f}(\xi)](x)=f(x)=\frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)\widehat{f}(\xi)\xi^\gamma\,d\xi,$$

где $|\gamma|=\gamma_1+\ldots+\gamma_n$.

В этой работе мы будем рассматривать дифференциальный сингулярный оператор Бесселя, обозначаемый B_γ (см. [4], стр. 5):

$$(B_\gamma)_t=\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\gamma}{t}\frac{\partial}{\partial t}=\frac{1}{t^\gamma}\frac{\partial}{\partial t}t^\gamma\frac{\partial}{\partial t},\qquad t>0,\qquad \gamma\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Пусть

$$\Delta_\gamma=(\Delta_\gamma)_x=\sum_{k=1}^{n}(B_{\gamma_k})_{x_k}, \tag{3}$$

а $f=f(x)$ — достаточно гладкая функция, достаточно быстро убывающая на бесконечности и такая, что все существующие производные от нее нечетного порядка обращаются в нуль при $x=0$, тогда преобразование Ханкеля от примененного к ней оператора $-\Delta_\gamma$ есть [11]

$$\mathbf{F}_\gamma[-\Delta_\gamma f](\xi)=|\xi|^2\mathbf{F}_\gamma[f](\xi).$$

Таким образом, чтобы определить (хотя бы формально) дробную степень оператора $-\Delta_\gamma$, нужно записать равенство

$$(-\Delta_\gamma)^{\frac{\alpha}{2}}f=\mathbf{F}^{-1}_\gamma(|\xi|^\alpha\mathbf{F}_\gamma[f](\xi)).$$

Особое значение имеют отрицательные степени α в диапазоне $-(n+|\gamma|)<\alpha<0$. Отрицательная степень оператора $-\Delta_\gamma$ вида $(-\Delta_\gamma)^{-\frac{\alpha}{2}}$, $\alpha>0$ называется B-потенциалом Рисса. Такой потенциал имеет ядро вида $|x|^{\alpha-n-\gamma|}$. B-потенциал Рисса изучен Л. Н. Ляховым [6, 7, 8], В. С. Гулиевым и др. в [17, 18].

Пусть $|\gamma|=\gamma_1+\ldots+\gamma_n$. Ядро $|x|^{\alpha-n-\gamma|}$ при $\alpha>n+|\gamma|$ растет на бесконечности. Можно скорректировать B-потенциалы Рисса таким образом, чтобы сохранить их поведение вблизи нуля, но добавить экспоненциальное затухание на бесконечности. Простейший способ добиться этого заключается в том, чтобы заменить оператор $-\Delta_\gamma$ на оператор $I-\Delta_\gamma$, где I — тождественный оператор, и рассмотреть дробную степень оператора $(I-\Delta_\gamma)^{-\alpha/2}$, $\alpha>0$. При помощи преобразования Ханкеля дробная степень $(I-\Delta_\gamma)^{-\alpha/2}$ сводится к умножению на степень $(1+|\xi|^2)^{-\alpha/2}$. А именно, дробную степень $(I-\Delta_\gamma)^{-\alpha/2}$ можно записать в виде:

$$(I-\Delta_\gamma)^{-\frac{\alpha}{2}}f=\mathbf{F}_\gamma^{-1}((1+|\xi|^2)^{-\frac{\alpha}{2}}\mathbf{F}_\gamma[f](\xi)).$$

Кроме того, дробная степень $(I-\Delta_\gamma)^{-\alpha/2}$ может быть записана как обобщенная свертка прообраза преобразования Ханкеля функции $(1+|x|^2)^{-\alpha/2}$ и некоторой функции.

Обобщенная свертка, подходящая для работы с оператором и Δ_γ имеет вид

$$(f*g)_\gamma(x)=(f*g)_\gamma=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}f(y)({}^\gamma\mathbf{T}^y_x g)(x)y^\gamma\,dy, \tag{4}$$

где ${}^\gamma\mathbf{T}^y_x$ — многомерный обобщенный сдвиг вида

$$({}^\gamma\mathbf{T}^y_x f)(x)={}^\gamma\mathbf{T}^y_x f(x)=({}^{\gamma_1}T^{y_1}_{x_1}\ldots{}^{\gamma_n}T^{y_n}_{x_n}f)(x), \tag{5}$$

где ${}^{\gamma_i}T^{y_i}_{x_i}$ – одномерный обобщенный сдвиг – для i=1, . . ., n действует по формуле (см. [5])

$$({}^{\gamma_i}T^{y_i}_{x_i}f)(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)}$$

$$\times\int\limits_0^\pi f(x_1,\ldots,x_{i-1},\sqrt{x_i^2+y_i^2-2x_iy_i\cos\varphi_i},x_{i+1},\ldots,x_n)\ \sin^{\gamma_i-1}\varphi_i\,d\varphi_i,\qquad \gamma_i>0.$$

Для $\gamma_i=0$ обобщенный сдвиг ${}^{\gamma_i}T^{y_i}_{x_i}$ имеет вид

$${}^0T^{y_i}_{x_i}=\frac{f(x+y)-f(x-y)}{2}.$$

Пусть функция $K_\alpha(x)$ — это модифицированная функция Бесселя второго рода (см. [16, 22]). Используя (4), определим $(I-\Delta_\gamma)^{-\alpha/2}$ при $\alpha>0$ соотношением

$$(\mathbf{G}^\alpha_\gamma\varphi)(x)=(G^\gamma_\alpha(x)*\varphi(x))_\gamma=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}G^\gamma_\alpha(y)({}^\gamma\mathbf{T}^y_x\varphi(x))y^\gamma dy, \tag{6}$$

где

$$G^\gamma_\alpha(x)=\frac{2^{\frac{n-|\gamma|-\alpha}{2}+1}}{|x|^{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\prod\limits_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}K_{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}(|x|) \tag{7}$$

есть обобщенное ядро типа Бесселя. Оператор (6) будем называть *обобщенным потенциалом Бесселя*. Его также можем записать

$$(\mathbf{G}^\alpha_\gamma\varphi)(x)=\frac{2^{\frac{n-|\gamma|-\alpha}{2}+1}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\prod\limits_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}|y|^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}K_{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}(|y|)({}^\gamma\mathbf{T}^y_x\varphi(x))y^\gamma dy. \tag{8}$$

Обращение оператора (8) построено в [13]. Представление интеграла (8) в простом виде при помощи ядра Гаусса – Вейерштрасса было получено в [2]. Нормы на основе весовых интегралов Дирихле в пространстве обобщенных бесселевых потенциалов были введены в работе [3]. Свойства (8) и его приложение к решению уравнения Пуассона были рассмотрены в [15]. Пространство обобщенных потенциалов Бесселя $\mathbf{B}^\alpha_\gamma$ с использованием подхода Стейна – Лизоркина было сконструировано Л. Н. Ляховым и М. В. Половинкиной с использованием преобразования Ханкеля в [10]. В [10] введенные ранее Л. Н. Ляховым в [6, 7] B-гиперсингулярные интегралы и B-потенциалы Рисса были применены для построения нормы в $\mathbf{B}^\alpha_\gamma$.

3. Теорема об ограниченности обобщенного потенциала Бесселя в весовом лебеговом классе функций.

Пусть $L^\gamma_p(\mathbb{R}^n_+)=L^\gamma_p$, $1\le p<\infty$ — пространство всех измеримых на $\mathbb{R}^n_+$ функций, четных по каждой из переменных x_i, $i=1,\ldots,n$, таких, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}|f(x)|^p x^\gamma dx<\infty,\qquad x^\gamma=\prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}.$$

Норма в L_p^γ функции f для вещественных чисел $p \geq 1$ определяется равенством

$$||f||_{L_p^\gamma(\mathbb{R}_+^n)} = ||f||_{p,\gamma} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} |f(x)|^p x^\gamma dx \right)^{1/p}.$$

Известно (см. [4]), что L_p^γ — банахово пространство.

Для обобщенной свертки (4) известно неравенство Юнга. Пусть $p, q, r \in [1, \infty]$ и

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}. \tag{9}$$

Обобщенная свертка $(f * g)_\gamma$ ограничена почти всюду при $f \in L_p^\gamma$, $g \in L_q^\gamma$. Кроме того, справедливо неравенство (неравенство Юнга)

$$||(f * g)_\gamma||_{r,\gamma} \leq ||f||_{p,\gamma}||g||_{q,\gamma}. \tag{10}$$

Если $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то

$$||(f * g)_\gamma||_{\infty,\gamma} \leq ||f||_{p,\gamma}|||g||_{q,\gamma}. \tag{11}$$

Пусть $\Omega^+ \subset \overline{\mathbb{R}_+^n}$ — указанная выше частично замкнутая область и пусть $\mathrm{mes}_\gamma(\Omega^+)$ — *весовая мера* множества Ω^+ вида

$$\mathrm{mes}_\gamma(\Omega) = \int\limits_\Omega x^\gamma dx.$$

Для любой измеримой функции $f(x)$, определенной на $\mathbb{R}_n^+$, введем обозначение

$$\mu_\gamma(f, t) = \mathrm{mes}_\gamma\{x \in \mathbb{R}_n^+ : |f(x)| > t\} = \int\limits_{\{x:\, |f(x)|>t\}^+} x^\gamma dx\,.$$

Функцию $\mu_\gamma = \mu_\gamma(f, t)$ будем называть *весовой функцией распределения* $|f(x)|$ (см. [9], с. 51). Очевидно, что это убывающая функция.

Пусть $\varphi \in L_1^\gamma(\mathbb{R}_+^n)$. Весовая функция распределения

$$\mu_\gamma(\mathrm{G}_\gamma^\alpha \varphi, t) = \mathrm{mes}_\gamma\{x \in \mathbb{R}_+^n : |(\mathrm{G}_\gamma^\alpha \varphi)(x)| > t\}$$

характеризует поведение обобщенного потенциала Бесселя.

Обозначим через $sL_p^\gamma(\mathbb{R}_n^+) = sL_p^\gamma$ совокупность всех функций, четных по каждой из переменных $x_1, ..., x_n$, для которых конечна норма

$$||f||_{sL_p^\gamma(\mathbb{R}_n^+)} = \sup_{0<t<\infty} t(\mu_\gamma(f, t))^{1/p}, \qquad 1 \leq p < \infty.$$

Оператор A, действующий из одного функционального пространства в другое, называется *квазилинейным* (см. [1], стр. 41), если область его определения вместе с каждыми двумя функциями f_1, f_2 содержит и их сумму $f_1 + f_2$ и выполнено неравенство

$$|A(f_1 + f_2)| \leq \kappa(|Af_1| + |Af_2|),$$

где κ — постоянная, не зависящая от f_1 и f_2. Если $\kappa = 1$, то оператор A называется *сублинейным.*

Квазилинейный оператор A имеет *сильный тип* $(p, q)_\gamma$, если он определен на $L_p^\gamma(\mathbb{R}_n^+)$, имеет значения из $L_q^\gamma(\mathbb{R}_+^n)$ и выполняется неравенство

$$||Af||_{q,\gamma} \leq K||f||_{p,\gamma}, \quad \forall f \in L_p^\gamma \tag{12}$$

с постоянной K, не зависящей от f.

Если вместо (12) выполняется более слабое неравенство

$$||Af||_{sL_q^\gamma(\mathbb{R}_+^n)} \leq K||f||_{p,\gamma}, \quad \forall f \in L_p^\gamma(\mathbb{R}_+^n),$$

то оператор A будем называть оператором *слабого типа* $(p, q)_\gamma$. Наименьшее значение из множества таких K назовем *слабой* $(p, q)_\gamma$*-нормой* оператора A.

Теорема 2.1.

(1) Для всех $\alpha > 0$ оператор G_γ^α отображает $L_p^\gamma(\mathbb{R}_+^n)$ в себя с нормой $|| \cdot ||_{1,\gamma}$.

(2) *Для всякой функции* $\varphi \in L_p^{\gamma}(\mathbb{R}_+^n)$, $1 < p < q < \infty$, *где* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n+|\gamma|}$, $0 < \alpha < n + |\gamma|$ *существует константа* $C = C(n, \gamma, \alpha, p) < \infty$, *такая, что*

$$||\mathrm{G}_{\gamma}^{\alpha}\varphi||_{q,\gamma} \leq C||\varphi||_{p,\gamma}.$$

(3) *Если* $\varphi \in L_1^{\gamma}(\mathbb{R}_+^n)$, *то*

$$\mu_{\gamma}(\mathrm{G}_{\gamma}^{\alpha}\varphi, \beta) \leq A_{n,\gamma,\alpha}\left(\frac{||\varphi||_{1,\gamma}}{\beta}\right)^q, \tag{13}$$

для всех $\beta > 0$. *Другими словами, отображение* $\varphi \to \mathrm{G}_{\gamma}^{\alpha}\varphi$ *имеет слабый* $(1, q)_{\gamma}$ *тип при* $\frac{1}{q} = 1 - \frac{\alpha}{n+|\gamma|}$.

Доказательство.

(1) Применяя неравенство (10), получим

$$||\mathrm{G}_{\gamma}^{\alpha}\varphi||_{r,\gamma} = ||(G_{\alpha}^{\gamma}(x) * \varphi(x))_{\gamma}||_{r,\gamma} \leq ||G_{\alpha}^{\gamma}(x)||_{1,\gamma} \cdot ||\varphi(x)||_{r,\gamma}. \tag{14}$$

Имеем

$$||G_{\alpha}^{\gamma}(x)||_{1,\gamma} = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} |G_{\alpha}^{\gamma}(x)|x^{\gamma}dx = \frac{2^{\frac{n-|\gamma|-\alpha}{2}+1}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} |x|^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}} K_{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}(|x|)x^{\gamma}dx = \{x = r\theta\} =$$

$$= \frac{2^{\frac{n-|\gamma|-\alpha}{2}+1}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\int\limits_0^{\infty} r^{\frac{\alpha+n+|\gamma|}{2}-1} K_{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}(r)dr \int\limits_{S_1^+(n)} \theta^{\gamma}dS.$$

Справедлива следующая формула (см. [11], формула 2.174)

$$|S_1^+(n)|_{\gamma} = \int\limits_{S_1^+(n)} x^{\gamma}dS = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}, \tag{15}$$

следовательно,

$$||G_{\alpha}^{\gamma}(x)||_{1,\gamma} = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)} \frac{2^{\frac{n-|\gamma|-\alpha}{2}+1}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\int\limits_0^{\infty} r^{\frac{\alpha+n+|\gamma|}{2}-1} K_{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}(r)dr.$$

Применяя формулу 2.16.2.2 из [19], получим

$$||G_{\alpha}^{\gamma}(x)||_{1,\gamma} = \frac{2^{2-\frac{n+|\gamma|+\alpha}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\int\limits_0^{\infty} r^{\frac{\alpha+n+|\gamma|}{2}-1} K_{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}(r)dr = 1.$$

Тогда из последнего равенства и (14) получаем утверждение (1).

(2) Пусть $\varphi \in L_p^{\gamma}(\mathbb{R}_+^n)$, $1 < p < q < \infty$, где $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n+|\gamma|}$, $0 < \alpha < n + |\gamma|$. В частном случае $0 < \alpha < \frac{n+|\gamma|}{p} \leq n + |\gamma|$ из (7), из поведения модифицированной функции Бесселя второго рода при малых значениях аргумента $0 < |x| \ll \sqrt{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2} + 1}$ вида (см. [22])

$$K_{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}(|x|) \sim \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}\right)}{2^{1-\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}}|x|^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}, & \text{при } 0 < \alpha < n + |\gamma|; \\ -\ln\left(\frac{|x|}{2}\right) - \vartheta, & \text{при } \alpha = n + |\gamma|; \\ \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}\right)}{2^{1-\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}}|x|^{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}, & \text{при } n + |\gamma| < \alpha \end{cases}$$

и из поведения модифицированной функции Бесселя второго рода при больших значениях аргумента $|x| \to +\infty$ вида (см. [22])

$$K_{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}(|x|) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2|x|}}e^{-|x|},$$

получим, что ядро $G^\gamma_\alpha(x)$ оператора $\mathbf{G}^\alpha_\gamma$ удовлетворяет условию

$$G^\gamma_\alpha(x) \sim C_1 \begin{cases} |x|^{\alpha-n-|\gamma|}, & \text{при } |x| \le 2; \\ e^{-\frac{|x|}{2}}, & \text{при } |x| \ge 2. \end{cases}$$

Тогда запишем

$$(\mathbf{G}^\alpha_\gamma \varphi)(x) = \int\limits_{\{y\in\mathbb{R}^n_+, |y|\le 2\}} G^\gamma_\alpha(y)(\,{}^\gamma\mathbf{T}^y_x\varphi(x))y^\gamma dy + \int\limits_{\{y\in\mathbb{R}^n_+, |y|>2\}} G^\gamma_\alpha(y)(\,{}^\gamma\mathbf{T}^y_x\varphi(x))y^\gamma dy \le$$

$$\le C_1\left(\int\limits_{\{y\in\mathbb{R}^n_+, |y|\le 2\}} |y|^{\alpha-n-|\gamma|}|\,{}^\gamma\mathbf{T}^y_x\varphi(x)|y^\gamma dy + \int\limits_{\{y\in\mathbb{R}^n_+, |y|>2\}} e^{-\frac{|y|}{2}}|\,{}^\gamma\mathbf{T}^y_x\varphi(x)|y^\gamma dy\right) \le$$

$$\le C_1\left(|(U^\alpha_\gamma\varphi)(x)| + \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} e^{-\frac{|y|}{2}}|\,{}^\gamma\mathbf{T}^y_x\varphi(x)|y^\gamma dy\right), \tag{16}$$

где $(U^\alpha_\gamma\varphi)(x)$ — B-потенциал Рисса, для которого справедливо утверждение из [6]. А именно, при $0<\alpha<\frac{n+|\gamma|}{p}$ и $\varphi \in L^\gamma_p$ имеем $||U^\alpha_\gamma\varphi||_{q,\gamma} \le ||\varphi||_{p,\gamma}$, где $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n+|\gamma|}$. Для второго интеграла по неравенству (10) и в силу неравенства для обобщенного сдвига из [5], получим

$$\left\| \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} e^{-\frac{|y|}{2}}|(\,{}^\gamma\mathbf{T}^y_x\varphi(x))|y^\gamma dy \right\|_{q,\gamma} \le ||\,{}^\gamma\mathbf{T}^y_x\varphi(x)||_{p,\gamma}||e^{-\frac{|x|}{2}}||_{\frac{n+|\gamma|}{n+|\gamma|-\alpha},\gamma} \le C_2||\varphi||_{p,\gamma}.$$

Таким образом,

$$||\mathbf{G}^\alpha_\gamma\varphi||_{q,\gamma} \le C||\varphi||_{p,\gamma}.$$

(3) Возьмем $0<\delta<1$. Рассмотрим операторы

$$(\mathcal{U}^\alpha_{+,\gamma,\delta}\varphi)(x) = \int\limits_{\{y\in\mathbb{R}^n_+, |y|\le\delta\}} |y|^{\alpha-n-|\gamma|}(\,{}^\gamma\mathbf{T}^y_x\varphi)(y)\, y^\gamma dy,$$

$$(\mathcal{U}^\alpha_{-,\gamma,\delta}\varphi)(x) = \int\limits_{\{y\in\mathbb{R}^n_+, |y|>\delta\}} |y|^{\alpha-n-|\gamma|}(\,{}^\gamma\mathbf{T}^y_x\varphi)(y)\, y^\gamma dy.$$

Тогда для B-потенциала Рисса справедливо

$$(U^\alpha_\gamma\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |y|^{\alpha-n-|\gamma|}(\,{}^\gamma\mathbf{T}^y_x\varphi)(y)\, y^\gamma dy = (\mathcal{U}^\alpha_{+,\gamma,\delta}\varphi)(x) + (\mathcal{U}^\alpha_{-,\gamma,\delta}\varphi)(x). \tag{17}$$

Получим оценку для

$$\sup_{0<\beta<\infty} \beta(\mu_\gamma((U^\alpha_\gamma\varphi)(x),\beta))^{1/q} =$$

$$= \sup_{0<\beta<\infty} \beta\left(\mathrm{mes}_\gamma\{x\in\mathbb{R}^n_+ :\ |(U^\alpha_\gamma\varphi)(x)| > \beta\}\right).$$

Учитывая (17), достаточно оценить

$$\mathrm{mes}_\gamma\{x\in\mathbb{R}^n_+ :\ |(\mathcal{U}^\alpha_{+,\gamma,\delta}\varphi)(x)| > \beta\},$$

$$\mathrm{mes}_\gamma\{x\in\mathbb{R}^n_+ :\ |(\mathcal{U}^\alpha_{-,\gamma,\delta}\varphi)(x)| > \beta\}$$

и применить неравенство

$$\mathrm{mes}_\gamma\{x\in\mathbb{R}^n_+ :\ |A+B|>\beta\} \le \mathrm{mes}_\gamma\{x\in\mathbb{R}^n_+ :\ |A|>\beta\} + \mathrm{mes}_\gamma\{x\in\mathbb{R}^n_+ :\ |B|>\beta\}.$$

Для оценки обобщенной свертки будем использовать неравенство Юнга (10).

В интеграле $(\mathcal{U}^{\alpha}_{+,\gamma,\delta}\varphi)(x)$ перейдем к координатам

$$\begin{aligned} \widetilde{y}_1 &= y_1\cos\varphi_1, & \widetilde{y}_2 &= y_1\sin\varphi_1,\\ \widetilde{y}_3 &= y_2\cos\varphi_2, & \widetilde{y}_4 &= y_2\sin\varphi_2,\ldots,\\ \widetilde{y}_{2n-1} &= y_n\cos\varphi_n, & \widetilde{y}_{2n} &= y_n\sin\varphi_n, \end{aligned} \tag{18}$$

получим

$$(\mathcal{U}^{\alpha}_{+,\gamma,\delta}\varphi)(x) = \int\limits_{\{y\in\mathbb{R}^n_+,|y|\le\delta\}} |y|^{\alpha-n-|\gamma|}({}^{\gamma}\mathrm{T}^y_x\varphi)(y)\,y^{\gamma}dy =$$

$$= \int\limits_{\{\widetilde{y}\in\mathbb{R}^{2n}_+,|\widetilde{y}|\le\delta\}} |\widetilde{y}|^{\alpha-n-|\gamma|}\ \varphi\left(\sqrt{(x_1-\widetilde{y}_1)^2+\widetilde{y}_2^2},\ldots,\sqrt{(x_n-\widetilde{y}_{2n-1})^2+\widetilde{y}_{2n}^2}\right)\prod_{i=1}^{n}y_{2i}^{\gamma_i-1}d\widetilde{y}.$$

Произведем замену $x_1-\widetilde{y}_1=z_1,\ldots,x_n-\widetilde{y}_{2n-1}=z_n$, будем иметь

$$(\mathcal{U}^{\alpha}_{+,\gamma,\delta}\varphi)(x) =$$

$$= \int\limits_{\{y_{2i}>0,\sqrt{(x_1-z_1)^2+\widetilde{y}_2^2+\ldots+(x_1-z_1)^2+\widetilde{y}_{2n}^2}\le\delta\}} \left((x_1-z_1)^2+\widetilde{y}_2^2+\ldots+(x_1-z_1)^2+\widetilde{y}_{2n}^2\right)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}\times$$

$$\times\varphi\left(\sqrt{z_1^2+\widetilde{y}_2^2},\ldots,\sqrt{z_n^2+\widetilde{y}_{2n}^2}\right)\prod_{i=1}^{n}y_{2i}^{\gamma_i-1}d\widetilde{y}''dz.$$

Пусть $B^+_n(x,r) = \{x\in\mathbb{R}^n_+ : \sqrt{(x_1-z_1)^2+\widetilde{y}_2^2+\ldots+(x_1-z_1)^2+\widetilde{y}_{2n}^2}\le r\}$, $E^+_j = B^+_n\left(x,\frac{\delta}{2^j}\right)\setminus B^+_n\left(x,\frac{\delta}{2^{j+1}}\right)$, $j=0,1,2,\ldots$. Тогда

$$|(\mathcal{U}^{\alpha}_{+,\gamma,\delta}\varphi)(x)| = \left|\sum_{j=0}^{\infty}\int\limits_{E^+_j}\left((x_1-z_1)^2+\widetilde{y}_2^2+\ldots+(x_1-z_1)^2+\widetilde{y}_{2n}^2\right)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}\times\right.$$

$$\left.\times\varphi\left(\sqrt{z_1^2+\widetilde{y}_2^2},\ldots,\sqrt{z_n^2+\widetilde{y}_{2n}^2}\right)\prod_{i=1}^{n}y_{2i}^{\gamma_i-1}d\widetilde{y}''dz\right| \le$$

$$\le \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\delta}{2^{j+1}}\right)^{\alpha-n-|\gamma|}\int\limits_{E^+_j}\left|\varphi\left(\sqrt{z_1^2+\widetilde{y}_2^2},\ldots,\sqrt{z_n^2+\widetilde{y}_{2n}^2}\right)\right|\prod_{i=1}^{n}y_{2i}^{\gamma_i-1}d\widetilde{y}''dz.$$

Возвращаясь к переменным $y_1,\ldots,y_n$ по формулам $z_1=x_1-\widetilde{y}_1,\ldots,z_n=x_n-\widetilde{y}_{2n-1}$ и (18), получим

$$|(\mathcal{U}^{\alpha}_{+,\gamma,\delta}\varphi)(x)| \le \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\delta}{2^{j+1}}\right)^{\alpha-n-|\gamma|}\int\limits_{B^+_n\left(0,\frac{\delta}{2^j}\right)}|({}^{\gamma}\mathrm{T}^y_x\varphi)(y)|\,y^{\gamma}dy \le$$

$$\le |B^+_1(n)|\delta^{\alpha}2^{n+|\gamma|-\alpha}\mathbf{M}^{\gamma}\varphi)(x)\sum_{j=0}^{\infty}2^{-\alpha j} = \frac{\delta^{\alpha}2^{n+|\gamma|}}{|2^{\alpha}-1|}|B^+_1(n)|(\mathbf{M}^{\gamma}\varphi)(x) = C(n,\gamma,\alpha)\delta^{\alpha}(\mathbf{M}^{\gamma}\varphi)(x),$$

где (см. [11])

$$|B^+_1(n)| = \int\limits_{B^+_1(n)}x^{\gamma}dx = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_1+1}{2}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{\gamma_n+1}{2}\right)}{2^n\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}+1\right)},$$

$C(n,\gamma,\alpha) = \frac{2^{n+|\gamma|}}{|2^{\alpha}-1|}|B^+_1(n)|$, а $(\mathbf{M}^{\gamma}\varphi)(x)$ — весовая максимальная функция (см. [14]).

Применяя неравенство Гельдера, получим

$$|(\mathcal{U}^{\alpha}_{-,\gamma,\delta}\varphi)(x)| \le H(n,\gamma,\alpha,p)\delta^{\alpha-\frac{n+|\gamma|}{p}}\cdot||\varphi||_{p,\gamma},$$

где $\frac{1}{p} > \frac{\alpha}{n+|\gamma|}$, $H(n,\gamma,\alpha,p)$ — некоторая постоянная. При $\alpha < n+|\gamma|$ можем записать, что

$$|(\mathcal{U}^{\alpha}_{-,\gamma,\delta}\varphi)(x)| \le H(n,\gamma,\alpha,1)\delta^{\alpha-n-|\gamma|}\cdot||\varphi||_{1,\gamma}.$$

Возьмем $\delta = \left(\frac{H(n,\gamma,\alpha,1)||\varphi||_{1,\gamma}}{\beta}\right)^{\frac{1}{n+|\gamma|-\alpha}}$, тогда $|(\mathcal{U}^{\alpha}_{-,\gamma,\delta}\varphi)(x)| \leq \beta$ и

$$\text{mes}_{\gamma}\{x \in \mathbb{R}^n_+ : |(\mathcal{U}^{\alpha}_{-,\gamma,\delta}\varphi)(x)| > \beta\} = 0.$$

Следовательно,

$$\text{mes}_{\gamma}\{x \in \mathbb{R}^n_+ : |(U^{\alpha}_{\gamma}\varphi)(x)| > \beta\} \leq \text{mes}_{\gamma}\{x \in \mathbb{R}^n_+ : |(\mathcal{U}^{\alpha}_{+,\gamma,\delta}\varphi)(x)| > \beta\} \leq$$

$$\leq \text{mes}_{\gamma}\{x \in \mathbb{R}^n_+ : |C(n,\gamma,\alpha)\delta^{\alpha}(\mathbf{M}^{\gamma}\varphi)(x)| > \beta\} \leq \frac{C(n,\gamma,\alpha)}{\beta}\delta^{\alpha}||\varphi||_{1,\gamma} =$$

$$= \frac{C(n,\gamma,\alpha)}{\beta}\left(\frac{H(n,\gamma,\alpha,1)||\varphi||_{1,\gamma}}{\beta}\right)^{\frac{\alpha}{n+|\gamma|-\alpha}}||\varphi||_{1,\gamma} = C\left(\frac{||\varphi||_{1,\gamma}}{\beta}\right)^{\frac{n+|\gamma|}{n+|\gamma|-\alpha}} = C\left(\frac{||\varphi||_{1,\gamma}}{\beta}\right)^{q}.$$

Здесь $C_{n,\gamma,\alpha} = C(n,\gamma,\alpha)\cdot H(n,\gamma,\alpha,1)^{\frac{\alpha}{n+|\gamma|-\alpha}}$. Отсюда следует, что отображение $\varphi \to U^{\alpha}_{\gamma}\varphi$ имеет слабый $(1,q)_{\gamma}$ тип при $\frac{1}{q} = 1 - \frac{\alpha}{n+|\gamma|}$. Из этого и из (16) получаем (13). Доказательство закончено.

4. Заключение. В данной работе мы изучили действие обобщенного потенциала Бесселя $\mathbf{G}^{\alpha}_{\gamma}$ в классе L^{γ}_{p}. Наши результаты включают утверждение о том, что для всех $\alpha > 0$ обобщенный потенциал Бесселя $\mathbf{G}^{\alpha}_{\gamma}$ отображает $L^{\gamma}_{p}(\mathbb{R}^n_+)$ в себя с нормой $||\cdot||_{1,\gamma}$ и справедлива оценка $||\mathbf{G}^{\alpha}_{\gamma}\varphi||_{q,\gamma} \leq C||\varphi||_{p,\gamma}$, где $1 < p < q < \infty$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n+|\gamma|}$, $0 < \alpha < n + |\gamma|$. Кроме того показано, что если $\varphi \in L^{\gamma}_{1}(\mathbb{R}^n_+)$, то отображение $\varphi \to \mathbf{G}^{\alpha}_{\gamma}\varphi$ имеет слабый $(1,q)_{\gamma}$ тип при $\frac{1}{q} = 1 - \frac{\alpha}{n+|\gamma|}$. Эти результаты являются распространением теории Харди – Литтлвуда – Соболева о дробном интегрировании на случай обобщенного потенциала Бесселя.

Список литературы

1. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. 1975. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М., Наука, 482.
2. Джабраилов А. Л., Шишкина Э. Л. 2022. Связь обобщенных потенциалов Бесселя и решения сингулярного уравнения теплопроводности. Прикладная математика & Физика, 54(2): 89–97.
3. Джабраилов А. Л., Шишкина Э. Л. 2022. К теории пространств обобщенных потенциалов Бесселя. Владикавказский математический журнал, 24(3): 62–77.
4. Киприянов И. А. 1997. Сингулярные эллиптические краевые задачи. М., Наука-Физматлит, 204.
5. Левитан Б. М. 1951. Разложения по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье. М., УМН, 6:2 (42): 102–143.
6. Ляхов Л. Н. 1991. Обращение B-потенциалов Рисса. Докл. АН СССР, 321(3): 466–469.
7. Ляхов Л. Н. 1990. Об одном классе гиперсингулярных интегралов. Докл. АН СССР. 315(2): 291–296.
8. Ляхов Л. Н. 1994. Пространства B-потенциалов Рисса. Докл. РАН, 334(3): 278–280.
9. Ляхов Л. Н. 2007. B-гиперсингулярные интегралы и их приложения к описанию пространств Киприянова дробной B-гладкости и интегральным уравнениям с B-потенциальными ядрами. Липецк: Издательство ЛГПУ, 234.
10. Ляхов Л. Н., Половинкина М. В. 2005. Пространство весовых потенциалов Бесселя. Дифференциальные уравнения и динамические системы, Сборник статей, Труды МИАН. – М.: Наука, МАИК «Наука/Интерпериодика», 250: 192–197.
11. Ситник С. М., Шишкина Э. Л. 2019. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. М., Физматлит, 224.
12. Aronszajn N., Smith K. T. 1961. Theory of Bessel potentials, I. Ibid. 11: 365–475.
13. Dzhabrailov A., Luchko Y., Shishkina E. 2021. Two Forms of An Inverse Operator to the Generalized Bessel Potential. Axioms, 10(3): 232.
14. Ekincioglu I., Guliyev V. S., Shishkina E. L. 2023. Fractional weighted spherical mean and maximal inequality for the weighted spherical mean and its application to singular PDE. Math. Sci. J., 269(3): 1–21.

15. Ekincioglu I., Shishkina E. L., Keskin C. 2021. Generalized Bessel potential and its application to non-homogeneous singular screened Poisson equation. Integral Transforms and Special Functions, 32(12): 932–947.

16. Erdelyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. 1953. Higher Transcendental Functions. Vol. 2. New York: McGraw-Hill Book Co, 308.

17. Guliev V. S., Safarov Z. V. 2001. $B_{k,n}$-Bessel potentials and certain imbedding theorems in $B_{k,n}$-Sobolev – Liouville spaces. Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb., 15: 68–80.

18. Guliyev V. S., Serbetci A., AkbulutA., Mammadov Y. Y. 2011. Nikol'skii–Besov and Lizorkin–Triebel spaces constructed on the base of the multidimensional Fourier–Bessel transform. Eurasian Math. J., 2(3): 42–66.

19. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. 1992. Integrals and Series. Vol. 2, Special Functions. New York (NY): Gordon & Breach Sci. Publ., 756.

20. Rubin B. 1996. Fractional Integrals and Potentials. Essex: Addison-Wesley, 424.

21. Stein E. M. 1970. Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton: Princeton univ. Press, N. J., 304.

22. Watson G. N. 1922. A Treatise on the Theory of Bessel Functions. Cambridge: University Press, 804.

References

1. Besov O. V., Ilyin V. P., Nikolsky S. M. 1975. Integral representations of functions and embedding theorems. M.: Nauka, 482.

2. Dzhabrailov A. L., Shishkina E. L. 2022. Connection between generalized Bessel potentials and solutions to the singular heat equation. Applied Mathematics & Physics. 54(2): 89–97.

3. Dzhabrailov A. L., Shishkina E. L. 2022. On the theory of spaces of generalized Bessel potentials. Vladikavkaz mathematical journal. 24(3): 62–77.

4. Kipriyanov I. A. 1997. Singular Elliptic Boundary Value Problems. M.: Nauka-Fizmtlit, 1997.

5. Levitan B. M. 1951. Expansion in Fourier series and integrals with Bessel functions. UMN, 6:2(42): 102–143.

6. Lyakhov L. N. 1992. Inversion of Riesz B-potentials. Dokl. Math., 44 (3): 717–720.

7. Lyakhov L. N. 1991. A class of hypersingular integrals. Dokl. Math., 42 (3): 765–769.

8. Lyakhov L. N. 1994. Spaces of Riesz B-potentials. Dokl. Math. 49 (1): 83–87.

9. Lyakhov L. N. 2007. B-hypersingular integrals and their applications to the description of Kipriyanov spaces of fractional B-smoothness and integral equations with B-potential kernels. Publishing house LGPU, Lipetsk, 234.

10. Lyakhov L. N., Polovinkina M. V. 2005. The Space of Weighted Bessel Potentials. Proc. Steklov Inst. Math. 250: 192–197.

11. Sitnik S. M., Shishkina E. L., 2019. Transmutation operators method for differential equations with Bessel operator. Moscow.. Fizmathlit, 224.

12. Aronszajn N., Smith K. T. 1961. Theory of Bessel potentials, I. Ibid. 11: 365–475.

13. Dzhabrailov A., Luchko Y., Shishkina E. 2021. Two Forms of An Inverse Operator to the Generalized Bessel Potential. Axioms, 10(3): 232.

14. Ekincioglu I., Guliyev V.S., Shishkina E. L. 2023. Fractional weighted spherical mean and maximal inequality for the weighted spherical mean and its application to singular PDE. Math. Sci. J., 269(3): 1–21.

15. Ekincioglu I., Shishkina E. L., Keskin C. 2021. Generalized Bessel potential and its application to non-homogeneous singular screened Poisson equation. Integral Transforms and Special Functions, 32(12): 932–947.

16. Erdelyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. 1953. Higher Transcendental Functions. Vol. 2. New York: McGraw-Hill Book Co, 308.

17. Guliev V. S., Safarov Z. V. 2001. $B_{k,n}$-Bessel potentials and certain imbedding theorems in $B_{k,n}$-Sobolev–Liouville spaces. Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb., 15: 68–80.

18. Guliyev V. S., Serbetci A., Akbulut A., Mammadov Y. Y. 2011. Nikol'skii–Besov and Lizorkin–Triebel spaces constructed on the base of the multidimensional Fourier–Bessel transform. Eurasian Math. J., 2(3): 42–66.

19. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. 1992. Integrals and Series. Vol. 2, Special Functions. New York (NY): Gordon & Breach Sci. Publ., 756.

20. Rubin B. 1996. Fractional Integrals and Potentials. Essex: Addison-Wesley, 424.

21. Stein E. M. 1970. Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton: Princeton univ. Press, N. J., 304.

22. Watson G. N. 1922. A Treatise on the Theory of Bessel Functions. Cambridge: University Press, 804.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 12.11.2023
Поступила после рецензирования 20.02.2023
Принята к публикации 25.02.2023

Received 12.11.2023
Revised 20.02.2023
Accepted 25.02.2023

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Джабраилов Ахмед Лечаевич – старший преподаватель, Чеченский государственный университет им. А. А. Кадырова
ул. А. Шерипова, 32, Грозный, 36402, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Akhmed Dzhabrailov – Senior Lecturer, Kadyrov Chechen State University, Grozny, Russia