MSC 11D09

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ЧИСЛА РЕШЕНИЙ ДИОФАНТОВА УРАВНЕНИЯ С ПОЛУПРОСТЫМИ ЧИСЛАМИ ИЗ КОРОТКИХ ПРОМЕЖУТКОВ

Н.А. Зинченко

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: zinchenko@bsu.edu.ru

Аннотация. В работе доказывается асимптотическая формула для числа решений диофантова уравнения $xy + p_1p_2 = n$, где p_1 и p_2 — простые, а x и y — натуральные числа, при условии, что числа p_1p_2 лежат в промежутках $[(2m)^c, (2m+1)^c)$, где $m \in \mathbb{N}, c \in (1,2]$, а простые числа p_1 и p_2 удовлетворяют дополнительным условиям: $p_i > \exp(\sqrt{\ln n}\,)$, $i = 1, 2$.

Ключевые слова: бинарная аддитивная задача, полупростые числа, метод тригонометрических сумм, короткие (виноградовские) промежутки.

1. Введение. В 1940 году И.М. Виноградов в [1] методом тригонометрических сумм получил асимптотическую формулу для числа простых чисел, не превосходящих x и лежащих в промежутках вида $[(2m)^2, (2m+1)^2)$, $m \in \mathbb{N}$. В 1986 году С.А. Гриценко в [2] вывел асимптотическую формулу для числа простых чисел, не превосходящих x и лежащих в промежутках вида

$$[(2m)^c, (2m+1)^c)\,, \tag{1}$$

где $m \in \mathbb{N}$, и $c \in (1,2]$. Такие промежутки принято называть короткими или «виноградовскими». В 1988 году С.А. Гриценко решил ряд аддитивных задач с простыми числами, лежащими в промежутках (1) (см. [3], [4]). Позднее, задачи подобного вида рассматривались в [5] А. Балогом и Дж. Фридлендером. Отметим, что в работах [3]- [5] аддитивные задачи являются тернарными, или решаются по схеме тернарной задачи.

Естественно задаться вопросом о разрешимости бинарных аддитивных задач с простыми числами из промежутков вида (1). В связи с тем, что не существует вариантов теоремы Бомбьери-Виноградова для простых чисел из промежутков вида (1), сопоставимых по силе с классической теоремой Бомбьери-Виноградова, решать бинарные аддитивные задачи с простыми числами из (1) в настоящее время не удается. Автором были решены некоторые бинарные аддитивные задачи с полупростыми числами из «виноградовских» промежутков ([6], [7], [8]). В данной статье выводится асимптотическая формула для числа решений некоторого диофантова уравнения, которая была сформулирована в работе [7] без доказательства.

Теорема. *Пусть c — произвольное число из полуинтервала $(1,2]$, p_1, p_2 — простые числа,*

$$J(n) = \sum_{\substack{p_1p_2+xy=n:\\ p_i>\exp(\sqrt{\ln n}\,)}} 1\,, \qquad J_1(n) = \sum_{\substack{p_1p_2+xy=n:\\ p_i>\exp(\sqrt{\ln n}\,)\,,\\ \{\frac{1}{2}(p_1p_2)^{1/c}\}<\frac{1}{2}}} 1\,,\quad i=1,2\,.$$

Тогда справедлива формула

$$J_1(n) = \frac{1}{2}J(n)\Big(1 + O\Big(\frac{\ln\ln\ln n}{\ln\ln n}\Big)\Big)\,, \qquad J(n) \sim c_0 n \ln\ln n\,, \quad c_0 = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{\mu^2(r)}{r\varphi(r)}\,.$$

2. Вспомогательные утверждения.

Лемма 1 (теорема Бруна-Титчмарша) ([9], с. 20). *Для натуральных чисел a и k, удовлетворяющих условиям $(a,k)=1$ и $k \leqslant x$ имеем:*

$$\pi(x,a,k) = \sum_{p\leqslant x,\ p\equiv a \bmod k} 1 < \frac{(2+\eta)x}{\varphi(k)\ln(\frac{2x}{k})}\ ,$$

где $\eta > 0$ и $x > x_0(\eta)$.

Лемма 2. *Пусть $X \geqslant 2$ и $\varphi(m)$ — значение функции Эйлера (число натуральных чисел, не превосходящих m и взаимно простых с m). Тогда справедливо равенство*

$$\sum_{m\leqslant X}\frac{1}{\varphi(m)} = c_0 \ln X + O(1)\,, \qquad c_0 = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{\mu^2(r)}{r\varphi(r)}\,.$$

Лемма 3 ([12], с. 136). *При $N > 2$ и целом положительном l для $\tau(m)$ (число натуральных делителей m)*

$$\sum_{0<m\leqslant N}(\tau(m))^l \ll N(\ln N)^{2l-1}\,.$$

Лемма 4 ([10], с. 476) (теорема Бомбьери-Виноградова). *Пусть $Li\, x = \int\limits_2^x \frac{du}{\ln u}$ и при $a \le k,\ (a,k)=1$*

$$\pi(x,a,k) = \sum_{\substack{p\le x\\ p\equiv a \bmod k}} 1\,.$$

Тогда для всякого $A > 0$ найдется такое B, что

$$\sum_{k\leqslant\sqrt{x}(\ln x)^{-B}}\ \max_{(l,k)=1}\Big|\pi(x,l,k) - \frac{\mathrm{Li}\, x}{\varphi(k)}\Big| = O\Big(\frac{x}{\ln^A x}\Big)\,.$$

Лемма 5 ([11], с. 30). *Пусть x — большое число, $D \leqslant x^{1-\alpha}$, где*

$$0 < \alpha < \frac{1}{2}\,, \quad (l,D)=1\,, \quad x_1 < x\,, \quad x - x_1 > x^{1-\frac{\alpha}{2}}\,.$$

Тогда

$$\sum_{x_1\leqslant Dm+l\leqslant x}(\tau(Dm+l))^k = O\Big(\frac{x-x_1}{D}(\ln x)^{a(k)}\Big)\,,$$

где $a(k)$ — константа, зависящая только от k.

3. Доказательство теоремы 1. Доказательство теоремы разобьем на несколько этапов.

1. Сначала преобразуем сумму $J_1(n)$. Прежде всего заметим, что

$$J_1(n) = \bar{J}_1(n) + O\Big(\frac{n}{\ln n}\Big)\,, \tag{2}$$

где

$$\bar{J}_1(n) = \sum_{\substack{p_1p_2+xy=n:\\ p_i>\exp(\sqrt{\ln n}),\\ \{\frac12(p_1p_2)^{\frac1c}\}<\frac12,\\ p_1\nmid n,\ p_2\nmid n}} 1.$$

Далее, при суммировании по p_i $(i=1,2)$ будем подразумевать, что p_i не делит n. Обозначим через $\chi(y)$ характеристическую функцию промежутка $[0,1/2)$, продолженную периодически с периодом 1 на всю числовую ось. Тогда

$$\bar{J}_1(n) = \sum_{\substack{p_1p_2+xy=n:\\ p_1>\exp(\sqrt{\ln n}),\ p_2>\exp(\sqrt{\ln n})}} \chi\Big(\frac12(p_1p_2)^{\frac1c}\Big)\,.$$

Везде далее будем иметь в виду, что $p_i>\exp(\sqrt{\ln n})$, $i=1,2$. Ограничивая промежутки изменения по переменным x и y, получим:

$$\bar{J}_1(n) = 2J_{11}(n) - J_{12}(n)\,, \tag{3}$$

где

$$J_{11}(n) = \sum_{\substack{p_1p_2+xy=n:\\ x\leqslant\sqrt{n}}} \chi\Big(\frac12(p_1p_2)^{\frac1c}\Big)\,,\quad J_{12}(n) = \sum_{\substack{p_1p_2+xy=n:\\ x\leqslant\sqrt{n},\ y\leqslant\sqrt{n}}} \chi\Big(\frac12(p_1p_2)^{\frac1c}\Big).$$

Рассмотрим сначала $J_{11}(n)$. Ограничим дополнительно промежуток изменения переменной x, выделив случай $x\leqslant\sqrt{n}P^{-10}$, где $P = n^{\frac{1}{(\ln\ln n)^2}}$, и оценим соответствующую ошибку. В результате, получим

$$J_{11}(n) = J'_{11}(n) + O(R_{11}(n))\,, \tag{4}$$

где

$$J'_{11}(n) = \sum_{\substack{p_1p_2+xy=n:\\ x\leqslant\sqrt{n}P^{-10}}} \chi\Big(\frac12(p_1p_2)^{\frac1c}\Big),\qquad R_{11}(n) = \sum_{\substack{p_1p_2+xy=n:\\ \sqrt{n}P^{-10}<x\leqslant\sqrt{n},\\ p_1\leqslant\sqrt{n}}} 1.$$

Оценим сверху $R_{11}(n)$. Так как сумма $R_{11}(n)$ соответствует слагаемым, для которых $p_1 \nmid n$, то из уравнения $p_1p_2+xy = n$, следует, что в этой сумме будут собраны слагаемые, для которых $p_1 \nmid x$, то есть $(p_1, x) = 1$. Поэтому

$$R_{11}(n) = \sum_{p_1\leqslant\sqrt{n}} \sum_{\substack{\sqrt{n}P^{-10}<x\leqslant\sqrt{n},\\ (x,p_1)=1}} \sum_{\substack{p_2\leqslant\frac{n}{p_1},\\ p_2\equiv p_1^* n \bmod x}} 1 \leqslant \sum_{\sqrt{n}P^{-10}<x\leqslant\sqrt{n}} \sum_{p_1\leq\sqrt{n}} \sum_{\substack{p_2\leqslant\frac{n}{p_1},\\ p_2\equiv p_1^* n \bmod x}} 1\,,$$

где p_1^* — решение сравнения $p_1y \equiv 1 \pmod x$.

Так как $\frac{n}{p_1} \geqslant \sqrt{n}$ и $x \leqslant \sqrt{n}$, то $x \leqslant \frac{n}{p_1}$. Поэтому для оценки внутренней суммы по p_2 можно воспользоваться теоремой Бруна-Титчмарша (лемма 1). В результате, получим

$$R_{11}(n) \ll n \sum_{\sqrt{n}P^{-10}<x\leqslant\sqrt{n}} \frac{1}{\varphi(x)} \sum_{p_1\leqslant\sqrt{n}} \frac{1}{p_1 \ln\frac{2n}{p_1x}}\,.$$

Оценивая внутреннюю сумму в полученном неравенстве, рассмотрим отдельно случаи, когда $p_1 \leqslant \sqrt[4]{n}$ и $\sqrt[4]{n} < p_1 \leqslant \sqrt{n}$:

$$\sum_{p_1\leqslant\sqrt{n}} \frac{1}{p_1\,\ln\frac{2n}{p_1x}} = \sigma_1(x,n) + \sigma_2(x,n)\,,$$

где

$$\sigma_1(x,n) = \sum_{p_1\leqslant\sqrt[4]{n}} \frac{1}{p_1\,\ln\frac{2n}{p_1x}}\,, \qquad \sigma_2(x,n) = \sum_{\sqrt[4]{n}<p_1\leqslant\sqrt{n}} \frac{1}{p_1\,\ln\frac{2n}{p_1x}}\,.$$

Для оценки $\sigma_1(x,n)$ воспользуемся тем, что $x \leqslant \sqrt{n}$, $p \leqslant \sqrt[4]{n}$. В результате, получим

$$\sigma_1(x,n) \leqslant \sum_{p_1\leqslant\sqrt[4]{n}} \frac{1}{p_1\ln 2\sqrt[4]{n}} \ll \frac{1}{\ln n}\sum_{p_1\leqslant\sqrt[4]{n}} \frac{1}{p_1} \ll \frac{\ln\ln n}{\ln n}\,.$$

Применяя для оценки $\sigma_2(x,n)$ формулу частного суммирования (преобразование Абеля [12, с. 29]), получим:

$$\sigma_2(x,n) = \int\limits_{\sqrt[4]{n}}^{\sqrt{n}} \frac{du}{u\ln u\ln\frac{2n}{xu}} + O\Big(\frac{\ln\ln n}{\ln n}\Big) \ll \frac{\ln\ln n}{\ln n}\,.$$

Следовательно,

$$\sum_{p_1\leqslant\sqrt{n}} \frac{1}{p_1\ln\frac{2n}{p_1x}} \ll \frac{\ln\ln n}{\ln n}\,. \tag{5}$$

Далее, пользуясь леммой 2, получим, что

$$\sum_{\sqrt{n}P^{-10}<x\leqslant\sqrt{n}} \frac{1}{\varphi(x)} \ll \ln\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}P^{-10}} \ll \frac{\ln n}{(\ln\ln n)^2}\,.$$

Отсюда и из (5) имеем

$$R_{11}(n) \ll \frac{n\ln\ln n}{\ln n}\cdot\frac{\ln n}{(\ln\ln n)^2} = \frac{n}{\ln\ln n}\,.$$

Следовательно, из (4) следует, что

$$J_{11}(n) = J'_{11}(n) + O\Big(\frac{n}{\ln\ln n}\Big). \tag{6}$$

Аналогично рассуждая, приходим к равенству

$$J_{12}(n) = \sum_{p_1p_2+xy=n} \chi\Big(\frac{1}{2}(p_1p_2)^{\frac{1}{c}}\Big) = J'_{12}(n) + O\Big(\frac{n}{\ln\ln n}\Big)\,,$$

причем суммирование ведется по $x \leqslant \sqrt{n}P^{-10}$ и $y \leqslant \sqrt{n}$, а простые числа p_1 и p_2 больше, чем $\exp(\sqrt{\ln n})$.

2. Рассмотрим $J'_{11}(n)$ и $J'_{12}(n)$ и выделим случаи, когда p_1 ограничено сверху величиной P, оценив при этом погрешность приближения. Для $J'_{11}(n)$ имеем:

$$J'_{11}(n) = J''_{11}(n) + O(r_{11}(n))\,, \tag{7}$$

где

$$J''_{11}(n) = \sum_{x\leqslant\sqrt{n}P^{-10}}\ \sum_{p_1\leqslant P}\ \sum_{\substack{p_2\leqslant \frac{n}{p_1},\\ p_1p_2\equiv n \bmod x}} \chi\Big(\frac{1}{2}(p_1p_2)^{\frac{1}{c}}\Big)\,,$$

$$r_{11}(n) = \sum_{P<p_1\leqslant\sqrt{n}}\ \sum_{x\leqslant\sqrt{n}P^{-10}}\ \sum_{\substack{p_2\leqslant \frac{n}{p_1},\\ p_1p_2\equiv n \bmod x}} 1.$$

Оценим $r_{11}(n)$ сверху. Заметим, что, так как $(p_1, n) = 1$, то имеют решения только те из сравнений $p_1y \equiv n \pmod x$, в которых $(p_1, x) = 1$. Для всех остальных x соответственные слагаемые будут равны нулю, и поэтому

$$r_{11}(n) = \sum_{P<p_1\leqslant\sqrt{n}}\ \sum_{\substack{x\leqslant\sqrt{n}P^{-10},\\ (x,p_1)=1}}\ \sum_{\substack{p_2\leqslant \frac{n}{p_1},\\ p_2\equiv p_1^* n \bmod x}} 1 = \sum_{P<p_1\leqslant\sqrt{n}}\ \sum_{\substack{x\leqslant\sqrt{n}P^{-10},\\ (x,p_1)=1}} \pi\Big(\frac{n}{p_1}, np_1^*, x\Big)\,,$$

где $p_1p_1^* \equiv 1 \pmod x$.

Так как $\frac{n}{p_1} \geqslant \sqrt{n} \geqslant x$, то для оценки $\pi(\frac{n}{p_1}, np_1^*, x)$ можно воспользоваться теоремой Бруна-Титчмарша (лемма 1). Получаем

$$r_{11}(n) \ll n \sum_{x\leqslant\sqrt{n}P^{-10}} \frac{1}{\varphi(x)} \sum_{P<p_1\leqslant\sqrt{n}} \frac{1}{p_1 \ln\frac{2n}{xp_1}}\,.$$

В работе [6] была получена оценка для внутренней суммы:

$$\sum_{P<p_1\leqslant\sqrt{n}} \frac{1}{p_1 \ln\frac{2n}{xp_1}} \ll \frac{\ln\ln\ln n}{\ln n}\,.$$

Отсюда и из леммы 2 следует, что $r_{11}(n) \ll n\ln\ln\ln n$. Поэтому из (6) следует, что

$$J_{11}(n) = J''_{11}(n) + O(n\ln\ln\ln n)\,. \tag{8}$$

Аналогично, получаем равенство:

$$J_{12}(n) = J''_{12}(n) + O(n\ln\ln\ln n)\,, \tag{9}$$

где

$$J''_{12}(n) = \sum_{\substack{p_1p_2+xy=n:\\ \exp(\sqrt{\ln n})<\ p_1\leqslant P\,,\\ x\leqslant\sqrt{n}P^{-10},\ y\leqslant\sqrt{n}}} \chi\Big(\frac{1}{2}(p_1p_2)^{\frac{1}{c}}\Big)\,.$$

Из (3), (8) и (9) следует,что

$$J_1(n) = 2J''_{11}(n) - J''_{12}(n) + O(n\ln\ln\ln n)\,. \tag{10}$$

3. Оценим $J''_{12}(n)$:

$$J''_{12}(n) \leqslant \sum_{\substack{x\leqslant\sqrt{n}P^{-10}\,,\\ y\leqslant\sqrt{n}}} \ \sum_{p_1p_2=n-xy} 1 \leqslant \sum_{m\leqslant\sqrt{n}P^{-10}} \tau(m) \sum_{p_1p_2=n-m} 1\,.$$

Заметим, что число решений уравнения $p_1p_2 = n-m$, то есть $\sum_{p_1p_2=n-m} 1$ — величина ограниченная. Действительно, обозначив разность $n-m$ через n_1, легко проверить, что число решений выше упомянутого уравнения не превосходит 2. Для этого рассмотрим три случая:

1) если $n_1 = p^2$, то уравнение $p_1p_2 = n_1$ имеет 1 решение: $p_1 = p$, $p_2 = p$;

2) если $n_1 = q_1q_2$, то уравнение $p_1p_2 = n_1$ имеет 2 решения: $p_1 = q_1$, $p_2 = q_2$ и $p_1 = q_2$, $p_2 = q_1$;

3) если $n_1 \neq q_1q_2$ и $n_1 \neq p^2$, то уравнение $p_1p_2 = n_1$ не имеет решений.

Отсюда и из леммы 3 следует, что

$$J''_{12}(n) \ll \sum_{m\leqslant\sqrt{n}P^{-10}} \tau(m) \ll nP^{-10}\ln n \le nP^{-9} \le \frac{n}{\ln\ln n}\,.$$

Учитывая эту оценку, из (10) и (39) получим:

$$J_1(n) = 2J''_{11}(n) + O(n\ln\ln\ln n)\,. \tag{11}$$

Аналогичными рассуждениями получается формула для $J(n)$:

$$J(n) = \sum_{p_1p_2+xy=n} 1 = 2K_{11}(n) + O(n\ln\ln\ln n), \tag{12}$$

где

$$K_{11}(n) = \sum_{x\leqslant\sqrt{n}P^{-10}} \sum_{\substack{p_1\leqslant P,\\ (p_1,\ n)=1}} \sum_{\substack{p_2\leqslant \frac{n}{p_1},\\ p_1p_2\equiv n \bmod x}} 1\,.$$

Для доказательства теоремы нам понадобится асимптотическая формула для $K_{11}(n)$. Ожидаемый главный член этой формулы по порядку должен быть равен $n\ln\ln n$.

Заметим, что из взаимной простоты чисел p_1 и n, удовлетворяющих уравнению $p_1p_2+xy=n$, следует взаимная простота чисел p_1 и x. Поэтому имеем:

$$K_{11}(n) = \sum_{p_1\leqslant P} \sum_{\substack{x\leqslant\sqrt{n}P^{-10},\\ (x,p_1)=1}} \sum_{\substack{p_2\leqslant \frac{n}{p_1},\\ p_2\equiv p_1^* n \bmod x}} 1 =$$

$$= \sum_{p_1\leqslant P} \sum_{\substack{x\leqslant\sqrt{n}P^{-10},\\ (x,p_1)=1}} \pi\left(\frac{n}{p_1}, np_1^*, x\right),$$

где p_1^* — решение сравнения $p_1y\equiv 1 \pmod x$.

Далее, представим эту сумму в виде:

$$K_{11}(n) = \sum_{p_1\leq P} \sum_{\substack{x\leqslant\sqrt{n}P^{-10}\\ (x,p_1)=1}} \frac{\mathrm{Li}\,\left(\frac{n}{p_1}\right)}{\varphi(x)} + k_1(n)\,,$$

где

$$k_1(n) = \sum_{p_1\leqslant P} \sum_{\substack{x\leqslant\sqrt{n}P^{-10},\\ (x,p_1)=1}} \left(\pi\left(\frac{n}{p_1}, np_1^*, x\right) - \frac{\mathrm{Li}\,\left(\frac{n}{p_1}\right)}{\varphi(x)}\right).$$

Воспользовавшись теоремой Бомбьери-Виноградова (лемма 4), получим:

$$k_1(n) \ll \frac{n}{\ln n} \sum_{p_1\leqslant P} \frac{1}{p_1} \ll \frac{n\ln\ln n}{\ln n}\,.$$

Используя лемму 2, делаем заключение:

$$\sum_{p_1\leqslant P} \sum_{\substack{x\leqslant\sqrt{n}P^{-10},\\ (x,p_1)=1}} \frac{\mathrm{Li}\,\left(\frac{n}{p_1}\right)}{\varphi(x)} = n\sum_{p_1\leqslant P} \frac{1}{p_1\ln\frac{n}{p_1}} \sum_{\substack{x\leqslant\sqrt{n}P^{-10},\\ (x,p_1)=1}} \frac{1}{\varphi(x)} + O\left(\frac{n\ln\ln n}{\ln n}\right),$$

поэтому

$$K_{11}(n) = n \sum_{\exp(\sqrt{\ln n})<p_1\leqslant P} \frac{1}{p_1 \ln \frac{n}{p_1}} \sum_{\substack{x\leqslant\sqrt{n}P^{-10},\\ (x,p_1)=1}} \frac{1}{\varphi(x)} + O\Big(\frac{n\ln\ln n}{\ln n}\Big). \quad (13)$$

Преобразуем внутреннюю сумму в первом слагаемом полученного равенства:

$$\sum_{\substack{x\leq\sqrt{n}P^{-10},\\ (x,p_1)=1}} \frac{1}{\varphi(x)} = \sum_{x\leqslant\sqrt{n}P^{-10}} \frac{1}{\varphi(x)} - \sum_{\substack{x\leqslant\sqrt{n}P^{-10},\\ p_1|x}} \frac{1}{\varphi(x)} .$$

Воспользуемся теперь леммой 2:

$$\sum_{x\leq\sqrt{n}P^{-10},} \frac{1}{\varphi(x)} = c_0 \ln\sqrt{n}P^{-10} + O(1) = \frac{c_0}{2}\ln n + O\Big(\frac{\ln n}{(\ln\ln\, n)^2}\Big).$$

Воспользовавшись тем, что для функции Эйлера $\varphi(a\cdot b) \geq \varphi(a)\cdot\varphi(b)$, $\varphi(p)=p-1$ и учитывая, что $p_1>\exp(\sqrt{\ln n})$, получим:

$$\sum_{\substack{x\leqslant\sqrt{n}P^{-10},\\ p_1|x}} \frac{1}{\varphi(x)} = \sum_{x_1\leqslant\sqrt{n}P^{-10}p_1^{-1}} \frac{1}{\varphi(x_1p_1)} \leqslant \sum_{x_1\leqslant\sqrt{n}P^{-10}p_1^{-1}} \frac{1}{\varphi(x_1)\varphi(p_1)} = o(1)\,.$$

Следовательно,

$$\sum_{\substack{x\leq\sqrt{n}P^{-10},\\ (x,p_1)=1}} \frac{1}{\varphi(x)} = \frac{c_0}{2}\ln n + O\Big(\frac{\ln n}{(\ln\ln n)^2}\Big).$$

Применяя суммирование по Абелю и интегрирование по частям, получаем формулу:

$$\sum_{\exp(\sqrt{\ln n})<p_1\leqslant P} \frac{1}{p_1\ln\frac{n}{p_1}} = \frac{\ln\ln n}{2\ln n} + O\Big(\frac{1}{(\ln n)^{\frac{3}{2}}}\Big).$$

Подставляя полученные формулы в (13), имеем:

$$K_{11}(n) = \frac{c_0}{4} n\ln\ln n + O\Big(\frac{n}{\sqrt{\ln n}}\Big). \quad (14)$$

Очевидно, что формула (14) является асимптотической.

4. Займемся получением асимптотической формулы для $J_{11}''(n)$. Для этого воспользуемся леммой о «стаканчиках» И.М. Виноградова ([13], с. 23) и выберем параметры r, Δ, α, β двумя способами.

Сначала определим эти параметры так: $r=[\ln n]$, $\Delta=\frac{1}{\ln^2 n}$, $\alpha=\Delta$, $\beta=\frac{1}{2}-\Delta$. Обозначим через $\chi_1(x)$ функцию, существование которой следует из леммы о «стаканчиках». Затем, при тех же r и Δ, положим $\alpha=-\Delta$, $\beta=\frac{1}{2}+\Delta$, а соответствующую функцию обозначим как $\chi_2(x)$. Тогда из леммы о «стаканчиках» следует, что $\chi_1(x)\leq\chi(x)\leq\chi_2(x)$, и

$$I_1(n) \leq J_{11}''(n) \leq I_2(n)\,, \quad (15)$$

где

$$I_i(n) = \sum_{\substack{p_1p_2+xy=n:\\ p_1\leqslant P,\ x\leqslant\sqrt{n}P^{-10}}} \chi_i\left(\frac{1}{2}(p_1p_2)^{\frac{1}{c}}\right), \quad i=1,2.$$

Если будут получены асимптотические формулы для $I_1(n)$ и $I_2(n)$ с совпадающими главными членами, то из неравенства (15) следует, что формула с таким же главным членом будет верна и для $J''_{11}(n)$.

Выведем асимптотическую формулу для $I_1(n)$. Раскладывая функцию $\chi_1(\frac{1}{2}(p_1p_2)^{\frac{1}{c}})$ в ряд Фурье, получим:

$$I_1(n) = \left(\frac{1}{2}+O(\Delta)\right)K_{11}(n) + \tilde{R}_1(n) + O(\ln n), \tag{16}$$

где

$$K_{11}(n) = \sum_{\substack{p_1p_2+xy=n:\ p_1\leqslant P,\\ x\leqslant\sqrt{n}P^{-10}}} 1, \qquad \tilde{R}_1(n) = \sum_{0<|m|\leqslant\ln^3 n} |g_m||S_m(n)|,$$

$$S_m(n) = \sum_{\substack{p_1p_2\leqslant n,\\ p_1\leqslant P}} t'(n-p_1p_2)e^{\pi i m(p_1p_2)^{\frac{1}{c}}}, \qquad t'(k) = \sum_{\substack{xy=k,\\ x\leqslant\sqrt{n}P^{-10}}} 1,$$

g_m — коэффициент Фурье с номером m для функции $\chi_1(n)$.

Оценим сумму $S_m(n)$. Для этого разобъем промежуток суммирования но p_1 на $O(\ln P)$ промежутков вида $(P_1,\ P_2]$, где $P_1 < P_2 \leqslant 2P_1$, $\exp\left(\sqrt{\ln\ n}\right) < P_1 \leqslant P$. Тогда

$$|S_m(n)| \ll \ln P|S_m(P_1,P_2)|, \qquad S_m(P_1,P_2) = \sum_{\substack{p_1p_2\leqslant n,\\ P_1<p_1\leqslant P_2}} t'(n-p_1p_2)e^{\pi i m(p_1p_2)^{\frac{1}{c}}}. \tag{17}$$

Далее, оцепим $S_m(P_1,P_2)$:

$$|S_m(P_1,P_2)| \leqslant \sum_{k\leqslant\frac{n}{P_1}}\left|\sum_{\substack{P_1<p_1\leqslant P_2,\\ kp_1<n}} t'(n-kp_1)e^{\pi i m(kp_1)^{\frac{1}{c}}}\right|.$$

Возведем обе части неравенства в квадрат и применим неравенство Коши. Используя лемму 5, получим:

$$|S_m(P_1,P_2)|^2 \leqslant \frac{n}{P_1}\sum_{k\leqslant\frac{n}{P_1}}\left|\sum_{\substack{P_1<p_1\leqslant P_2,\\ kp_1<n}} t'(n-kp_1)e^{\pi i m(kp_1)^{\frac{1}{c}}}\right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{n}{P_1}\sum_{P_1<p_1\leqslant P_2}\ \sum_{\substack{P_1<p_2\leqslant P_2\\ p_1\neq p_2}} V(m;p_1,p_2) + \frac{n}{P_1}\sum_{P_1<p_1\leqslant P_2}\ \sum_{k\leqslant\frac{n}{P_1}}\tau^2(n-kp_1) =$$

$$= \frac{n}{P_1} \sum_{P_1 < p_1 \leqslant P_2} \sum_{\substack{P_1 < p_2 \leq P_2 . \\ p_1 \neq p_2}} V(m; p_1, p_2) + O\Big(n^2 \exp\Big(-\frac{1}{2}\sqrt{\ln n}\Big)\Big), \qquad (18)$$

$$V(m;\ p_1,\ p_2) = \sum_{k \leqslant \frac{n}{P_1}} t'(n - kp_1)t'(n - kp_2)e^{\pi i m (p_1^{\frac{1}{c}} - p_2^{\frac{1}{c}})k^{\frac{1}{c}}}.$$

Пусть $P_1 < p_2 < p_1 \leq P_2$. Оценим сумму $V(m;\ p_1,\ p_2)$:

$$V(m;\ p_1,\ p_2) = \sum_{x_1 \leqslant \sqrt{n}P^{-10}} \sum_{x_2 \leq \sqrt{n}P^{-10}} \sum_{\substack{k \leqslant \frac{n}{p_1}, \\ kp_1 \equiv n \bmod x_1, \\ kp_2 \equiv n \bmod x_2}} e^{\pi i m (p_1^{\frac{1}{c}} - p_2^{\frac{1}{c}})k^{\frac{1}{c}}}. \qquad (19)$$

Рассмотрим систему сравнений

$$\begin{cases} kp_1 \equiv n \pmod{x_1}, \\ kp_2 \equiv n \pmod{x_2}. \end{cases}$$

относительно переменной k. Если она неразрешима, то $V(m;\ p_1,\ p_2) = 0$. Если же система сравнений разрешима, то, она эквивалентна сравнению $k \equiv k_0 \pmod{x_3}$, где $x_3 = [x_1, x_2]$ и $0 \leqslant k_0 < x_3$.

Рассмотрим внутреннюю сумму в (19). Обозначив ее через $v_m(p_1, p_2)$, имеем:

$$v_m(p_1, p_2) = \sum_{\substack{k \leq \frac{n}{p_1}, \\ k \equiv k_0 \bmod x_3}} e^{\pi i m (p_1^{\frac{1}{c}} - p_2^{\frac{1}{c}})k^{\frac{1}{c}}} = \sum_{t \leqslant \left(\frac{n}{p_1} - k_0\right)\frac{1}{x_3}} e^{\pi i m (p_1^{\frac{1}{c}} - p_2^{\frac{1}{c}})x_3^{\frac{1}{c}}(t+\xi_0)^{\frac{1}{c}}},$$

где $\xi_0 = \frac{k_0}{x_3}$, $0 \leq \xi_0 < 1$.

В работе [6] для суммы $v_m(p_1, p_2)$ получена оценка вида

$$v_m(p_1, p_2) \ll \frac{n}{p_1 x_3} \exp\Big(-\gamma\frac{\ln n}{(\ln\ln n)^6}\Big), \quad \gamma > 0.$$

Отсюда, из (19) и (18) получаем, что $|S_m(P_1, P_2)| \ll n\exp(-\sqrt{\ln n})$ и, следовательно, из (17) следует оценка:

$$|S_m(n)| \ll n\exp\Big(-\frac{1}{4}\sqrt{\ln n}\Big).$$

Используя эту оценку и (18), приходим к формуле:

$$I_1(n) = \Big(\frac{1}{2} + O(\Delta)\Big)K_{11}(n) + O\Big(n\exp\Big(-\frac{1}{4}\sqrt{\ln n}\Big)\Big).$$

Аналогичная асимптотическая формула получается и для $I_2(n)$. Поэтому, из (15) следует, что для $J''_{11}(n)$ верна асимптотическая формула:

$$J''_{11}(n) = \Big(\frac{1}{2} + O(\Delta)\Big)K_{11}(n) + O\Big(n\exp\Big(-\frac{1}{4}\sqrt{\ln n}\Big)\Big).$$

Далее, из (11) получаем, что

$$J_{11}(n) = \left(\frac{1}{2} + O(\Delta)\right)K_{11}(n) + O(n\ln\ln\ln n) = \frac{1}{2}K_{11}(n) + O(n\ln\ln\ln n)\,.$$

Теперь утверждение теоремы 1 следует из равенства:

$$J(n) = 2K_{11}(n) + O(n\ln\ln\ln n).$$

На этом доказательство теоремы 1 завершено.

Заключение. Бинарная аддитивная задача, рассмотренная в статье, решена с помощью метода тригонометрических сумм И.М. Виноградова [12]. Использована идея И.М. Виноградова сглаживания двойной тригонометрической суммы (получение оценки (18)). Существенную роль в доказательстве Теоремы 1 играет оценка тригонометрической суммы вида

$$\sum_{k\leqslant K,\, k\equiv k_0 \mathrm{mod} x} \exp(2\pi i\varkappa k^{1/c})\,,$$

доказательство которой проводится с использованием как теоремы о среднем значении, так и оценок ван дер Корпута по s-й производной. Рассмотренная задача решена с полупростыми числами p_1p_2 из промежутков (1). Метод Виноградова позволяет решать бинарные аддитивные задачи и для некоторых других «редких» последовательностей, «близких» к последовательности простых чисел, например, вида $p_1p_2^a$ из виноградовских промежутков.

Литература

1. Виноградов И.М. Некоторое общее свойство распределения простых чисел // Мат. сб. – 1940. – №7. – С.365-372.
2. Гриценко С.А. Об одной задаче И.М. Виноградова // Мат. заметки. – 1986. – 39, Вып.5. – С.625-640.
3. Гриценко С.А. Тернарная проблема Гольдбаха и проблема Гольдбаха-Варинга с простыми числами, лежащими в промежутках специального вида // УМН. – 1988. – 43; Вып.4(262). – С.203-204.
4. Гриценко С.А. Три аддитивные задачи // Изв. РАН. Сер. мат. – 1992. – 56;№6. – С.1198-1216.
5. Balog A., Friedlander K.J. A hybrid of theorems of Vinogradov and Piatetski-Shapiro // Pacific. J. Math. – 1992. – 156. – P.45-62.
6. Зинченко Н.А. Бинарная аддитивная задача с полупростыми числами специального вида // Чебышевский сборник. – 2005. – VI; Вып.2 (14). – С.145-162.
7. Зинченко Н.А. Две бинарные аддитивные задачи // Сибирские электронные математические известия. – 2006. – 3. – С.352-354.
8. Зинченко Н.А. Об одной аддитивной бинарной задаче // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика, информатика. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. – 2007. – 7; Вып.1. – С.9-13.
9. Хооли К. Применение методов решета в теории чисел / М.: Наука, 1987. – 136 с.
10. Прахар К. Распределение простых чисел / М.: Мир, 1967. – 511 с.
11. Линник Ю.В. Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах / Л.: Изд-во ЛГУ, 1961. – 208 с.
12. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел / М.: Наука, 1983. – 240 с.

13. Виноградов И.М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел / М.: Наука, 1971. – 162 с.

ASYMPTOTIC FORMULA OF SOLUTIONS NUMBER OF DIOPHANTINE's EQUATIONS WITH SEMISIMPLE NUMBERS IN SHORT INTERVALS

N.A. Zinchenko

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: zinchenko@bsu.edu.ru

Abstract. The asymptotic formula of the solutions number of Diophantine's equations $xy + p_1p_2 = n$ is proved where p_1 and p_2 are primes, $p_i > \exp(\sqrt{\ln n}\,)$ $i = 1, 2$; x, y are natural numbers such that p_1p_2 are in the $[(2m)^c, (2m+1)^c)$ and $m \in \mathbb{N}, c \in (1, 2]$.

Keywords: binary additive problem, semisimple number, trigonometric sum, short (Vinogradov) intervals.