MSC 81P20

ГАУССОВСКОЕ ФЛУКТУАЦИОННОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ С ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИМИ В СРЕДНЕМ КВАДРАТИЧНОМ РЕАЛИЗАЦИЯМИ

Лам Тан Фат, Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. Изучается стохастическое электромагнитное поле, описывающее тепловые флуктуации. Строятся гауссовские модели случайного электромагнитного поля в рамках общепринятого в статистической физике подхода на основе разложения поля на плоские линейно поляризованные волны в конечной области в форме параллелепипеда с большим линейным размером и последующим переходом к термодинамическому пределу. Показывается, что математически непротиворечивым образом могут быть построены модели электромагнитного поля с произвольной корреляционной функцией, на которую наложено специальное дополнительное условие, связанное с его поперечностью.

Ключевые слова: флуктуационное электромагнитное поле, гауссовское случайное поле, уравнения Максвелла, стохастическая модель, корреляционная функция, бесконечномерный марковский процесс, почти-периодические функции в среднем квадратичном.

1. Постановка задачи. Начало изучению стохастических моделей электромагнитного поля восходит к работам Рэлея, Джинса, Вина и Планка при построении теории излучения абсолютно черного тела (см., например, [1]). В связи с решением этой задачи, в теоретической физике возникло, в частности, понятие квантования электромагнитного поля. Следует заметить, что в то время, когда были опубликованы эти исследования, раздел теории вероятностей, идейно связанный с изучением таких стохастических моделей, – теория случайных процессов (полей) находился еще в зачаточным состоянии. Этим обстоятельством, в частности, обусловлен, в значительной мере, выбор пути построения теории излучения абсолютно черного тела, предложенный Планком. Нам представляется, что в настоящее время, благодаря бурному развитию в течение двадцатого столетия теории случайных процессов, которое привело к построению развитой математической теории случайных полей, представляется возможность по новому подойти к задаче описания тепловых флуктуаций электромагнитного поля и, в частности, по новому подойти к теории теплового излучения абсолютно черного тела (см., например, [2, 3]). Наличие такого альтернативного подхода к изучению стохастических электромагнитных полей отнюдь не ведет к необходимости пересмотра современной квантовой точки зрения на электромагнитное поле, однако дает новые математические возможности при теоретическом моделировании теплового электромагнитного излучения и, вообще, любого электромагнитного излучения, содержащего стохастическую составляющую.

2. Стохастические гауссовские электромагнитные поля. Рассмотрим стохастическое электромагнитное поле $\langle \mathbf{E}, \mathbf{H} \rangle$ [1] в евклидовом пространстве, которое подчиняется уравнениям Максвелла

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + [\nabla, \mathbf{E}] = 0\,, \quad (\nabla, \mathbf{H}) = 0\,,$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - [\nabla, \mathbf{H}] = 0\,, \quad (\nabla, \mathbf{E}) = 0\,.$$

При построении стохастической модели удобно использовать формализм, при котором для описания электромагнитного поля используется только одна комплекснозначная вектор-функция $\mathbf{F} = \mathbf{E} + i\mathbf{H}$, которая подчинена уравнениям

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} = -i[\nabla, \mathbf{F}]\,, \qquad (\nabla, \mathbf{F}) = 0\,. \tag{1}$$

Для определения стохастического электромагнитного поля $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ мы будем исходить из следующей схемы, принятой в статистической физике и квантовой теории поля. Сначала мы построим случайное электромагнитное поле в конечной области Λ, которую, ввиду простоты, положим в виде кубического ящика со стороной L, $\Lambda = [0, L]^3$. Затем, при вычислении математических ожиданий, интерпретируемых как наблюдаемые значения физических величин, будем переходить к пределу $L \to \infty$, который называется *термодинамическим пределом*. Иными словами, наша модель стохастического электромагнитного поля представляет собой обобщенное случайное поле, так как мы, посредством термодинамического предельного перехода, определяем только лишь характеристический функционал случайного поля $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ в $\mathbb{R}^3$.

В рассматриваемой нами схеме случайное поле $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ в Λ может быть разложено в трехмерный ряд Фурье,

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\boldsymbol{\kappa} \in \bar{\Lambda}} \bar{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\kappa}, t) \exp\big(i(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{x})\big)\,, \tag{2}$$

где $\bar{\Lambda} = \Big\langle \boldsymbol{\kappa} = \frac{2\pi}{L} n_i \mathbf{e}_i : n_j \in \mathbb{Z}, j = 1, 2, 3 \Big\rangle$, $\mathbf{e}_j$, $j = 1, 2, 3$ — орты в $\mathbb{R}^3$, ориентированные по сторонам куба Λ. Векторное поле $\bar{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\kappa}, t)$ подчинено уравнениям

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \bar{\mathbf{F}}}{\partial t} = [\boldsymbol{\kappa}, \bar{\mathbf{F}}]\,, \qquad (\boldsymbol{\kappa}, \bar{\mathbf{F}}) = 0\,. \tag{3}$$

Задание случайной комплекснозначной вектор-функции $\bar{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\kappa}, t)$, удовлетворяющей (3), эквивалентно заданию случайного поля $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющего уравнениям (1).

---

[1]Здесь мы, чтобы не усложнять запись формул, не вводим какого-либо специального обозначения, позволяющего отличать случайные математические объекты от неслучайных. Поэтому, в дальнейшем, по умолчанию, все вектор-функции E_j, H_j, F_j, A_j являются случайными. Остальные же встречающиеся в тексте величины являются неслучайными.

Набор случайных коэффициентов $\bar{F}_i(\boldsymbol{\kappa}, t)$, $\boldsymbol{\kappa} \in \bar{\Lambda}$, $i = 1, 2, 3$, как набор коэффициентов ряда Фурье квадратично интегрируемых функций $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$, квадратично суммируем

$$\sum_{\boldsymbol{\kappa} \in \bar{\bar{\Lambda}}} |\bar{F}_i(\boldsymbol{\kappa}, t)|^2 < \infty\,,$$

$$\bar{F}_i(\boldsymbol{\kappa}, t) = \frac{1}{|\Lambda|} \int\limits_{\Lambda} F_i(\mathbf{x}, t) \exp(-i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\kappa})) d\mathbf{x}\,,$$

$|\Lambda|$ — объем области Λ. Более того, ввиду гладкости поля $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ (квадратичной интегрируемости пространственных производных поля $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$), имеет место более сильное свойство суммируемости этого набора коэффициентов,

$$\sum_{\boldsymbol{\kappa} \in \bar{\bar{\Lambda}}} \boldsymbol{\kappa}^2 |\bar{F}_i(\boldsymbol{\kappa}, t)|^2 < \infty\,,$$

Простейшая стохастическая модель, у которой случайные реализации могут быть представлены с вероятностью единица в виде обычных (не обобщенных) гладких вектор-функций, удовлетворяющих уравнению (1), дается конструкцией гауссовского случайного поля. Более того, модель гауссовского случайного поля является естественной в том случае, когда оно мало с физической точки зрения. Математически, эту малость нужно понимать в смысле малости средних квадратичных значений поля.

Гауссовская модель электромагнитного поля, естественным образом, определяется на основе понятия характеристического функционала. В общем случае, распределение вероятностей пары, вообще говоря статистически связанных, случайных полей $\langle \mathbf{E}(\mathbf{x}, t), \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \rangle$ (в том числе и обобщенных) определяется на основе характеристического функционала

$$\Phi[\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle; \langle \mathbf{E}(\mathbf{x}, t), \mathbf{H}(\mathbf{y}, s) \rangle] \equiv \left\langle\!\!\left\langle \exp\left(i \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int\limits_{\mathbb{R}^3} \big(v_j(\mathbf{x}, t) E_j(\mathbf{x}, t) + w_j(\mathbf{x}, t) H_j(\mathbf{x}, t) \big) d\mathbf{x} \right) \right\rangle\!\!\right\rangle \geq 0$$

от пары $\langle \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) \rangle$ финитных и непрерывных вектор-функций на $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$. Здесь мы использовали обозначение $\langle\!\langle \cdot \rangle\!\rangle$ для операции вычисления математического ожидания по определяемому распределению вероятностей.

Гауссовская модель определяется следующей явной формулой для характеристического функционала

$$\Phi[\mathbf{u}^{(\alpha)}; \mathbf{F}^{(\beta)}(\mathbf{x}, t)] = \exp\Big(-\frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} dt ds \int\limits_{\mathbb{R}^6} K_{ij}^{(\alpha,\beta)}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}, s) u_i^{(\alpha)}(\mathbf{x}, t) u_j^{(\beta)}(\mathbf{y}, s) d\mathbf{x} d\mathbf{y} +$$

$$+ i \int\limits_{\mathbb{R}} dt \int\limits_{\mathbb{R}^3} u_j^{(\alpha)}(\mathbf{x}, t) \langle\!\langle F_j^{(\alpha)}(\mathbf{x}, t) \rangle\!\rangle d\mathbf{x} \Big)\,,$$

где $\alpha, \beta = 1, 2$ и введены обозначения $u_j^{(1)} = v_j$, $u^{(2)} = w_j$; $F_j^{(1)} = E_j$, $F_j^{(2)} = H_j$ и корреляционная функция

$$K_{ij}^{(\alpha,\beta)}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}, s) = \langle\!\langle (F_i^{(\alpha)}(\mathbf{x}, t) - \langle\!\langle F_i^{(\alpha)}(\mathbf{x}, t)\rangle\!\rangle)(F_j^{(\beta)}(\mathbf{y}, s) - \langle\!\langle F_j^{(\beta)}(\mathbf{y}, s)\rangle\!\rangle)\rangle\!\rangle.$$

В рамках гауссовской модели все средние вида $\left\langle\!\!\left\langle \Big(\prod\limits_{k=1}^{m} F_{i_k}(\mathbf{x}_k, t_k)\Big)\Big(\prod\limits_{l=1}^{m} F_{j\,l}^*(\mathbf{y}_l, s_l)\Big)\right\rangle\!\!\right\rangle$ существуют (конечны).

Пусть гауссовское векторное комплекснозначное поле $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ обладает нулевым средним, $\langle\!\langle \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)\rangle\!\rangle = 0$. Более того, будем, далее, для простоты предполагать, что его электрическая и магнитная компоненты являются стохастически независимыми и эквивалентными. Это означает, в частности, что

$$\langle\!\langle E_i(\mathbf{x}, t) H_j(\mathbf{y}, s)\rangle\!\rangle = \langle\!\langle E_i(\mathbf{x}, t)\rangle\!\rangle\langle\!\langle H_j(\mathbf{y}, s)\rangle\!\rangle = 0\,,$$

а также $\langle\!\langle E_i(\mathbf{x}, t) E_j(\mathbf{y}, s)\rangle\!\rangle = \langle\!\langle H_i(\mathbf{x}, t) H_j(\mathbf{y}, s)\rangle\!\rangle \equiv K_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s)/2$, при любых значениях $\mathbf{x}, t, i$ и $\mathbf{y}, s, j$. Тогда любые математические ожидания от произведений значений поля $\left\langle\!\!\left\langle \Big(\prod\limits_{k=1}^{m} F_{i_k}(\mathbf{x}_k, t_k)\Big)\Big(\prod\limits_{l=1}^{n} F_{j_l}^*(\mathbf{y}_l, s_l)\Big)\right\rangle\!\!\right\rangle$, во-первых, отличны от нуля только в случае, если $m = n$, и, во-вторых, если это равенство имеет место, то они выражаются посредством следующей формулы через корреляционную функцию

$$K_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s) = \langle\!\langle F_i(\mathbf{x}, t) F_j^*(\mathbf{y}, s)\rangle\!\rangle. \tag{4}$$

следующей формулой

$$\left\langle\!\!\left\langle \Big(\prod_{k=1}^{m} F_{i_k}(\mathbf{x}_k), t_k\Big)\Big(\prod_{l=1}^{m} F_{j\,l}^*(\mathbf{y}_l, s_l)\Big)\right\rangle\!\!\right\rangle = \sum_{\mathsf{P}\in\mathcal{P}_m} \prod_{k=1}^{m} \langle\!\langle F_{i_k}(\mathbf{x}_k, t_k) F_{j_{\mathsf{P}k}}^*(\mathbf{y}_{j_{\mathsf{P}k}}, s_{j_{\mathsf{P}k}})\rangle\!\rangle. \tag{5}$$

В этой формуле суммирование производится по всем возможным операциям перестановок P номеров аргументов, которые составляют группу перестановок $\mathcal{P}_m$ порядка m.

Заметим, что корреляционная функция (4) в рассматриваемом нами случае является вещественнозначной, в чем убеждаемся непосредственной подстановкой разложения $\mathbf{F} = \mathbf{E} + i\mathbf{H}$ в ее определение. Принимая во внимание вещественность этой функции, из (4) следует, что она обладает следующим свойством

$$K_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s) = K_{ji}(\mathbf{y}, s; \mathbf{x}, t)\,. \tag{6}$$

Записывая определение характеристического функционала в терминах случайной вектор-функции $\mathbf{F} = \mathbf{E} + i\mathbf{H}$:

$$\Phi[\mathbf{u}; \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)] = \left\langle\!\!\left\langle \exp\Big(i\mathrm{Re} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int\limits_{\mathbb{R}^3} u_j^*(\mathbf{x}, t) F_j(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}\Big)\right\rangle\!\!\right\rangle,$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{v} + i\mathbf{w}$. Подставляя же правую часть определения характеристического функционала гауссовской модели, согласно свойствам статистической независимости и эквивалентности полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ и равенства нулю средних компонент $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, выражение $K_{ij}^{(\alpha,\beta)}(\mathbf{x},t;\mathbf{y},s) = K_{ij}(\mathbf{x},t;\mathbf{y},s)\delta_{\alpha,\beta}$, находим

$$\Phi[\mathbf{u};\mathbf{F}(\mathbf{x},t)] \equiv \left\langle\!\!\left\langle \exp\left(i\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\mathbb{R}^3} u_j^*(\mathbf{x},t)F_j(\mathbf{x},t)d\mathbf{x}\right)\right\rangle\!\!\right\rangle =$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dtds \int_{\mathbb{R}^3} u_i(\mathbf{x},t)u_j^*(\mathbf{y},s)K_{ij}(\mathbf{x},t;\mathbf{y},s)d\mathbf{x}d\mathbf{y}\right) \qquad (7)$$

для любой непрерывной комплекснозначной финитной вектор-функции $u_i(\mathbf{x},t)$. Следовательно, комплекснозначная тензор-функция $K_{ij}(\mathbf{x},t;\mathbf{y},s)$ полностью определяет, в рассматриваемом нами случае, распределение вероятностей комплекснозначного векторного гауссовского случайного поля $\mathbf{F}(\mathbf{x},t)$.

Каждая из формулы (5) и (6) может служить характеристическим свойством случайного поля $\mathbf{F}$ со статистически независимыми и эквивалентными компонентами, обладающими нулевыми средними значениями, то есть справедлива

Теорема 1. *Для того, чтобы гауссовское комплекснозначное векторное поле* $\mathbf{F} = \mathbf{E} + i\mathbf{H}$, *у которого компоненты* $\mathbf{E}$ *и* $\mathbf{H}$ *имеют нулевые средние значения, обладало свойством их статистической независимости и эквивалентности, необходимо и достаточно, чтобы корреляционная функция (4), обладающая свойством (6), была вещественной и имела место формула усреднения (5) или, эквивалентно, формула (6) для характеристического функционала.*

□ Необходимость. Следует из приведенного выше рассуждения.

Достаточность. Пусть имеет место формула (6). Тогда, одновременной заменой переменных интегрирования суммирования $\mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{y}$, $t \Leftrightarrow s$, $i \Leftrightarrow j$, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} dtds \int_{\mathbb{R}^3} \big(v_i(\mathbf{x},t)w_j(\mathbf{y},s) - w_i(\mathbf{x},t)v_j(\mathbf{y},s)\big)K_{ij}(\mathbf{x},t;\mathbf{y},s)d\mathbf{x}d\mathbf{y} = 0\,,$$

то есть

$$\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty} dtds \int_{\mathbb{R}^3} u_i(\mathbf{x},t)u_j^*(\mathbf{y},s)K_{ij}(\mathbf{x},t;\mathbf{y},s)d\mathbf{x}d\mathbf{y} = 0\,.$$

Тогда,

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dtds \int_{\mathbb{R}^3} u_i(\mathbf{x},t)u_j^*(\mathbf{y},s)K_{ij}(\mathbf{x},t;\mathbf{y},s)d\mathbf{x}d\mathbf{y}\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} dtds \int_{\mathbb{R}^3} u_i(\mathbf{x},t)u_j^*(\mathbf{y},s)K_{ij}(\mathbf{x},t;\mathbf{y},s)d\mathbf{x}d\mathbf{y}\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dtds \int_{\mathbb{R}^3} u_i(\mathbf{x},t)u_j^*(\mathbf{y},s)K_{ij}(\mathbf{x},t;\mathbf{y},s)d\mathbf{x}d\mathbf{y}\right)\Big|_{w=0} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dtds \int_{\mathbb{R}^3} u_i(\mathbf{x},t)u_j^*(\mathbf{y},s)K_{ij}(\mathbf{x},t;\mathbf{y},s)d\mathbf{x}d\mathbf{y}\right)\Big|_{v=0} =$$

$$= \left\langle\!\!\left\langle \exp\left(i\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\mathbb{R}^3} u_j^*(\mathbf{x},t)F_j(\mathbf{x},t)d\mathbf{x}\right)\right\rangle\!\!\right\rangle\Big|_{w=0}\left\langle\!\!\left\langle \exp\left(i\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\mathbb{R}^3} u_j^*(\mathbf{x},t)F_j(\mathbf{x},t)d\mathbf{x}\right)\right\rangle\!\!\right\rangle\Big|_{v=0}$$

$$= \left\langle\!\!\left\langle \exp\left(i\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\mathbb{R}^3} u_j^*(\mathbf{x},t)E_j(\mathbf{x},t)d\mathbf{x}\right)\right\rangle\!\!\right\rangle\left\langle\!\!\left\langle \exp\left(i\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\mathbb{R}^3} u_j^*(\mathbf{x},t)(iH_j)(\mathbf{x},t)d\mathbf{x}\right)\right\rangle\!\!\right\rangle,$$

согласно формуле (7), соответственно, при $w \equiv 0$, $v \equiv 0$. С другой стороны, используя формулу (7) в общем случае, имеем

$$\Phi[\mathbf{u};\mathbf{F}(\mathbf{x},t)] = \Phi[\mathbf{u};\mathbf{E}(\mathbf{x},t)]\cdot\Phi[\mathbf{u};i\mathbf{H}(\mathbf{x},t)]\,.$$

Эта формула означает, что случайные поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ статистически независимы.

Положим теперь в начальном и конечном выражениях приведенного вычисления $v = w$. Тогда левая часть равна

$$\left[\exp\left(-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dtds \int_{\mathbb{R}^3} v_i(\mathbf{x},t)v_j(\mathbf{y},s)K_{ij}(\mathbf{x},t;\mathbf{y},s)d\mathbf{x}d\mathbf{y}\right)\Big|_{w=0}\right]^2 =$$

$$= \left[\left\langle\!\!\left\langle \exp\left(i\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\mathbb{R}^3} v_j(\mathbf{x},t)E_j(\mathbf{x},t)d\mathbf{x}\right)\right\rangle\!\!\right\rangle\right]^2,$$

а правая –

$$\left\langle\!\!\left\langle \exp\left(i\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\mathbb{R}^3} v_j(\mathbf{x},t)E_j(\mathbf{x},t)d\mathbf{x}\right)\right\rangle\!\!\right\rangle\left\langle\!\!\left\langle \exp\left(i\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\mathbb{R}^3} v_j(\mathbf{x},t)H_j(\mathbf{x},t)d\mathbf{x}\right)\right\rangle\!\!\right\rangle.$$

Это приводит к равенству

$$\left\langle\!\!\left\langle \exp\left(i\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\mathbb{R}^3} v_j(\mathbf{x},t)E_j(\mathbf{x},t)d\mathbf{x}\right)\right\rangle\!\!\right\rangle = \left\langle\!\!\left\langle \exp\left(i\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\mathbb{R}^3} v_j(\mathbf{x},t)H_j(\mathbf{x},t)d\mathbf{x}\right)\right\rangle\!\!\right\rangle$$

с произвольной функцией $v(\mathbf{x},t)$, которое означает, что поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ стохастически эквивалентны.

Наконец, вычисляя вариационную производную

$$\delta^{m+n}(\cdot)/\delta u_{i_1}(\mathbf{x}_1,t_1)...\delta u_{i_m}(\mathbf{x}_m,t_m)\delta u^*_{j_1}(\mathbf{y}_1,s_1)...\delta u^*_{j_n}(\mathbf{y}_n,s_n)$$

от обеих частей формулы (7) в точке $u_i(\mathbf{x},t)\equiv 0$ функционального пространства финитных непрерывных вектор-функций $u_i(\mathbf{x},t)$, получим формулу (5) для вычисления средних значений мономов от случайного поля $\mathbf{F}(\mathbf{x},t)$. ■

Заметим, что через посредство функции $K_{ij}(\mathbf{x},t;\mathbf{y},s)$ выражаются физически значимые величины. Например,

$$\frac{1}{8\pi}K_{ii}(\mathbf{x},t;\mathbf{x},t)\equiv W(\mathbf{x},t)$$

представляет собой плотность энергии электромагнитного поля в пространственно-временной точке $\mathbf{x},t$.

Из определения (4) непосредственно следует, что корреляционная функция, обладает следующим свойством положительности:

$$\left\langle\!\!\left\langle \left| \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\mathbb{R}^3} u_j(\mathbf{x},t)F_j(\mathbf{x},t)d\mathbf{x}\right|^2 \right\rangle\!\!\right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dtds \int_{\mathbb{R}^3} K_{ij}(\mathbf{x},t,\mathbf{y},s)u_i(\mathbf{x},t)u^*_j(\mathbf{y},s)d\mathbf{x}d\mathbf{y}\geq 0\,, \quad (8)$$

верное для любой непрерывной финитной комплекснозначной вектор-функции $u_i(\mathbf{x},t)$ (это, автоматически, означает вещественность интеграла в правой части).

Замечание. Воспользовавшись теоремой Бохнера-Хинчина (см., например, [4]), легко доказать, что это условие, вместе с (6), является также достаточным для того, чтобы функция $K_{ij}(\mathbf{x},t,\mathbf{y},s)$ представляла корреляционную функцию некоторого комплекснозначного векторного случайного поля $F_j(\mathbf{x},t)$ с нулевым средним значением. Если к тому же эта функция вещественна, то, согласно доказанной теореме, реальная и мнимая части случайного поля статистически независимы и эквивалентны. Для доказательства достаточно определить пару гауссовских вектор-функций $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ таких, что $\langle\!\langle E_j\rangle\!\rangle=\langle\!\langle H_j\rangle\!\rangle=0$ и, для которых $K^{(\alpha,\beta)}_{ij}(\mathbf{x},t;\mathbf{y},s)=K_{ij}(\mathbf{x},t;\mathbf{y},s)\delta_{\alpha,\beta}$.

Заметим, что свойства (6), (8) означают, что $K_{ij}(\mathbf{x},t,\mathbf{y},s)$ является ядром эрмитовского неотрицательного интегрального оператора с вещественным ядром.

Укажем, наконец, очень важный частный случай, который будет для нас, в дальнейшем, иметь особое значение в связи с приложением к теории термодинамически равновесного излучения в замкнутой полости. Случайное поле $\mathbf{F}(\mathbf{x},t)$ называется стохастически однородным по пространству и/или стационарным по времени, если его распределение вероятностей не изменяется при преобразовании случайного поля $\mathbf{F}(\mathbf{x},t)$ посредством сдвига пространственной точки $\mathbf{x}\Rightarrow\mathbf{x}+\mathbf{a}$ и времени $t\Rightarrow t+c$ для любого вектора $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^3$ и/или любого числа $c\in\mathbb{R}$. Иными словами, случайное поле $\mathbf{F}(\mathbf{x}+\mathbf{a},t)$ и/или $\mathbf{F}(\mathbf{x},t+c)$ имеет то же самое распределение вероятностей, что и поле $\mathbf{F}(\mathbf{x},t)$. Согласно формуле (7), для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$K_{ij}(\mathbf{x}+\mathbf{a},t;\mathbf{y}+\mathbf{a},s)=K_{ij}(\mathbf{x},t;\mathbf{y},s) \quad \text{и/или} \quad K_{ij}(\mathbf{x},t+c;\mathbf{y},s+c)=K_{ij}(\mathbf{x},t;\mathbf{y},s)\,. \quad (9)$$

Общим решением функциональных уравнений (9) при наличии стохастической однородности, как по пространственным переменным, так и по времени, является следующий вид корреляционной функции:

$$K_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s) = K_{ij}(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t-s)\,, \tag{10}$$

где $K_{ij}(\cdot,\cdot)$ – некоторая тензор-функция на $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}$, то есть функция уже только от одной пространственно-временной точки. При этом, согласно (6), функция $K_{ij}(\cdot,\cdot)$ обладает свойством

$$K_{ij}(\mathbf{x}, t) = K_{ji}(-\mathbf{x}, -t)\,. \tag{11}$$

Рассмотрим теперь какими дополнительными необходимыми свойствами должна обладать функция $K_{ij}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}, s)$ для того, чтобы она представляла корреляционную функцию поля $F_j(\mathbf{x}, t)$, соответствующую электромагнитному полю $\langle\mathbf{E}, \mathbf{H}\rangle$ посредством соотношения $\mathbf{F} = \mathbf{E}+i\mathbf{H}$. Так как в этом случае случайная функция должна подчиняться уравнениям Максвелла, записанным в форме (1), то умножая каждое из этих уравнений на $F^*_j(\mathbf{y}, s)$ и производя усреднение, находим, что корреляционная функция должна подчиняться следующим уравнениям

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}K_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s) = -i\varepsilon_{ikl}\frac{\partial}{\partial x_k}K_{lj}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s)\,, \qquad \frac{\partial}{\partial x_i}K_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s) = 0\,. \tag{12}$$

Точно также, заменив в уравнениях (1) $\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{y}$ и $t \Rightarrow s$ вместе с комплексным сопряжением, а затем умножив их на $F_i(\mathbf{x}, t)$ и усреднив по распределению вероятностей поля, получим, что имеют место уравнения

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial s}K_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s) = i\varepsilon_{jkl}\frac{\partial}{\partial y_k}K_{il}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s)\,, \qquad \frac{\partial}{\partial y_j}K_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s) = 0\,. \tag{13}$$

Существенно, что эти уравнения имеют место только в случае, если $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, $t \neq s$. Но при этом также нужно помнить, что поле $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ должно быть дифференцируемым по $\mathbf{x}$ и t, и поэтому корреляционная функция $K_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s)$ обязательно дифференцируема по каждой из переменных, то есть, наверняка, непрерывна.

Ограничения (12), (13) на корреляционную функцию являются необходимыми в том случае, когда поле $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет уравнениям Максвелла. Однако, они не являются достаточными. Это связано с тем, что они получены уже в результате усреднения, в то время как случайное электромагнитное поле $F_i(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет уравнениям Максвелла с вероятностью единица. Таким образом, при усреднении посредством описания его корреляционной функцией, удовлетворяющей уравнениям (12), (13), теряется существенная часть информации о случайном поле $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$. Нахождение таких ограничений на корреляционную функцию $K_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s)$, которые бы являлись необходимыми и достаточными для того, чтобы она соответствовала стохастическому электромагнитному полю, в общем случае, довольно затруднительно. В следующем разделе эта задача будет решена в том случае, когда электромагнитное поле сосредоточено в ограниченной полости.

3. Стохастические электромагнитные поля в ограниченной полости. Для нахождения ограничений на корреляционную функцию $K_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s)$, которые бы представляли необходимые и достаточные условия ее связанности со стохастическим электромагнитным полем в ограниченной полости, воспользуемся разложением (2) поля $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$. Подстановка этого разложения в уравнения Максвелла (1) приводит к следующим уравнениям для коэффициентов разложения

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \bar{F}_i}{\partial t} = \varepsilon_{ijk}\kappa_j \bar{F}_k\,, \qquad \kappa_k \bar{F}_k = 0\,; \quad \boldsymbol{\kappa} \in \bar{\Lambda}\,. \tag{14}$$

Ввиду наличия однозначной линейной связи между полями $F_i(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in \Lambda$ и $\bar{F}_i(\boldsymbol{\kappa}, t)$, $\boldsymbol{\kappa} \in \bar{\Lambda}$, для того чтобы поле $F_i(\mathbf{x}, t)$ было гауссовским и имело нулевое среднее необходимо и достаточно чтобы поле $\bar{F}_i(\boldsymbol{\kappa}, t)$ также было гауссовским и имело нулевое среднее. В этом случае поле $\bar{F}_i(\boldsymbol{\kappa}, t)$ полностью определяется ковариационной матрицей

$$\bar{K}_{i_1 i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1; \boldsymbol{\kappa}_2, t_2) = \langle\!\langle \bar{F}_{i_1}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1)\bar{F}^*_{i_2}(\boldsymbol{\kappa}_2, t_2)\rangle\!\rangle\,, \qquad \bar{K}_{i_1 i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1; \boldsymbol{\kappa}_2, t_2) = \bar{K}^*_{i_2 i_1}(\boldsymbol{\kappa}_2, t_2; \boldsymbol{\kappa}_1, t_1)\,.$$

Эта матрица обладает обладает свойством положительной определенности вида

$$\left\langle\!\!\left\langle \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \sum_{\boldsymbol{\kappa}\in\bar{\Lambda}} \bar{u}_j(\boldsymbol{\kappa}, t)\bar{F}_j(\boldsymbol{\kappa}, t)\right|^2 \right\rangle\!\!\right\rangle =$$

$$= \sum_{\boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_2 \in \bar{\Lambda}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \bar{K}_{k_1 k_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1; \boldsymbol{\kappa}_2, t_2)\bar{u}_{k_1}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1)\bar{u}^*_{k_2}(\boldsymbol{\kappa}_2, t_2)dt_1 dt_2 \ge 0\,. \tag{15}$$

для любого набора финитных по t функций $\bar{u}_i(\boldsymbol{\kappa}, t)$, $\boldsymbol{\kappa} \in \bar{\Lambda}$.

Корреляционная функция $K_{i_1 i_2}(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_2, t_2)$ поля $F_i(\mathbf{x}, t)$ связана с ковариационной матрицей $\bar{K}_{i_1 i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1; \boldsymbol{\kappa}_2, t_2)$ следующей формулой

$$K_{i_1 i_2}(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_2, t_2) = \sum_{\boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_2 \in \bar{\Lambda}} \bar{K}_{i_1 i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1; \boldsymbol{\kappa}_2, t_2)\exp[i(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\kappa}_1) - i(\mathbf{x}_2, \boldsymbol{\kappa}_2)]\,,$$

которая получается подстановкой в определяющую формулу (4), вместо случайных функций $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$, их разложений вида (2). Подставляя аналогичное разложение в выражение в правой части формулы (10), убеждаемся, что, благодаря неравенству (15), корреляционная функция $K_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s)$, действительно, является положительно определенной.

Как и для поля $F_i(\mathbf{x}, t)$, для того чтобы $\bar{F}_i(\boldsymbol{\kappa}, t)$ обладало стохастически независимыми и эквивалентными реальной и мнимой частями, необходимо и достаточно, чтобы эта матрица, как и корреляционная матрица $K_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s)$, была вещественной, то есть удовлетворяло соотношению

$$\bar{K}_{i_1 i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1; \boldsymbol{\kappa}_2, t_2) = \bar{K}_{i_2 i_1}(\boldsymbol{\kappa}_2, t_2; \boldsymbol{\kappa}_1, t_1)\,. \tag{16}$$

Найдем общее решение второго алгебраического уравнения. Для этого заметим, что линейное уравнение

$$\bar{F}_i(\boldsymbol{\kappa}, t) = \varepsilon_{ijk}\kappa_j A_k(\boldsymbol{\kappa}, t)\,, \tag{17}$$

где ε_{ijk} — псевдотензор Леви-Чивитта, всегда разрешимо относительно $A_k(\boldsymbol{\kappa}, t)$ при выполнении условия $\kappa_k \bar{F}_k = 0$. Общим решением этого вырожденного линейного уравнения является (если $\boldsymbol{\kappa} \neq 0$)

$$A_i(\boldsymbol{\kappa}, t) = \lambda(\boldsymbol{\kappa}, t)\kappa_i - \boldsymbol{\kappa}^{-2}\varepsilon_{ijk}\kappa_j \bar{F}_k(\boldsymbol{\kappa}, t)\,,$$

$\lambda(\boldsymbol{\kappa}, t)$ – произвольная функция от $\boldsymbol{\kappa}$ и t. Однако, первое слагаемое не дает вклада в правой части формулы (17), и поэтому оно может быть положено равным нулю. Тогда для выполнимости (17), достаточно считать, набор функций $A_k(\boldsymbol{\kappa}, t)$, $\boldsymbol{\kappa} \in \bar{\Lambda}$ однозначно определяется формулой

$$A_i(\boldsymbol{\kappa}, t) = -\boldsymbol{\kappa}^{-2}\varepsilon_{ijk}\kappa_j \bar{F}_k(\boldsymbol{\kappa}, t)\,. \tag{18}$$

Тогда, ввиду квадратичной суммируемости $F_i(\boldsymbol{\kappa}, t)$, этот набор функций обладает свойством

$$\sum_{\boldsymbol{\kappa}\in\bar{\Lambda}} \boldsymbol{\kappa}^2 |\mathbf{A}(\boldsymbol{\kappa}, t)|^2 < \infty\,.$$

Ввиду однозначности связи между полями $\bar{F}_i(\boldsymbol{\kappa}, t)$ и $A_i(\boldsymbol{\kappa}, t)$, $\boldsymbol{\kappa} \in \bar{\Lambda}$, совместное распределение вероятностей набора $A_i(\boldsymbol{\kappa}, t)$, $\boldsymbol{\kappa} \in \bar{\Lambda}$ порождается распределением вероятностей набора $\bar{F}_i(\boldsymbol{\kappa}, t)$, $\boldsymbol{\kappa} \in \bar{\Lambda}$ и, обратно, распределение вероятностей первого набора порождает совместное распределение второго. При этом в силу выполнимости свойства суммируемости с квадратичным весом для набора $\bar{F}_i(\boldsymbol{\kappa}, t)$, $\boldsymbol{\kappa} \in \bar{\Lambda}$ с вероятностью единица, для набора $A_i(\boldsymbol{\kappa}, t)$, , $\boldsymbol{\kappa} \in \bar{\Lambda}$, с той же вероятностью, выполняется

$$\sum_{\boldsymbol{\kappa}\in\bar{\Lambda}} \boldsymbol{\kappa}^4 |A_i(\boldsymbol{\kappa}, t)|^2 < \infty\,. \tag{19}$$

Кроме того, так как поле $\mathbf{A}(\boldsymbol{\kappa}, t)$, $\boldsymbol{\kappa} \in \bar{\Lambda}$ получается линейным преобразованием из гауссовского случайного поля $\bar{F}(\boldsymbol{\kappa}, t)$, то, согласно теории Пугачева [5], оно является гауссовским по $\boldsymbol{\kappa}$ и t. Это поле, вслед за случайным полем $\bar{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\kappa}, t)$ обладает нулевым средним значением. Обратно, если для набора гауссовских случайных функций с нулевым средним значением выполняется (19), то соответствующий набор функций $\bar{F}_i(\boldsymbol{\kappa}, t)$, $\boldsymbol{\kappa} \in \bar{\Lambda}$ представляет собой гауссовское поле с нулевым средним, квадратично суммируемое с весом $\boldsymbol{\kappa}^2$.

Поле $A_i(\boldsymbol{\kappa}, t)$, $\boldsymbol{\kappa} \in \bar{\Lambda}$ с нулевым средним значением полностью описывается бесконечной ковариационной матрицей

$$D_{i_1,i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1; \boldsymbol{\kappa}_2, t_2) = \langle\!\langle A_{i_1}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1) A^*_{i_2}(\boldsymbol{\kappa}_2, t_2)\rangle\!\rangle\,, \quad D_{i_1,i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1; \boldsymbol{\kappa}_2, t_2) = D^*_{i_2,i_1}(\boldsymbol{\kappa}_2, t_2; \boldsymbol{\kappa}_1, t_1)\,. \tag{20}$$

Эта матрица точно также как и ковариационная матрица $\bar{K}_{i_1 i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1; \boldsymbol{\kappa}_2, t_2)$ должна обладать свойством положительной определенности

$$\sum_{\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2\in\bar{\Lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} D_{i_1,i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1; \boldsymbol{\kappa}_2, t_2) \bar{u}_{i_1}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1) \bar{u}^*_{i_2}(\boldsymbol{\kappa}_2, t_2) dt_1 dt_2 \geq 0 \tag{21}$$

для любого набора финитных по t функций $\bar{u}_i(\boldsymbol{\kappa},t)$, $\boldsymbol{\kappa}\in\bar{\Lambda}$. Подставляя в эту формулу выражения (17) для функций $A_{i_s}(\boldsymbol{\kappa}_s,t_s)$, $\boldsymbol{\kappa}_s\in\bar{\Lambda}$ и заменив функции $\bar{u}_{i_s}(\boldsymbol{\kappa}_s,t_s)$ на $-\boldsymbol{\kappa}_s^{-2}\varepsilon_{i_sjk_s}\kappa_j\bar{u}_{k_s}(\boldsymbol{\kappa}_s,t_s)$, $s=1,2$, получим, что выполняется (15).

Итак, вследствие выявленных выше связей между полями $\bar{F}_i(\boldsymbol{\kappa},t)$ и $A_i(\boldsymbol{\kappa},t)$ и вещественности коэффициентов (формулы (17) и (18)), в линейных связях между этими полями, справедлива

Теорема 2. *Для того чтобы комплекснозначное гауссовское поле $\bar{F}_i(\boldsymbol{\kappa},t)$ имело нулевое среднее значение и статистически независимые и эквивалентные реальную и мнимую части необходимо и достаточно, чтобы гауссовское векторное комплексиозначное поле $A_i(\boldsymbol{\kappa},t)$ имело нулевое среднее и корреляционная матрица этого поля $\langle\!\langle A_{i_1}(\boldsymbol{\kappa}_1,t_1)A^*_{i_2}(\boldsymbol{\kappa}_2,t_2)\rangle\!\rangle$ была вещественной.*

Таким образом, определив произвольным образом набор гауссовских случайных функций $A_i(\boldsymbol{\kappa},t)$, $\boldsymbol{\kappa}\in\bar{\Lambda}$ с нулевым средним и с реализациями, удовлетворяющими с вероятностью единица условию (19) и вещественной ковариационной матрицей $D_{i_1,i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,t_1;\boldsymbol{\kappa}_2,t_2)$, мы, тем самым, определим однозначным образом гауссовское случайное соленоидальное поле $F_i(\mathbf{x},t)$ с вещественной ковариационной матрицей. При этом, ввиду формулы (13), ковариационные матрицы $\bar{K}_{i_1i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,t_1;\boldsymbol{\kappa}_2,t_2)$ и $D_{i_1,i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,t_1;\boldsymbol{\kappa}_2,t_2)$ связаны очевидным соотношением

$$\bar{K}_{i_1i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,t_1;\boldsymbol{\kappa}_2,t_2)=\varepsilon_{i_1j_1k_1}\varepsilon_{i_2j_2k_2}(\boldsymbol{\kappa}_1)_{j_1}(\boldsymbol{\kappa}_2)_{j_2}D_{k_1,k_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,t_1;\boldsymbol{\kappa}_2,t_2)\,, \qquad (22)$$

которое является необходимым (в рамках сделанных ограничений на поле $\mathbf{F}(\mathbf{x},t)$), вследствие теоремы 2, и достаточным условием для соленоидальности этого поля так, что имеют место соотношения

$$(\boldsymbol{\kappa_1})_{i_1}\bar{K}_{i_1i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,t_1;\boldsymbol{\kappa}_2,t_2)=0\,,\qquad (\boldsymbol{\kappa_2})_{i_2}\bar{K}_{i_1i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,t_1;\boldsymbol{\kappa}_2,t_2)=0\,.$$ [2)]

Рассмотрим теперь те ограничения на выбор гауссовского поля $A_i(\boldsymbol{\kappa},t)$, которые необходимы для того, чтобы поле $\bar{F}_i(\boldsymbol{\kappa},t)$ удовлетворяло эволюционному уравнению (1). Посредством усреднения, из уравнений (11), (12) непосредственно вытекает, что ковариационная матрица удовлетворяет следующим уравнениям

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t_1}\bar{K}_{i_1i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,t_1;\boldsymbol{\kappa}_2,t_2)=\varepsilon_{i_1kl}(\boldsymbol{\kappa}_1)_k\bar{K}_{li_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,t_1;\boldsymbol{\kappa}_2,t_2)\,, \qquad (23)$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t_2}\bar{K}_{i_1i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,t_1;\boldsymbol{\kappa}_2,t_2)=\varepsilon_{i_2kl}(\boldsymbol{\kappa}_2)_k\bar{K}_{i_1l}(\boldsymbol{\kappa}_1,t_1;\boldsymbol{\kappa}_2,t_2)\,. \qquad (24)$$

---

[2]С другой стороны, выполнимость этих соотношений обеспечивает соленоидальность поля $F_i(\mathbf{x},t)$ с вероятностью 1, так как имеет место

$$0=\sum_{\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2\in\bar{\Lambda}}(\boldsymbol{\kappa}_1)_{i_1}(\boldsymbol{\kappa}_2)_{i_2}\bar{K}_{k_1k_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,t;\boldsymbol{\kappa}_2,t)\bar{u}(\boldsymbol{\kappa}_1)\bar{u}^*(\boldsymbol{\kappa}_2)=\left\langle\!\!\left\langle\Big|\sum_{\boldsymbol{\kappa}\in\bar{\Lambda}}\bar{u}(\boldsymbol{\kappa})\kappa_j\bar{F}_j(\boldsymbol{\kappa},t)\Big|^2\right\rangle\!\!\right\rangle,$$

для любой финитной функции $\bar{u}(\boldsymbol{\kappa})$, для всех $\boldsymbol{\kappa}\in\bar{\Lambda}$. Это означает, что с вероятностью единица имеет место тождество $\kappa_k\bar{F}_k(\boldsymbol{\kappa},t)=0$, $\boldsymbol{\kappa}\in\bar{\Lambda}$ (см. (13)).

Проанализируем к каким следствиям приводит выполнимость первого уравнения в (13) именно с вероятностью единица. Продифференцируем по времени формулу (17) и воспользуемся вторым уравнением (13). Тогда, так как $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$, то

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \bar{F}_i}{\partial t^2} = -\boldsymbol{\kappa}^2 \bar{F}_i\,.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}A_i(\boldsymbol{\kappa},t) = -\boldsymbol{\kappa}^{-2}\varepsilon_{ijk}\kappa_j\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{F}_k(\boldsymbol{\kappa},t) = -\boldsymbol{\kappa}^2\Big(-\boldsymbol{\kappa}^{-2}\varepsilon_{ijk}\kappa_j F_k(\boldsymbol{\kappa},t)\Big) = -\boldsymbol{\kappa}^2 A_i(\boldsymbol{\kappa},t)\,.$$

Поэтому

$$A_i(\boldsymbol{\kappa},t) = A_i^{(+)}(\boldsymbol{\kappa})\exp(ic|\boldsymbol{\kappa}|t) + A_i^{(-)}(\boldsymbol{\kappa})\exp(-ic|\boldsymbol{\kappa}|t)\,.$$

Тогда, подставляя аналогичные выражения в определение ковариационная матрицы, получаем

$$D_{j_1,j_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,t_1;\boldsymbol{\kappa}_2,t_2) =$$

$$\langle\!\langle A_{j_1}^{(+)}(\boldsymbol{\kappa}_1)A_{j_2}^{(+)*}(\boldsymbol{\kappa}_2)\rangle\!\rangle\exp\big(ic(|\boldsymbol{\kappa}_1|t_1-|\boldsymbol{\kappa}_2|t_2)\big)+\langle\!\langle A_{j_1}^{(-)}(\boldsymbol{\kappa}_1)A_{j_2}^{(-)*}(\boldsymbol{\kappa}_2)\rangle\!\rangle\exp\big(-ic(|\boldsymbol{\kappa}_1|t_1-|\boldsymbol{\kappa}_2|t_2)\big)+$$

$$\langle\!\langle A_{j_1}^{(+)}(\boldsymbol{\kappa}_1)A_{j_2}^{(-)*}(\boldsymbol{\kappa}_2)\rangle\!\rangle\exp\big(ic(|\boldsymbol{\kappa}_1|t_1+|\boldsymbol{\kappa}_2|t_2)\big)+\langle\!\langle A_{j_1}^{(-)}(\boldsymbol{\kappa}_1)A_{j_2}^{(+)*}(\boldsymbol{\kappa}_2)\rangle\!\rangle\exp\big(-ic(|\boldsymbol{\kappa}_1|t_1+|\boldsymbol{\kappa}_2|t_2)\big)\,.$$

Далее, мы ограничимся анализом случая стохастически пространственно-однородного случайного поля. При наличии периодических граничных условий эта ковариационная матрица пропорциональна символу Кронекера $\delta_{\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2}$. Поэтому мы введем обозначение $D_{j_1,j_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,t_1;\boldsymbol{\kappa}_2,t_2) = \delta_{\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}}\delta_{\boldsymbol{\kappa}_2,\boldsymbol{\kappa}}D_{j_1,j_2}(\boldsymbol{\kappa};t_1,t_2)$. Введя матрицы $D_{j_1,j_2}^{(+)}(\boldsymbol{\kappa}) = \langle\!\langle A_{j_1}^{(+)}(\boldsymbol{\kappa})A_{j_2}^{(+)*}(\boldsymbol{\kappa})\rangle\!\rangle$ и $D_{j_1,j_2}^{(-)}(\boldsymbol{\kappa}) = \langle\!\langle A_{j_1}^{(+)}(\boldsymbol{\kappa})A_{j_2}^{(-)*}(\boldsymbol{\kappa})\rangle\!\rangle$, из требования вещественности матрицы $D_{j_1,j_2}(\boldsymbol{\kappa};t_1,t_2)$ при любых значениях t_1,t_2 находим, что $D_{j_1,j_2}^{(+)\,*}(\boldsymbol{\kappa}) = \langle\!\langle A_{j_1}^{(-)}(\boldsymbol{\kappa})A_{j_2}^{(-)*}(\boldsymbol{\kappa})\rangle\!\rangle$ и $D_{j_1,j_2}^{(-)\,*}(\boldsymbol{\kappa}) = \langle\!\langle A_{j_1}^{(-)}(\boldsymbol{\kappa})A_{j_2}^{(+)*}(\boldsymbol{\kappa})\rangle\!\rangle$. Тогда явное выражение для матрицы $D_{j_1,j_2}^{(-)}(\boldsymbol{\kappa})$ запишется в виде

$$D_{j_1,j_2}(\boldsymbol{\kappa};t_1,t_2) = D_{j_1,j_2}^{(+)}(\boldsymbol{\kappa})\exp\big(ic|\boldsymbol{\kappa}|(t_1-t_2)\big) + D_{j_1,j_2}^{(+)\,*}(\boldsymbol{\kappa})\exp\big(-ic|\boldsymbol{\kappa}|(t_1-t_2)\big)+$$

$$+D_{j_1,j_2}^{(-)}(\boldsymbol{\kappa})\exp\big(ic|\boldsymbol{\kappa}|(t_1+t_2)\big) + D_{j_1,j_2}^{(-)\,*}(\boldsymbol{\kappa})\exp\big(-ic|\boldsymbol{\kappa}|(t_1+t_2)\big)\,.$$

Эта матрица полностью определяет гауссовские случайные поля $A_i^{(\pm)}(\boldsymbol{\kappa},t)$ и, тем самым, поле $A_i(\boldsymbol{\kappa},t)$, так как из выполнимости $\langle\!\langle A_i(\boldsymbol{\kappa},t)\rangle\!\rangle = 0$ при любых t следуют ограничения $\langle\!\langle A_i^{(\pm)}(\boldsymbol{\kappa},t)\rangle\!\rangle = 0$ на эти поля.

Для того, чтобы поле $A_j(\boldsymbol{\kappa},t)$ обладало, дополнительно, свойством стационарности по временно́й переменной, нужно чтобы $\langle\!\langle A_{j_1}^{(+)}(\boldsymbol{\kappa})A_{j_2}^{(-)*}(\boldsymbol{\kappa})\rangle\!\rangle = 0$. При этом, беря комплексное сопряжение, как следствие получаем $D_{j_1,j_2}^{(-)}(\boldsymbol{\kappa}) = 0$,

$$D_{j_1,j_2}(\boldsymbol{\kappa};t_1,t_2) = D_{j_1,j_2}^{(+)}(\boldsymbol{\kappa})\exp\big(ic|\boldsymbol{\kappa}|(t_1-t_2)\big) + D_{j_1,j_2}^{(+)\,*}(\boldsymbol{\kappa})\exp\big(-ic|\boldsymbol{\kappa}|(t_1-t_2)\big)\,. \qquad (25)$$

Из условия положительной определенности корреляционной функции $D_{j_1,j_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,t_1;\boldsymbol{\kappa}_2,t_2)$, в условиях стохастических пространственной однородности и временной стационарности, имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2 \int\limits_{\mathbb{R}^3} \Big(D^{(+)}_{ij}(\boldsymbol{\kappa}) \exp\big(ic|\boldsymbol{\kappa}|(t_1-t_2) u_i(\boldsymbol{\kappa},t_1) u^*_j(\boldsymbol{\kappa},t_2) +$$

$$+ D^{(+)*}_{ij}(\boldsymbol{\kappa}) \exp\big(-ic|\boldsymbol{\kappa}|(t_1-t_2) u^*_i(\boldsymbol{\kappa},t_1) u_j(\boldsymbol{\kappa},t_2)\Big) d\boldsymbol{\kappa} \geq 0\,.$$

Вводя комплексные переменные

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} u_i(\boldsymbol{\kappa},t) e^{itc|\boldsymbol{\kappa}|} d\boldsymbol{\kappa} = z_i(\boldsymbol{\kappa})\,,$$

которые, ввиду произвольности функций $u_i(\boldsymbol{\kappa},t)$, могут принимать любые комплексные значения независимо друг от друга, последнее условие положительной определенности записывается в виде

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \Big(D^{(+)}_{ij}(\boldsymbol{\kappa}) z_i(\boldsymbol{\kappa}) z^*_j(\boldsymbol{\kappa}) + D^{(+)*}_{ij}(\boldsymbol{\kappa}) z^*_i(\boldsymbol{\kappa}) z_j(\boldsymbol{\kappa}) \Big) d\boldsymbol{\kappa} \geq 0\,.$$

Для выполнимости этого ограничения необходимо и достаточно, чтобы при любом $\boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{R}^3$ имело место $D^{(+)}_{ij}(\boldsymbol{\kappa}) z_i(\boldsymbol{\kappa}) z^*_j(\boldsymbol{\kappa}) + D^{(+)*}_{ij}(\boldsymbol{\kappa}) z^*_i(\boldsymbol{\kappa}) z_j(\boldsymbol{\kappa}) \geq 0$ для эрмитовской матрицы $D^{(+)}_{ij}(\boldsymbol{\kappa})$. Меняя индексы суммирования во втором слагаемом $i \Leftrightarrow j$ и пользуясь эрмитовостью матрицы, получаем, что $D^{(+)}_{ij}(\boldsymbol{\kappa}) z_i(\boldsymbol{\kappa}) z^*_j(\boldsymbol{\kappa}) \geq 0$. Таким образом, мы приходим к следующему утверждению

Теорема 3. *Для того чтобы случайное гауссовское поле $\mathbf{F}(\mathbf{x},t) = \mathbf{E}(\mathbf{x},t) + i\mathbf{H}(\mathbf{x},t)$ с нулевым средним значением обладало статистически независимыми и эквивалентными солеиоидальными составляющими $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, а также свойствами стохастических пространственной однородности и стационарности по времени необходимо и достаточно, чтобы его корреляционная функция $\tilde{K}_{i_1 i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,t_1;\boldsymbol{\kappa}_2,t_2)$ имела вид (22), где $D_{k_1,k_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,t_1;\boldsymbol{\kappa}_2,t_2) = \delta_{\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}}\delta_{\boldsymbol{\kappa}_2,\boldsymbol{\kappa}} D_{k_1,k_2}(\boldsymbol{\kappa};t_1,t_2)$, где $D_{k_1,k_2}(\boldsymbol{\kappa};t_1,t_2)$ определяется формулой (25) с неотрицательной эрмитовской матриц-функцией $D^{(+)}_{ij}(\boldsymbol{\kappa})$.*

4. Заключение. Непосредственным следствием наших рассмотрений в этой работе является вывод о том, что в рамках теории гауссовских случайных полей возможно построение модели стохастического электромагнитного ноля (в вакууме) с интегрируемой спектральной плотностью, то есть свободной от парадокса Рэлея-Джинса (отсутствие ультрафиолетовой катастрофы), что позволяет, в частности, построить теорию излучения абсолютно черного тела без использования понятия квантования электромагнитного ноля. При этом спектральная плотность энергии может иметь довольно произвольный (в частности, планковский) вид.

В самом деле, в рамках рассмотренного в работе и детально исследованного случая случайного электромагнитного поля, метод построения распределения вероятностного распределения которого описан в теореме 3, рассмотрим случайное гауссовское электромагнитное поле, которое, дополнительно, обладает свойством стохастической пространственной изотропии, когда $D_{ij}^{(+)}(\boldsymbol{\kappa}) = \delta_{ij} D(|\boldsymbol{\kappa}|)$ с $D(\xi) > 0$. При этом, ввиду (19), $\sum_{\boldsymbol{\kappa}} \boldsymbol{\kappa}^2 D(|\boldsymbol{\kappa}|) < \infty$. Это означает, ввиду формулы (22), что

$$8\pi W = K_{ii}(0,0) = \sum_{\boldsymbol{\kappa}} \tilde{K}_{ii}(\boldsymbol{\kappa}) = 4 \sum_{\boldsymbol{\kappa}} \boldsymbol{\kappa}^2 D(|\boldsymbol{\kappa}|) < \infty \,.$$

Литература

1. Борн М. Атомная физика / М.: Мир, 1965. – 492 с.
2. Рытов С.М. Теория электрических флуктуаций и теплового излучения / М.: Изд. АН СССР, 1953.
3. Рытов С.М., Татарский В.И., Кравцов Ю.А. Введение в статистическую радиофизику, ч.2 Случайные поля / М.: Наука, 1978. – 464 с.
4. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей / М.: Эдиториал УРСС, 2005. – 448 с.
5. Пугачев В.С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления / 2-е изд. / М.: Физ.-мат. лит., 1960. – 884 с.
6. Фат Лам Тан, Вирченко Ю.П. Стохастически однородные и изотропные магнитные поля // Belgorod State University Scientific Bulletin Mathematics & Physics. – 2013. – 19(162); 32. – С.176-183.
7. Лам Тан Фат, Вирченко Ю.П. Стохастически однородные и изотропные соленоидальные гауссовские поля // Тезисы зимней математической школы С.Г.Крейна / Воронеж: ВГУ, 2014. – С.204-208.

GAUSSIAN FLUCTUATION ELECTROMAGNETIC FIELD WITH QUADRATICALLY AVERAGE ALMOST-PERIODIC RANDOM REALIZATIONS

Lam Tan Phat, Yu.P. Virchenko

Belgorod State University,
Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail:virch@bsu.edu.ru

Abstract. Stochastic electromagnetic field that describes some thermal fluctuations is studied. Gaussian models of random electromagnetic field are built in frameworks of the general approach in statistical physics based on the expansion of the field on plane linear polarized waves in finite domain of the parallelepiped form with large linear size and using the thermodynamical limit. It is shown that some models of stochastic electromagnetic field with arbitrary correlation function may be construct by mathematically non-contradictory way. This function should be possessed the special supplementary condition which arises due to the transverse property of electromagnetic field.

Key words: fluctuation electromagnetic field, gaussian random field, Maxwell 's equations, stochastic model, correlation function, infinitely dimensional markovian process, quadratically average almost-periodic functions.