MSC 74F10

МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ ИЗ ВОДОЕМА В ГРУНТ

Н.С. Ерыгина

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, 308015, г. Белгород, e-mail: eryginan@bsu.edu.ru

Аннотация. Статья посвящена математической модели фильтрации жидкости из водоема в упругий пористый грунт под действием силы тяжести. Динамика жидкости описывается системой нестационарных уравнений Стокса для несжимаемой жидкости, а перемещение упругого скелета – уравнениями Ламе.

Ключевые слова: фильтрация жидкостей, уравнения Ламе и Стокса, усреднение периодических структур.

Введение. В настоящей работе выводятся макроскопические математические модели фильтрации жидкости из водоема в грунт, полученные усреднением точной математической модели описывающей данный процесс па микроскопическом уровне. Этот подход был раннее использован В. Ягером и А. Микеличем [1]- [3] для специальной геометрии порового пространства (несвязный твердый скелет) в пространстве $\mathbb{R}^2$ (плоский случай).

Задача решается в пространстве $\mathbb{R}^3$ для произвольной геометрии норового пространства используя методы, предложенные в работах А.М. Мейрманова [4]- [7].

В этих работах были введены безразмерные критерии физических процессов τ_0, μ_0, μ_1 и λ_0, характеризующие конкретный физический процесс. Так, например, медленной фильтрации жидкости в пористом упругом грунте соответствуют параметры $\tau_0 = 0$, $\mu_0 = 0$ и $\lambda_0 > 0$, а фильтрации жидкости в абсолютно твердом пористом грунте соответствуют параметры $\tau_0 = 0$, $\mu_0 = 0$ и $\lambda_0 = 0$.

В настоящей статье выводятся усредненные уравнения для случая $\mu_0 = 0$, $\tau_0 > 0$ и $\lambda_0 > 0$, после чего осуществляется предельный переход при $\tau_0 \to 0$.

1. Постановка задачи. Исследуемая область Q включает в себя область Ω^0 – водоем, область Ω – пористый грунт и их общую границу S^0: $Q = \Omega^0 \cup \Omega \cup S^0$. Область Q лежит в полупространстве $\{x_3 < 0\}$. Предполагается, что область Ω есть периодическое повторение элементарной ячейки $Y^\varepsilon = \varepsilon Y$, где $Y = (0,1)^3$, подобласть $Y_s \subset Y$ моделирует твердый скелет в Y, подобласть $Y_f \subset Y$ норовое пространство, а поверхность $\gamma = \partial Y_f \bigcap \partial Y_s$ границу «твердый скелет – поровое пространство». Твердый скелет Ω_s^ε есть периодическое повторение элементарной ячейки εY_s, поровое пространство Ω_f^ε – элементарной ячейки εY_f, а граница Γ^ε — периодическое повторение в Ω границы $\varepsilon\gamma$.

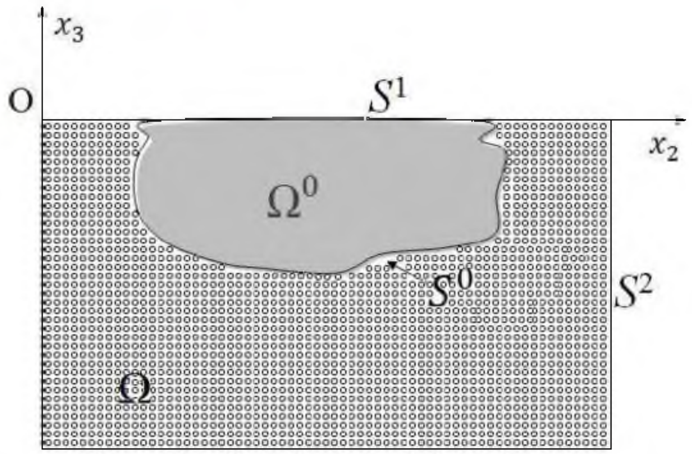

Рис. 1. Фильтрация из водоема в грунт.

Предполагается также, что часть S^1 внешней границы S области Q принадлежит плоскости $\{x_3 = 0\}$, $\boldsymbol{e} = -\boldsymbol{e}_3$,$S^2 = S\backslash\overline{S^1}$ является поверхностью класса C^2.

Движение жидкости в области Ω^0 при $t > 0$ описывается нестационарной системой уравнений Стокса

$$\nabla \cdot \boldsymbol{w}^\varepsilon = 0, \tag{1}$$

$$\tau_0 \varrho_f \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbb{P}_f + \varrho_f \boldsymbol{e}\,, \tag{2}$$

где

$$\mathbb{P}_f = \alpha_\mu \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\Big) - p\,\mathbb{I}\,,$$

а совместное движение упругого скелета и жидкости в Ω при $t > 0$ описывается уравнением неразрывности (1) и уравнением сохранения моментов

$$\tau_0 \varrho^\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbb{P} + \varrho^\varepsilon \boldsymbol{e}\,, \tag{3}$$

где

$$\mathbb{P} = \chi^\varepsilon \alpha_\mu \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\Big) + (1-\chi^\varepsilon)\lambda_0 \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}^\varepsilon) - p\,\mathbb{I}\,,$$

и

$$\varrho^\varepsilon = \varrho_f \chi^\varepsilon + \varrho_s (1-\chi^\varepsilon)\,. \tag{4}$$

На общей границе $S^0 = \partial\Omega \cap \partial\Omega^0$ при $t > 0$ выполняются условия непрерывности

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}^0 \\ \boldsymbol{x} \in \Omega^0}} \boldsymbol{w}^\varepsilon(\boldsymbol{x}, t) = \lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}^0 \\ \boldsymbol{x} \in \Omega}} \boldsymbol{w}^\varepsilon(\boldsymbol{x}, t)\,, \tag{5}$$

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}^0 \\ \boldsymbol{x} \in \Omega^0}} \mathbb{P}_f(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0) = \lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}^0 \\ \boldsymbol{x} \in \Omega}} \mathbb{P}(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0)\,, \tag{6}$$

для перемещений и нормальных напряжений. Здесь $\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w})$ – симметрическая часть градиента $\nabla\boldsymbol{w}$, $\mathbb{I}$ – единичный тензор, $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0)$ — вектор внешней нормали к границе S^0 в точке $\boldsymbol{x}^0\in S^0$, $\boldsymbol{e}=-\boldsymbol{e}_3$.

На границе S^1 при $t>0$ задается условие Неймана

$$\mathbb{P}_f(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{n}=-p^{\,0}(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{n}\,, \tag{7}$$

а на границе S^2 при $t>0$ — условие Дирихле

$$\boldsymbol{w}^\varepsilon(\boldsymbol{x},t)=0\,. \tag{8}$$

Задача замыкается начальными условиями

$$\boldsymbol{w}^\varepsilon(\boldsymbol{x},0)=\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}(\boldsymbol{x},0)=0\;,\qquad \boldsymbol{x}\in Q\,. \tag{9}$$

Характеристическая функция $\chi^\varepsilon(\boldsymbol{x})$ области Ω_f^ε определяется выражением

$$\chi^\varepsilon(\boldsymbol{x})=(1-\zeta)\chi\Big(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\Big)\,,$$

где $\zeta=\zeta(\boldsymbol{x})$ — характеристическая функция области Ω^0 в Q, $\chi(\boldsymbol{y})$ — характеристическая функция Y_f (жидкой части элементарной ячейки) [8].

Предполагается, что существуют предельные значения

$$\lim_{\varepsilon\to0}\alpha_\mu(\varepsilon)=\mu_0\,,\quad \lim_{\varepsilon\to0}\frac{\alpha_\mu(\varepsilon)}{\varepsilon^2}=\mu_1\,.$$

2. Основные результаты.

Определение. *Будем говорить, что функции* $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon,\,p^{\,\varepsilon}\}$ *такие, что*

$$p^{\,\varepsilon}\in L_2(Q_T)\,,\qquad \boldsymbol{w}^\varepsilon\,,\ \mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}^\varepsilon)\,,\ (\zeta+(1-\zeta)\chi^\varepsilon)\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\Big)\in\mathbf{L}_2(Q_T)\,,$$

являются обобщенным решением задачи (1)-(9), *если они удовлетворяют уравнению неразрывности* (1) *почти всюду в области* $Q\times(0,T)$, *граничному условию* (8), *начальному условию* (9) *для функции* $\boldsymbol{w}^\varepsilon$ *и интегральному тождеству*

$$\int_0^T\int_Q\Big(-\tau_0\tilde{\varrho}^{\,\varepsilon}\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}+\big(\zeta\mathbb{P}_f+(1-\zeta)\mathbb{P}\big):\mathbb{D}(x,\boldsymbol{\varphi})\Big)dxdt+$$
$$\int_0^T\int_Q\Big(\tilde{\varrho}^{\,\varepsilon}\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\varphi}-\nabla\cdot(\boldsymbol{\varphi}\,p^0)\Big)dxdt=0\,. \tag{10}$$

для любых гладких функций $\boldsymbol{\varphi}$ *таких, что* $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t)=0$ *на границе* S_T^2 *и* $\varphi(\boldsymbol{x},T)=0$, $\boldsymbol{x}\in Q$.

Здесь $\tilde{\varrho}^{\,\varepsilon}=\big(\zeta+(1-\zeta)\chi^\varepsilon\big)\varrho_f+(1-\zeta)(1-\chi^\varepsilon)\varrho_s$.

Теорема 1. *Пусть*

$$p^0 = p^0(t)\,.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и произвольного промежутка времени $[0;T]$ существует единственное обобщенное решение задачи (1)-(9) и справедлива оценка

$$\max_{0\leq t\leq T}\int_Q\Big(\tau_0^2\Big|\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2}\Big|^2+\tau_0\Big|\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\Big|^2+\lambda_0(1-\zeta)(1-\chi^\varepsilon)|\mathbb{D}(\boldsymbol{x}\,,\boldsymbol{w}^\varepsilon)|^2\Big)dx+$$
$$\int_0^T\int_Q\Big(|p^\varepsilon|^2+\alpha_\mu(\zeta+(1-\zeta)\chi^\varepsilon)\Big|\mathbb{D}\Big(\boldsymbol{x},\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\Big)\Big|^2\Big)\,dx\,dt\leqslant C_0\,,\quad(11)$$

где C_0 – произвольная константа, не зависящая от τ_0 и ε.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1,*

$$\mu_0=0,\quad 0<\lambda_0,\,\tau_0<\infty\,,\quad \mu_1=\infty\,,$$

функции $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon, p^\varepsilon\}$ являются обобщенным решением задачи (1)-(9) и $\boldsymbol{w}_s^\varepsilon=\mathbb{E}_{\Omega_s^\varepsilon}(\boldsymbol{w}^\varepsilon)$ является продолжением из области Ω_s^ε в область Ω .

Тогда последовательности $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon\}$, $\Big\{\dfrac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\Big\}$, $\Big\{(1-\zeta)\dfrac{\partial^2\boldsymbol{w}_s^\varepsilon}{\partial t^2}\Big\}$ и $\{p^\varepsilon\}$ сходятся слабо в $\mathbf{L}_2(Q_T)$ и $L_2(Q_T)$ к функциям $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, $\dfrac{\partial^2\boldsymbol{w}_s}{\partial t^2}$ и p соответственно при $\varepsilon\to 0$. Последовательность $\{\boldsymbol{w}_s^\varepsilon\}$ сходится слабо в $\mathbf{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$ к функции $\boldsymbol{w}_s$ при $\varepsilon\to 0$. Предельное давление p и предельная скорость жидкости $\boldsymbol{v}$ удовлетворяет системе

$$\tau_0\varrho_f\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+\nabla p=\varrho_f\boldsymbol{e}\,,\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{v}=0\,,\qquad(12)$$

в области Ω_0 при $t>0$. В области Ω при $t>0$ предельные функции $\boldsymbol{w}_s$ и p являются решением усредненной системы, состоящей из усредненного уравнения баланса

$$\tau_0\hat{\varrho}\frac{\partial^2\boldsymbol{w}}{\partial t^2}=\nabla\cdot\mathbb{P}_0^{(s)}+\hat{\varrho}\,,\ \boldsymbol{e}\,,\qquad(13)$$

$$\mathbb{P}_0^{(s)}=\lambda_0\mathfrak{N}_0^s:\mathbb{D}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})-p\,\mathbb{I}\qquad(14)$$

и уравнения неразрывности

$$\nabla\cdot\boldsymbol{w}_s=0\,.\qquad(15)$$

Это решение удовлетворяет условию непрерывности

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^0\in S^0\\ \boldsymbol{x}\in\Omega}}\boldsymbol{w}_s(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0)=\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^0\in S^0\\ \boldsymbol{x}\in\Omega_0}}\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0),\qquad(16)$$

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^0\in S^0\\ \boldsymbol{x}\in\Omega}}\mathbb{P}_0^{(s)}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0)=-\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^0\in S^0\\ \boldsymbol{x}\in\Omega_0}}p(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0)\qquad(17)$$

на общей границе S^0, граничному условию

$$\boldsymbol{w}_s = 0\,, \tag{18}$$

на границе S^2, граничному условию

$$p(\boldsymbol{x},t) = p_0(t)\,, \tag{19}$$

на границе $S^1_0 = S^1 \cap \overline{\Omega_0}$ и граничному условию

$$\mathbb{P}^{(s)}_0(\boldsymbol{x},t)\cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0) = -p_0(t)\cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0)\,, \tag{20}$$

на границе $S^1_1 = S^1 \cap \overline{\Omega}$.

В (13)-(20) $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0)$ — единичный вектор номали к S^0 (или S^1_1) в точке $\boldsymbol{x}^0 \in S^0$ (или S^1_1),

$$\hat{\varrho} = m\varrho_f + (1-m)\varrho_s\,, \quad m = \int_Y \chi(y)dy\,,$$

$\mathfrak{N}^s_0$ — симметричный положительно определенный тензор четвертого порядка, который определяется из решения вспомогательной задачи на элементарной ячейке.

Теорема 3. *Пусть в условиях теоремы 2 $\tau_0 = 1/n$ и $p^{(n)}$, $\boldsymbol{w}^{(n)}$ и $\boldsymbol{w}^n_s$ — обобщенное решение задачи (12)-(20). Тогда последовательность $\{p^n\}$ сходится слабо в $L_2(Q_T)$ к функции p и последовательность $\{\boldsymbol{w}^n_s\}$ сходится слабо в $\mathbf{W}^{1,0}_2(\Omega_T)$ к функции $\boldsymbol{w}_s$ при $n\to\infty$. Предельное давление жидкости p в области Ω_0 при $t>0$ равно гидростатическому давлению*

$$p(\boldsymbol{x},t) = p^0(t) - \varrho_f x_3 \equiv p_0(\boldsymbol{x},t)\,, \tag{21}$$

Предельные функции являются решением усредненной системы в области Ω при $t>0$, состоящей из усредненного уравнения баланса

$$\nabla\cdot\mathbb{P}^{(s)}_0 + \hat{\varrho}\,\boldsymbol{e} = 0\,, \tag{22}$$

и уравнения неразрывности (15). Это решение удовлетворяет граничному условию (18) на границе S^2, граничному условию (20) на границе S^1_1 и граничному условию

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^0\\ \boldsymbol{x}\in\Omega}} \mathbb{P}^{(s)}_0(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0) = -p_0(\boldsymbol{x}^0,t)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0)\,, \tag{23}$$

на общей границе S^0. При этом тензор $\mathbb{P}^{(s)}_0(\boldsymbol{x},t)$ определяется как и в формулировке предыдущей теоремы.

3. Доказательство теоремы 1. Доказательство теоремы основывается на энергетических тождествах

$$\frac{1}{2}\int_Q\Big(\tau_0\tilde{\varrho}^\varepsilon\Big|\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}(\boldsymbol{x},t)\Big|^2 + \lambda_0(1-\zeta)(1-\chi^\varepsilon)|\mathbb{D}\big(x,\boldsymbol{w}^\varepsilon(\boldsymbol{x},t)\big)|^2\Big)dx +$$
$$+\alpha_\mu\int_0^t\int_Q\big(\zeta+(1-\zeta)\chi^\varepsilon\big)\Big|\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial\tau}(\boldsymbol{x},\tau)\Big)\Big|^2dxd\tau =$$
$$= \int_0^t\int_Q\tilde{\varrho}^\varepsilon\boldsymbol{e}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}(\boldsymbol{x},\tau)dxd\tau\,, \tag{24}$$

$$\frac{1}{2}\int_Q\Big(\tau_0\tilde{\varrho}^{\,\varepsilon}\Big|\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2}(\boldsymbol{x},t)\Big|^2+\lambda_0(1-\zeta)(1-\chi^\varepsilon)\Big|\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}(\boldsymbol{x},t)\Big)\Big|^2\Big)dx+$$
$$\alpha_\mu\int_0^t\int_Q\big(\zeta+(1-\zeta)\chi^\varepsilon\big)\Big|\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial\tau^2}(\boldsymbol{x},\tau)\Big)\Big|^2dxd\tau=$$
$$\frac{1}{2}\int_Q\tau_0\tilde{\varrho}^{\,\varepsilon}\Big|\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2}\Big|^2(\boldsymbol{x},0)dx=I_0\,. \quad (25)$$

Для нахождения решения задачи (1)-(9) используем метод Галеркина. Этот метод показывает, что при любом $t\geqslant 0$ и произвольной солепоидальпой функции $\boldsymbol{\varphi}\in W_2^1(Q)$, равной пулю при $\boldsymbol{x}\in S^2$, выполняется равенство

$$\int_Q\tau_0\tilde{\varrho}^{\,\varepsilon}\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})dx+\int_Q\big(\zeta\mathbb{P}_f+(1-\zeta)\mathbb{P}\big)(\boldsymbol{x},t):\mathbb{D}\big(x,\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})\big)dx=$$
$$\int_Q\tilde{\varrho}^{\,\varepsilon}\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})dx\,.$$

При $t=0$ $\zeta\mathbb{P}_f+(1-\zeta)\mathbb{P}=0$ в силу начального условия. В итоге получим

$$\int_Q\tau_0\tilde{\varrho}^{\,\varepsilon}\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2}(\boldsymbol{x},0)\cdot\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})dx=\int_Q\tilde{\varrho}^{\,\varepsilon}\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})dx\,.$$

Согласно (1), $\dfrac{\partial^2\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2}(\boldsymbol{x},0)$ является солепоидальпой функцией в Q. Возьмем в качестве пробной функции функцию

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})=\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2}(\boldsymbol{x},0)\,,$$

$$\int_Q\tau_0\tilde{\varrho}^{\,\varepsilon}\Big|\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2}(\boldsymbol{x},0)\Big|^2dx=\int_Q\tilde{\varrho}^{\,\varepsilon}\boldsymbol{e}\cdot\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2}(\boldsymbol{x},0)dx\,.$$

Тогда

$$\int_Q\tau_0\tilde{\varrho}^{\,\varepsilon}|\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2}(\boldsymbol{x},0)|^2dx\leqslant\frac{C_0}{\tau_0}\,.$$

Последнее отношение и (25) доказывает оценку для производной $\dfrac{\partial^2\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2}$ в (11).

Для оценки правой части (24) используется представление

$$\tilde{\varrho}^{\,\varepsilon}=\varrho_f+(1-\zeta)(1-\chi^\varepsilon)(\varrho_s-\varrho_f),\quad \boldsymbol{e}=-\nabla x_3\,,$$

формула интегрирования по частям и уравнение неразрывности (1)

$$\varrho_f\int_Q\boldsymbol{e}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}dx=-\varrho_f\int_Q(\nabla x_3)\cdot\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}dx=0\,.$$

Тогда

$$I=\int_Q \tilde{\varrho}^{\varepsilon}\boldsymbol{e}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}dxd\tau=-\varrho_f\int_Q(\nabla\,x_3)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}dx+(\varrho_s-\varrho_f)\int_\Omega(1-\chi^{\varepsilon})\boldsymbol{e}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}dx=$$
$$=(\varrho_s-\varrho_f)\int_\Omega(1-\chi^{\varepsilon})\boldsymbol{e}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}dx\,.$$

Используя неравенства Гельдера и Коши

$$I\leqslant\Big(\int_\Omega(\varrho_s-\varrho_f)^2dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_\Omega(1-\chi^{\varepsilon})\Big|\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\Big|^2dx\Big)^{\frac{1}{2}}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{(\varrho_s-\varrho_f)^2}{2\delta}|\Omega|+\frac{\delta}{2}\int_\Omega(1-\chi^{\varepsilon})\Big|\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\Big|^2dx\,.$$

Пусть $\boldsymbol{w}^{\varepsilon}_s=\mathbb{E}_{\Omega^{\varepsilon}_s}\big(\boldsymbol{w}^{\varepsilon}\big)$ — продолжение функции $\boldsymbol{w}^{\varepsilon}$ из области Ω^{ε}_s в область Ω (Здесь используются результаты о продолжении полученные C. Conca [9]). Тогда из неравенства Пуанкаре-Фридрихса

$$\int_\Omega(1-\chi^{\varepsilon})\Big|\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\Big|^2dx=\int_\Omega(1-\chi^{\varepsilon})\Big|\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}_s}{\partial t}\Big|^2dx\leqslant C\int_\Omega(1-\chi^{\varepsilon})\Big|\nabla\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}_s}{\partial t}\Big|^2dx$$

и неравенства Корна

$$\int_\Omega(1-\chi^{\varepsilon})\Big|\nabla\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}_s}{\partial t}\Big|^2dx\leqslant C\int_\Omega(1-\chi^{\varepsilon})\Big|\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}_s}{\partial t}\Big)\Big|^2dx=C\int_Q(1-\chi^{\varepsilon})(1-\zeta)\Big|\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\Big)\Big|^2dx$$

получаем соотношение

$$I\leqslant\frac{(\varrho_s-\varrho_f)^2}{2\delta}|\Omega|+C\frac{\delta}{2}\int_Q(1-\chi^{\varepsilon})(1-\zeta)\Big|\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\Big)\Big|^2dx\,,$$

которое вместе с (25) доказывает (11).

Для получения оценки па давление p^{ε} интегральное тождество (10) записывается в виде:

$$\int_{Q_T}p^{\varepsilon}\nabla\cdot\varphi\,dx\,dt=\int_{Q_T}\Big(\big(\zeta+(1-\zeta)\chi^{\varepsilon}\big)\alpha_\mu\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\Big)+$$
$$+(1-\zeta)(1-\chi^{\varepsilon})\lambda_0\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}^{\varepsilon})\Big):\mathbb{D}(x,\varphi)dx\,dt-\int_{Q_T}\widetilde{\rho}^{\varepsilon}\mathrm{e}\cdot\varphi\,dx\,dt-\int_{Q_T}p^0\nabla\varphi\,dx\,dt\,.$$

Такое представление и оценка (11) позволяют записать неравенство

$$\Big|\int_{Q_T}p^{\varepsilon}\nabla\cdot\varphi\,dx\,dt\Big|\leqslant C\Big(\int_{Q_T}|\nabla\varphi|^2\,dx\,dt\Big)^{\frac{1}{2}}.\qquad(26)$$

Далее в качестве пробной функции выбирается функция $\varphi(\boldsymbol{x},t)$, удовлетворяющая условиям:

$$\nabla\cdot\varphi=p^{\varepsilon}\quad \text{и}\quad \int_{Q_T}|\nabla\varphi|^2dx\,dt\leqslant\int_{Q_T}|p^{\varepsilon}|^2dx\,dt\,.$$

Для этого представим ее в виде суммы $\varphi=\varphi_0+\nabla\psi$, где

$$\Delta\psi=p^{\varepsilon},\ x\in Q;\quad \psi|_{S_2}=0\,,\ \frac{\partial\psi}{\partial x_3}\bigg|_{S_1}=0; \tag{27}$$

$$\nabla\cdot\varphi_0=0\,,\ x\in Q\,;\quad \varphi_0+\nabla\psi=0\,,\ x\in S_2\,. \tag{28}$$

Согласно результатам, изложенным в монографиях О.А. Ладыженской [10] и [11], каждая из задач (27), (28) имеет единственное решение, причем справедливы оценки

$$\psi\in L_2\big((0,T);W_2^2(Q)\big),\quad \int_0^T\big(\|\psi\|_2^{(2)}\big)^2dt\leqslant C\int_{Q_T}(p^{\varepsilon})^2dx\,dt\,,$$

$$\varphi_0\in L_2\big((0,T);W_2^1(Q)\big),\quad \int_0^T\big(\|\varphi_0\|_2^{(1)}\big)^2dt\leqslant C\int_{Q_T}\big(\|\psi\|_2^{(2)}\big)^2dt\,.$$

Тогда неравенство (26) примет вид

$$\left|\int_{Q_T}(p^{\varepsilon})^2\,dx\,dt\right|\leqslant C\Big(\int_{Q_T}(p^{\varepsilon})^2\,dx\,dt\Big)^{\frac{1}{2}}\,,$$

и, окончательно, получим

$$\Big(\int_{Q_T}(p^{\varepsilon})^2\,dx\,dt\Big)^{\frac{1}{2}}\leqslant C\,.$$

Доказательство теоремы 2. Основываясь на оценках (11) заключаем, что при $\varepsilon\to 0$ имеет место:

$$p^{\varepsilon}\to p\ \text{ слабо в } L_2(Q_T)\,,$$

$$\boldsymbol{w}^{\varepsilon}\to\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t)\ \text{ слабо и двухмасштабно в } \mathbf{L}_2(Q_T)\,,$$

$$\boldsymbol{w}_s^{\varepsilon}\to\boldsymbol{w}_s(\boldsymbol{x},t)\ \text{ слабо и двухмасштабно в } \mathbf{L}_2(Q_T)\,,$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\to\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t)\ \text{ слабо и двухмасштабно в } \mathbf{L}_2(Q_T)\,,$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{w}_s^{\varepsilon}}{\partial t}\to\frac{\partial\boldsymbol{w}_s}{\partial t}(\boldsymbol{x},t)\ \text{ слабо и двухмасштабно в } \mathbf{L}_2(Q_T)\,,$$

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t^2}\to\frac{\partial\boldsymbol{w}^2}{\partial t^2}(\boldsymbol{x},t)\ \text{ слабо и двухмасштабно в } \mathbf{L}_2(Q_T)\,,$$

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{w}_s^{\varepsilon}}{\partial t^2}\to\frac{\partial\boldsymbol{w}_s^2}{\partial t^2}(\boldsymbol{x},t)\ \text{ слабо и двухмасштабно в } \mathbf{L}_2(Q_T)\,,$$

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{w}_s(\boldsymbol{x},t),\ \boldsymbol{x}\in\Omega,\ t>0\,,$$

$$\mathbb{D}\big(x,\boldsymbol{w}_s^{\varepsilon}\big)\to\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}_s)+\mathbb{D}\big(y,\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)\big)\ \text{ двухмасштабно в } \mathbf{L}_2(Q_T)\,.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ в интегральном тождестве (10) с пробной функцией $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}, t)$, равной нулю при $t = T$ и на S^2, мы получаем макроскопическое уравнение баланса моментов в форме интегрального тождества

$$\int_0^T \int_Q \nabla \cdot (\boldsymbol{\varphi}\, p^0) dxdt - \int_0^T \int_\Omega \big(\tau_0 \hat{\varrho} \frac{\partial \boldsymbol{w}_s}{\partial t} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} + \hat{\varrho}\, \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{\varphi}\big) dxdt +$$
$$\int_0^T \int_\Omega \Big(\lambda_0\big((1-m)\mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}_s) + \langle \mathbb{D}(x, \boldsymbol{U})\rangle_{Y_s}\big) - p\,\mathbb{I}\Big) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{\varphi}) dxdt =$$
$$\int_0^T \int_{\Omega^0} \big(\tau_0 \varrho_f \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} + \varrho_f\, \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{\varphi} + p\,(\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi})\big) dxdt\,.$$

Можно показать, что

$$(1-m)\mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}_s) + \langle \mathbb{D}(x, \boldsymbol{U})\rangle_{Y_s} = \mathfrak{N}_0^s : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}_s)\,.$$

Таким образом, последнее тождество примет вид

$$\int_0^T \int_Q \nabla \cdot (\boldsymbol{\varphi}\, p^0) dxdt - \int_0^T \int_\Omega \big(\tau_0 \hat{\varrho} \frac{\partial \boldsymbol{w}_s}{\partial t} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} + \hat{\varrho}\, \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{\varphi}\big) dxdt +$$
$$\int_0^T \int_\Omega \big(\lambda_0 \mathfrak{N}_0^s : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}_s) - p\,\mathbb{I}\big) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{\varphi}) dxdt =$$
$$\int_0^T \int_{\Omega^0} \big(\tau_0 \varrho_f \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} + \varrho_f\, \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{\varphi} + p\,(\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi})\big) dxdt\,. \quad (29)$$

Уравнение неразрывности (1) для $\boldsymbol{w}^\varepsilon$ преобразуется в уравнение неразрывности в форме интегрального тождества

$$\int_0^T \int_Q \nabla \xi \cdot \boldsymbol{w} dxdt = 0 \quad (30)$$

для любой гладкой функции ξ равной нулю па $S^1 \times (0, T)$. Это тождество предполагает уравнение неразрывности в (12), уравнение неразрывности (15), и условие непрерывности (16) на общей границе S^0.

Интегральное тождество (29) включает динамическое уравнение (12), динамическое уравнение (13), условие непрерывности (17) на общей границе S^0, граничное условие (20) на границе S_1^1 и граничное условие (19) на границе S_0^1.

Получим формулу для нахождения тензора $\mathfrak{N}_0^s$. Пусть $\mathbf{U}_0^{ij} \in \mathbb{W}_2^1(Y_s)$ решение задачи

$$\nabla_y \cdot \big((1-\chi)(\mathbb{D}(y, \mathbf{U}_0^{(i,j)}) + \mathbb{J}^{i,j} - \mathbf{P}_0^{(i,j)}\mathbf{I})\big) = 0\,, \qquad (1-\chi)\nabla_y \cdot \mathbf{U}_0^{(i,j)} = 0\,, \quad \boldsymbol{y} \in Y$$

такое, что $\langle \mathbf{U}_0^{(i,j)}\rangle_{Y_s} = 0$ и пусть

$$\mathbf{U} = \sum_{i,j=1}^{3} \mathbf{U}_0^{(ij)}(\boldsymbol{y}) D_{ij}(\boldsymbol{x}, t),$$

где

$$D_{ij}(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big)(\boldsymbol{x},t)\,,\qquad \boldsymbol{w}_s=(u_1,u_2,u_3),$$

$$\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}_s)=\sum_{ij=1}^{3}D_{ij}\mathbb{J}^{ij}\,.$$

Таким образом,

$$\mathbb{D}(y,\mathbf{U})=\sum_{ij=1}^{3}\mathbb{D}(y,\mathbf{U}_0^{ij})D_{ij}=\sum_{ij=1}^{3}\mathbb{D}(y,\mathbf{U}_0^{ij})(\mathbb{J}:\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}_s))=$$

$$=(\sum_{ij=1}^{3}\mathbb{D}(y,\mathbf{U}_0^{ij})\otimes\mathbb{J}^{ij}):\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}_s)=\mathbb{B}_0^s(\boldsymbol{y}):\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}_s)$$

и

$$\mathfrak{N}_0^s=(1-m)\sum_{i,j=1}^{3}\mathbb{J}^{ij}\otimes\mathbb{J}^{ij}+\sum_{i,j=1}^{3}\langle\mathbb{D}(y,\mathbf{U}_0^{(i,j)})\rangle_{Y_s}\otimes\mathbb{J}^{ij}.$$

Свойства тензора $\mathfrak{N}_0^s$ следуют из интегрального тождества

$$\int_{Y_s}\Big(\mathbb{D}(y,\mathbf{U}_0^{ij}):\mathbb{D}(y,\mathbf{U}_0^{kl})+\mathbb{J}^{ij}:\mathbb{D}(y,\mathbf{U}_0^{kl})\Big)dy=0\,.$$

Доказательство теоремы 3. Заметим, что оценки (11) справедливы для функций $p^{(n)}$ и $\boldsymbol{w}_s^{(n)}$. Тогда из (11) и (12) следует, что $\nabla\,p^{(n)}\in L_2\big((0,T);L_2(\Omega^0)\big)$ и справедливы следующие оценки

$$\max_{0\le t\le T}\int_Q\Big(\frac{1}{n^2}\zeta\Big|\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^{(n)}}{\partial t^2}\Big|^2+\frac{1}{n^2}(1-\zeta)\Big|\frac{\partial^2\boldsymbol{w}_s^{(n)}}{\partial t^2}\Big|^2\Big)dx+$$
$$\max_{0\le t\le T}\int_Q\Big(\frac{1}{n}\zeta\Big|\frac{\partial\boldsymbol{w}^{(n)}}{\partial t}\Big|^2+\frac{1}{n}(1-\zeta)\Big|\frac{\partial\boldsymbol{w}_s^{(n)}}{\partial t}\Big|^2+\lambda_0(1-\zeta)|\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}_s^{(n)})|^2\Big)dx+$$
$$\int_0^T\int_Q\Big(|p^{(n)}|^2+\zeta\,|\nabla\,p^{(n)}|^2\Big)dxdt\leqslant C_0\,.\quad(31)$$

Переписывая (29) в виде

$$\int_0^T\int_Q\nabla\cdot(\boldsymbol{\varphi}\,p^0)dxdt-\int_0^T\int_\Omega\Big(\frac{1}{n}\hat{\varrho}\frac{\partial\boldsymbol{w}_s^{(n)}}{\partial t}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}+\hat{\varrho}\,\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\varphi}\Big)dxdt+$$
$$\int_0^T\int_\Omega\big(\lambda_0\mathfrak{N}_0^s:\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}_s^{(n)})-p^{(n)}\,\mathbb{I}\big):\mathbb{D}(x,\boldsymbol{\varphi})dxdt=$$
$$\int_0^T\int_{\Omega^0}\Big(\frac{1}{n}\varrho_f\frac{\partial\boldsymbol{w}^{(n)}}{\partial t}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}+\varrho_f\,\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\varphi}+p^{(n)}\,(\nabla\cdot\boldsymbol{\varphi})\Big)dxdt\,,\quad(32)$$

заключаем, что

$$p^{(n)}(\boldsymbol{x},t) = p^0(t)\,, \qquad \boldsymbol{x} \in S_0^1\,, \quad t>0\,, \tag{33}$$

как след функции из $L_2\big((0,T);W_2^1(\Omega^0)\big)$.

Из оценок (31) следует, что из последовательности $\{n\}$ можно выделить такие номера, что подпоследовательности (для простоты оставим старое обозначение) сходятся

$$\frac{1}{n}\hat{\varrho}\frac{\partial \boldsymbol{w}_s^{(n)}}{\partial t} \to 0 \qquad \text{сильно} \qquad L_2\big((0,T);L_2(\Omega)\big)\,,$$

$$\frac{1}{n}\varrho_f\frac{\partial \boldsymbol{w}^{(n)}}{\partial t} \to 0 \qquad \text{сильно} \qquad L_2\big((0,T);L_2(\Omega^0)\big)\,,$$

$$\nabla\, p^{(n)} \rightharpoonup \nabla\, p_0\,, \quad p^{(n)} \rightharpoonup p_0 \qquad \text{слабо} \qquad L_2\big((0,T);L_2(\Omega^0)\big)\,,$$

и

$$p^{(n)} \rightharpoonup p\,, \quad \boldsymbol{w}_s^{(n)} \rightharpoonup \boldsymbol{w}_s\,, \quad \nabla\,\boldsymbol{w}_s^{(n)} \rightharpoonup \nabla\,\boldsymbol{w}_s \qquad \text{слабо} \qquad L_2\big((0,T);L_2(\Omega)\big)$$

при $n\to\infty$.

Переходя к пределу в (32) и в (30) при $n\to\infty$, получим интегральное тождество

$$\int_0^T\int_Q \nabla\cdot(\boldsymbol{\varphi}\,p^0)dxdt - \int_0^T\int_{\Omega^0}\big(\varrho_f\,\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\varphi} + p_0\,(\nabla\cdot\boldsymbol{\varphi})\big)dxdt +$$
$$\int_0^T\int_\Omega\Big(\big(\lambda_0\mathfrak{N}_0^s : \mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}_s) - p\,\mathbb{I}\big) : \mathbb{D}(x,\boldsymbol{\varphi}) - \hat{\varrho}\,\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\varphi}\Big)dxdt = 0\,, \tag{34}$$

и уравнение неразрывности (15).

Интегральное тождество (34) очевидно, содержит (20)-(23).

Литература

1. Jäger W., Mikelić A. On the flow conditions at the boundary between a porous medium and an impervious solid // in "Progress in PDE: the Metz surveys 3", eds. M. Chipot, J. Saint Jean Paulin et I. Shafrir, Pitman reseach Notes in Mathematics / London: Longman Scintific and Technical, 1994. – №314. – P.145-161.
2. Jäger W., Mikelić A. On the boundary conditions at the contact interface between a porous medium and a free fluid // Ann. Sc. norm. Super. Pisa, Cl, Sci.-Ser. IV. – 1996. – XXIII, Fasc. 3. – P.403-465.
3. Jäger W., Mikelić A. On the boundary conditions at the contact interface between two porous media // in "PDE, Theory and numerical solution", eds. W. Jäger, J. Nečas, O. John, K. Najzar and J. Stará, Chapman and Hall/CRC Research notes in Math. / London: CRS Press, 1999. – №406. – P.175-186.
4. Meirmanov A. Nguetseng's two-scale convergence Method for filtration and seismic acoustic problems in elastic porous media // Siberian Mathematical Journal 2007. – 48. –№. 3. – P.519-538.
5. Meirmanov A. Homogenized models for filtration and for acoustic wave propagation in thermoelastic porous media // Euro. Jnl. of Applied Mathematics. – 2008. – 19. – P.259-284.
6. Meirmanov A. Double porosity models in incompressible poroelastic media // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. – 2010. – 20. – №4. – P.635-659.

7. Meirmanov A. A description of seismic acoustic wave propagation in porous media via homogenization // SIAM J. Math. Anal. – 2008. – 40. – №3. – P.1272-1289.
8. Гриценко С.А. Ерыгина Н.С. О корректности задачи фильтрации из водоема в грунт: случай вязкоупругой фильтрации // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. – 2013. – №5;(148). – Вып.30. – С.142-153.
9. Conca C. On the application of the homogenization theory to a class of problems arising in fluid mechanics // Math. Pures et Appl. – 1985. – 64. – P.31-75.
10. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / М.: Наука, 1970. – 288 с.
11. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики / М.: Наука, 1973. – 408 с.

MACROSCOPIC MODELS OF LIQUID FILTRATION FROM RESERVOIR INTO POROUS MEDIUM

N.S. Erygina

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: eryginan@bsu.edu.ru

Abstract. Filtration from reservoir into porous medium under gravity is investigated. The motion of the liquid is governed by the non-stationary Stokes' system and the joint motion of the poroelastic medium is governed by the Lame system.

Key words: filtration of liquids, homogenization, Lame's and Stokes' equations.