КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

MSC 41A05

ПОВЕДЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ УЗЛОВЫХ ФУНКЦИЙ, ПОСТРОЕННЫХ ИЗ РАВНОМЕРНЫХ СДВИГОВ ФУНКЦИЙ ГАУССА И ЛОРЕНЦА

Л.А. Минин, С.М. Ситник, С.Н. Ушаков

Воронежский государственный университет,
Университетская пл., 1, Воронеж, 394000, Россия, e-mail: mininla@mail.ru;
Воронежский институт МВД России,
пр. Патриотов 53, Воронеж, 394065, Россия, e-mail: mathsms@yandex.ru

Аннотация. В статье рассматриваются аппроксимации функций при помощи целочисленных сдвигов функций Гаусса и функций Лоренца. Исследованы свойства монотонности коэффициентов разложений по указанным системам, приведены результаты численных расчётов коэффициентов разложений.

Ключевые слова: функции Лоренца, функции Гаусса, интерполяция.

Рассмотрим задачу о приближении достаточно произвольной функции $f(t)$ в виде ряда $g(t)$ по системе целочисленных сдвигов функции Гаусса (квадратичной экспоненты с параметрами) или функции Лоренца. Рассматриваемые разложения имеют вид

$$g(t)=\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} f_k\cdot F(t-k)\,,$$

где $F(t)$ — некоторая функция, по целочисленным сдвигам которой производится разложение. Построенная функция должна совпадать с исходной во всех целых точках

$$g(m)=f(m)\,,\quad m\in\mathbb{Z}\,.$$

Известны три подхода к решению поставленной задачи. При первом подходе решение ищется с помощью специальных функций, а именно тета–функций Якоби [2]. Как показано в [1,3–4], несмотря на теоретическую ценность этого подхода, он не имеет вычислительных перспектив, так как связан с делением на чрезвычайно малые знаменатели. Другой подход разрабатывался в [1,4], он основан на применении дискретного преобразования Фурье (ДПФ). Третий приближённый метод предложен в [5-7] и основан на сведении задачи к решению конечных систем линейных уравнений.

При всей важности численных методов, для данного класса разложений имеется достаточное число аналитических задач, решения которых до сих пор не получены. Например, в работе [9] вычислены константы Рисса для систем функций Гаусса и Лоренца. В данной заметке исследуются свойства монотонности коэффициентов разложения.

Рассматриваются системы целочисленных сдвигов функции Гаусса $F(t)=G_\sigma(t)$ и функции Лоренца $F(T)=L_s(t)$,

$$G_\sigma(t)=\exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)\,,\quad L_s(t)=\frac{s^2}{t^2+s^2}\,,$$

с параметрами $\sigma > 0$ и $s > 0$.

Задачу интерполяции для таких систем удобно решать с помощью узловой функции. Функция $\widetilde{\varphi}(t)$ называется узловой, если для нее выполнена система равенств

$$\widetilde{\varphi}(m) = \delta_{0m}\,, \quad m \in \mathbb{Z}\,,$$

где δ_{0m} – символ Кронекера. Узловую функцию построенную из сдвигов функции Гаусса обозначим через $\widetilde{G}_\sigma(t)$, а из сдвигов функции Лоренца – через $\widetilde{L}_s(x)$:

$$\widetilde{G}_\sigma(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{G,k} G_\sigma(t-k)\,, \quad \widetilde{L}_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{L,k} L_s(t-k)\,.$$

Для коэффициентов $d_{G,k}$ известна формула [2],

$$d_{G,k}(\sigma) = \frac{1}{C(\sigma)} \cdot \exp\left(\frac{k^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \sum_{r=|k|}^{\infty} (-1)^r \cdot \exp\left(-\frac{(r+0.5)^2}{2\sigma^2}\right),$$

где константа $C(\sigma)$ есть сумма ряда

$$C(\sigma) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} (4r+1) \cdot \exp\left(-\frac{(2r+0.5)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Формула для $d_{G,k}$ получается из разложения в ряд Фурье функции

$$\frac{1}{\vartheta_3\left(\frac{t}{2}; q\right)}, \; q = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right),$$

где $\vartheta_3(t;q)$ – третья тета-функция Якоби [8].

Заметим, что формула для ряда Фурье этой функции была известна ещё в 1903 году [8]. Правда, там в знаменателе стоит ϑ_4. Однако, эти функции легко получить друг из друга с помощью соотношения

$$\vartheta_3(z,q) = \vartheta_4(z,-q)\,.$$

Численные результаты статьи [4] позволяют предположить, что коэффициенты $d_{G,k}$ знакочередуются и монотонно убывают по абсолютной величине с ростом номера $|k|$.

Теорема 1. *Справедлива формула* $sign(d_{G,k}(\sigma)) = (-1)^k$.

Кратко опишем схему доказательства теоремы. Вначале показывается, что $C(\sigma) > 0$. Это следует из цепочки равенств

$$C(\sigma) = \frac{1}{2}\vartheta_1'(0,q) = \exp\left(-\frac{1}{8\sigma^2}\right) \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left\{1 - \exp\left(-\frac{n}{\sigma^2}\right)\right\}^3.$$

Следовательно, знак коэффициента совпадает со знаком выражения

$$(-1)^{|k|} \sum_{r=|k|}^{\infty} (-1)^{r-|k|} \cdot \exp\left(-\frac{(r+0.5)^2}{2\sigma^2}\right).$$

В отличие от знакочередования, монотонное убывание $|d_{G,k}(\sigma)|$ доказать для всех значений σ и k не удалось (хотя сам факт, по-видимому, справедлив).

Теорема 2. *Начиная с номера*

$$k = \max\left\{\left[\log_q \sqrt{1-q} - 1\right], 0\right\}$$

коэффициенты $d_{G,k}(\sigma)$ монотонно убывают по абсолютной величине.

Ключевой при доказательстве является формула

$$\frac{d_{G,k}}{d_{G,k+1}} = \frac{q^{-k^2}X_k}{q^{-(k+1)^2}X_{k+1}} = q^{2k+1}\cdot\left(\frac{q^{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}}{X_{k+1}} - 1\right),$$

где используется следующее обозначение

$$X_k = \left|\sum_{r=k}^{\infty}(-1)^r \cdot q^{(r+0.5)^2}\right|.$$

Коэффициенты $d_{L,k}$ для $\sigma = 0.5$, $\sigma = 1.0$ и $\sigma = 1.5$

σ	0.5	1.0	1.5
$d_{L,0}$	1.08273	1.73697	3.89172
$d_{L,1}$	-0.20019	-0.78304	-2.49120
$d_{L,2}$	-0.01541	0.13838	0.93889
$d_{L,3}$	-0.00966	-0.004310	-0.34861
$d_{L,4}$	-0.00531	0.00094	0.11382
$d_{L,5}$	-0.00341	-0.00530	-0.04562
$d_{L,6}$	-0.00237	-0.00242	0.01205
$d_{L,7}$	-0.00174	-0.00207	-0.00714
$d_{L,8}$	-0.00133	-0.00154	0.00028
$d_{L,9}$	-0.00105	-0.00123	-0.00185
$d_{L,10}$	-0.00085	-0.00100	-0.00077
$d_{L,11}$	-0.00070	-0.00082	-0.00090
$d_{L,12}$	-0.00059	-0.00069	-0.00067

Коэффициенты $d_{L,k}$ для $\sigma = 2.0$ и $\sigma = 3.0$.

d_k	$\sigma = 2.0$	d_k	$\sigma = 3.0$
d_{12}	0.00103	d_{26}	$1.20 \cdot 10^{-5}$
d_{13}	-0.00137	d_{27}	$3.00 \cdot 10^{-5}$
d_{14}	-0.00015	d_{28}	$-3.37 \cdot 10^{-5}$
d_{15}	-0.00061	d_{29}	$-1.75 \cdot 10^{-5}$
d_{16}	-0.00032	d_{30}	$-7.84 \cdot 10^{-5}$
d_{17}	-0.00038	d_{31}	$-1.24 \cdot 10^{-5}$
d_{18}	-0.00029	d_{32}	$-8.65 \cdot 10^{-5}$

Следствие. *Для монотонного убывания $|d_{G,k}|$ с нулевого номера достаточно выполнения неравенства: $q < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, что соответствует*

$$\sigma < \sqrt{\frac{1}{\ln\left(\frac{\sqrt{5}+3}{2}\right)}} \approx 1.01933.$$

Обратимся к функции Лоренца. Для $d_{L,k}$ справедлива формула [9]

$$d_{L,k}(s) = \frac{(-1)^k \operatorname{sh}(s\pi)}{s\pi^2}\int_0^{\pi}\frac{\cos(kt)}{\operatorname{ch}(st)}dt.$$

В таблицах приведены значения этих коэффициентов, вычисленные при различных значениях параметров. Поведение $d_{L,k}$ отличается от поведения $d_{G,k}$. Согласно таблице 1, знакочередование с какого-то момента прекращается. Таблица 2 показывает, что нет и монотонного убывания по абсолютному значению коэффициентов.

Следующая теорема показывает, что при малых значениях параметра s знакочередуемости нет вообще.

Теорема 3. *Все коэффициенты $d_{L,k}$ отрицательны, за исключением $d_{L,0}$, при выполнении неравенства*

$$s < \ln(3 + 2\sqrt{2})/\pi \approx 0.5611\,.$$

Литература

1. Zhuravlev M.V., Kiselev E.A., Minin L.A., Sitnik S.M. Jacobi theta-functions and systems of integral shifts of Gaussian functions // Journal of Mathematical Science, Springer. – 2011. – 2(173). – P.131-140.
2. Maz'ya V., Schmidt G. Approximate approximations / Amer. Math. Soc. Mathematical Surveys and Monographs, 2007.
3. Минин Л.А., Ситник С.М. Неравенства для третьей тета-функции Якоби // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений (АМАДЕ). Тезисы докладов международной конференции / Минск, 2009. – С.111.
4. Журавлев М.В., Минин Л.А., Ситник С.М. О вычислительных особенностях интерполяции с помощью целочисленных сдвигов гауссовых функций // Научные ведомости БелГУ. Математика, Физика. – 2009. – 13(68); 17/2. – P.89-99.
5. Ситник С.М., Тимашов А.С. Приложения экспоненциальной аппроксимации по целочисленным сдвигам функций Гаусса // Вестник Воронежского государственного университета инженерных технологий. – 2013. – 2 (56). – С.90-94.
6. Ситник С.М., Тимашов А.С. Расчёт конечномерной математической модели в задаче квадратичной экспоненциальной интерполяции // Научные ведомости БелГУ. Математика, Физика. – 2013. – 19(162), Вып.32. – С.184-186.
7. Тимашов А.С. Математическое моделирование и численный анализ в задачах квадратичной экспоненциальной интерполяции // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2013. – 9(4). – С.112-115.
8. Уиттекер Э., Ватсон Дж.Н. Курс современного Анализа. Часть вторая. Трансцендентные функции / М.: ГИФМЛ, 1963.
9. Kiselev E.A., Minin L.A., Novikov I.Ya., Sitnik S.M. On Evaluation of Riesz Constants for Systems of Shifted Gaussians // arXiv:1308.2649. – 2013. – 32 p.

PROPERTIES OF COEFFICIENTS OF NODE FUNCTIONS OF UNIFORM EXPANSIONS WITH INTEGER SHIFTS OF GAUSS AND LORENTZ FUNCTIONS

L.A. Minin, S.M. Sitnik, S.N. Ushakov

Voronezh Institute of the Russian Ministry of Internal Affairs,
Patriotov Av. 53, Voronezh, 394065, Russia, e-mail: mathsms@yandex.ru

Abstract. Approximations of functions based on integer shifts of Gauss and Lorentz functions are studied. Monotonicity properties of coefficients of node functions are proved and numerically simulated.

Key words: Gauss' functions, Lorentz' functions, interpolation.