



MSC 74C10

## ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ И ВЫПУЧИВАНИЕ. Часть II: СТЕРЖЕНЬ СПЛОШНОГО СЕЧЕНИЯ

В.И. Ванько, Е.С. Перелыгина

МГТУ им. Н.Э.Баумана,  
ул. 2-я Бауманская, 5, Москва, 105005, Россия, e-mail: [vvanko@mail.ru](mailto:vvanko@mail.ru)

**Аннотация.** Изучаются процессы продольного изгиба и выпучивания в условиях ползучести материала стержня сплошного сечения. Уруго-пластические свойства материала стержня описываются произвольной диаграммой  $\sigma \sim \varepsilon$ . Численным экспериментом доказано, что исчерпание несущей способности стержня (нарушение корректности квазистатической постановки) происходит при условии равенства приложенной продольной силы и жесткости срединного сечения (в безразмерных параметрах).

**Ключевые слова:** стержень сплошного сечения, произвольная диаграмма  $\sigma \sim \varepsilon$ , ползучесть, корректность квазистатической постановки, несущая способность стержня.

**1. Уравнения равновесия. Условие корректности квазистатической постановки.** Пусть шарнирно опертый стержень симметричного поперечного сечения нагружается продольной силой, прикладываемой таким образом, что динамическими эффектами можно пренебречь, т. е. изучается квазистатический процесс. Зависимость для скорости деформации в точках стержня имеет вид:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + f'_\sigma \dot{\sigma} \varphi. \quad (1.1)$$

Точкой обозначаем производную по времени  $t$ , если изучаются процессы выпучивания, либо — дифференцирование по любому положительному монотонно возрастающему параметру в случае рассмотрения продольного изгиба;  $E$  — модуль Юнга;  $f'_\sigma \dot{\sigma}$  — скорость пластической деформации;  $\varphi$  — скорость деформации ползучести. Функция  $\varphi(\cdot)$  может зависеть от текущего напряжения в точке, от времени, а также — от параметров состояния, которые подчиняются соответствующим кинетическим уравнениям [2].

Принимаем обычные гипотезы, используемые в задачах о продольном изгибе стержней. Тогда уравнения равновесия запишутся следующим образом:

$$\int_F \sigma dF = P, \quad \int_F \sigma z dF = -P(v + v_{00}). \quad (1.2)$$

Здесь  $\sigma(z, t)$  — напряжение в точках данного сечения;  $F$  — площадь поперечного сечения;  $z$  — координата по высоте поперечного сечения, отсчитываемая от центра масс сечения в плоскости изгиба в сторону «растянутых» внешних волокон;  $v_{00}(x)$  —



начальное искривление стержня;  $v(x, t)$  — дополнительный прогиб;  $x$  — координата по длине стержня,  $0 \leq x \leq L$ .

Используя гипотезу плоских сечений, получим уравнение, замыкающее систему (1.1), (1.2):

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + z\kappa \quad \left( \kappa \approx \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right), \quad (1.3)$$

где  $\varepsilon_0(x, t)$  — деформация в точках оси стержня; прогибы считаем малыми, т.е. решаем задачу в геометрически линейной постановке,  $v(x, t) = L$ .

Уже отмечалось (см. Часть I, [1]), что геометрически линейная постановка достаточна для большинства практически важных случаев [3].

Для системы (1.1)–(1.3) имеем: начальное условие краевые условия

$$v(0, t) = 0, \quad v(L, t) = 0.$$

Выписанная система уравнений может быть разрешена в замкнутом виде только в частных случаях. Так, известны решения для упруго-идеально-пластического стержня [4], для линейно вязкого стержня [5], для стержня из материала, свойства которого описываются в виде комбинации линейной вязкости с идеальной пластичностью [6].

Отличительной особенностью учета пластических деформаций является то обстоятельство, что вид функции  $f(\cdot)$  существенно зависит от истории нагружения в каждой точке стержня. Эта трудность является общей для большинства задач теории пластичности, в которых учитываются упрочнение, последующая упругая разгрузка, а также эффект Баушингера [2].

Воспользуемся методом расчета «по шагам» (метод последовательных нагружений или метод продолжения по параметру [7]), впервые для задач продольного изгиба и выпучивания предложенным в работах [8,9].

В дальнейшем рассматриваем два процесса: при анализе продольного изгиба *приращение* дается нагрузке, при исследовании выпучивания анализируется случай, когда стержень достаточно быстро нагружается силой  $P_0$  (столь быстро, что ползучесть в процессе возрастания силы проявиться не успевает, однако динамическими эффектами можно пренебречь) и в дальнейшем приращение дается времени  $t$ .

В обоих случаях считаем, что известно напряженно-деформированное состояние в предыдущий,  $(i - 1)$ -й момент по времени или по нагрузке. Тогда деформации и напряжения в момент  $i$  будут отличаться от деформаций и напряжений в момент  $(i - 1)$  на малые величины  $\Delta\varepsilon_i$  и  $\Delta\sigma_i$ .

Из уравнения (1.1) получим:

$$\Delta\varepsilon_i = \Delta\sigma_i \left( \frac{1}{E} + f'_\sigma \right) + \Delta\varepsilon_i, \quad (1.4)$$

где  $\Delta\varepsilon_i = \varphi\Delta t_i$  — приращение деформации ползучести за время  $\Delta t_i$  при изучении процесса выпучивания.

Из (1.4) имеем:

$$\Delta\sigma_i = E^*(\Delta\varepsilon_i - \Delta\varepsilon_i), \quad (1.5)$$



причем в упругой области и при разгрузке  $E^* = E$ ; при активном нагружении в пластической области

$$E^* = \frac{E}{1 + f'_\sigma E}.$$

Гипотеза плоских сечений (1.2) запишется в конечных приращениях в виде

$$\Delta\varepsilon_i = \Delta\varepsilon_i^0 + z\Delta\kappa_i. \quad (1.6)$$

Левые части уравнений равновесия (1.2) приводятся к следующим выражениям в приращениях:

$$\int_F \Delta\sigma_i dF = \int_F E^*(\Delta\varepsilon_i^0 + z\Delta\kappa_i - \Delta\varepsilon_i) dF, \quad \int_F z\Delta\sigma_i dF = \int_F E^*(z\Delta\varepsilon_i^0 + z^2\Delta\kappa_i - z\Delta\varepsilon_i) dF.$$

Введем величину безразмерного «модуля пластичности»  $\nu = E^*/E$ . Тогда уравнения равновесия имеют вид:

$$E^*(I_0\Delta\varepsilon_i^0 + I_1\Delta\kappa_i - J_0) = \Delta P_i; \quad (1.7)$$

$$E^*(I_1\Delta\varepsilon_i^0 + I_2\Delta\kappa_i - J_1) = -P_{i-1}v_i - v_{i-1}\Delta P_i. \quad (1.8)$$

Здесь введены обозначения:

$$I_k = \int_F \nu z^k dF, \quad J_k = \int_F \nu z^k \Delta\varepsilon_i dF, \quad k = 0, 1, 2.$$

Из уравнения (1.7) получим выражение для приращения деформации в точках оси стержня:

$$\Delta\varepsilon_i^0 = \frac{1}{EI_0}\Delta P_i - \frac{I_1}{I_0}\Delta\kappa_i + \frac{J_0}{I_0},$$

которое подставим в уравнение (1.8).

Получим уравнение относительно приращения прогиба  $\Delta v_i$ :

$$\left(I_2 - \frac{I_1^2}{I_0}\right) \frac{d^2\Delta v_i}{dx^2} + \frac{P_{i-1}}{E}\Delta v_i = \frac{P_{i-1}}{E} \left(v_{i-1} + \frac{I_1}{I_0}\right) - \frac{J_0 I_1 - J_1 I_0}{I_0}. \quad (1.9)$$

Система уравнений (1.9), (1.5), (1.6) полностью решает задачу на каждом шаге. Для интегрирования этих уравнений стержень делим на  $n$  равных частей по длине и на  $m$  частей по высоте сечения, получаем  $mn$  узловых точек, в которых следим за напряженно-деформированным состоянием. Считаем, что в  $i$ -1 момент времени или нагружения известно состояние в каждом узле, т.е. известны матрицы величин  $\{\sigma_{kj}\}_{i-1}$  и  $\{\nu_{kj}\}_{i-1}$  т.д., а также  $v_{i-1}(x)$ . При приращении нагрузки или времени это состояние считается неизменным, в частности, неизменной остается матрица безразмерных модулей пластичности  $\{\nu_{kj}\}_{i-1}$ . Следовательно, в некотором  $k$ -ом поперечном сечении (по длине стержня) известно значение функции  $\nu_{kj}(z)$  ( $j = 1, z, k, m$ ). Поэтому, используя тот или иной метод интегрирования, можно вычислить все интегралы  $I_p = \int_F \nu_{kj}(z) z^p dF$



( $p = 0, 1$ ), входящие в уравнения системы (1.9), (1.5), (1.6). То же самое относится к интегралам  $J_0, J_1$ , зависящим от функции  $\Delta\epsilon_i(x, z)$  если задан конкретный закон ползучести.

Отсюда следует, что уравнение (1.9) есть обыкновенное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с коэффициентами, зависящими от продольной координаты  $x$  ( $0 \leq x \leq L$ ), причем значения коэффициентов заданы в  $n$  точках деления по длине.

Зная условия закрепления стержня, для уравнения (1.9) ставим краевую задачу. Краевые условия задаем в виде  $\Delta v_i(0) = \Delta v_i(L) = 0$ , т.е. рассматриваем шарнирно опертый стержень; форму начального искривления задаем в виде

$$v_0(x) = v_{00} \sin \frac{\pi x}{L} . \tag{1.10}$$

На нулевом шаге к стержню приложена такая сила  $P_0$ , чтобы все узлы остались в состоянии упругости. Максимальное значение напряжения сжатия при этом достигается в точке  $x = -L/2, z = -h$ , см. рис. 1.

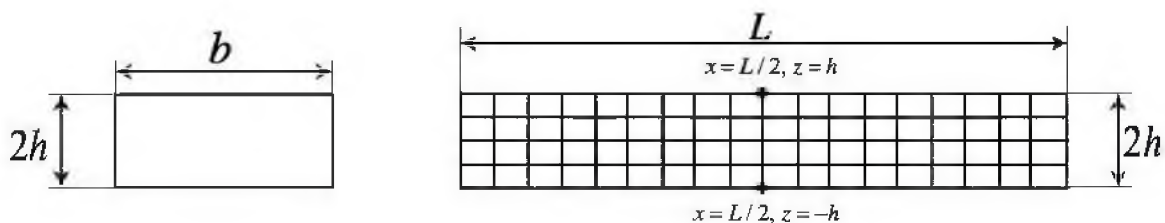


Рис. 1.

Считая, что дальнейшее упругое изгибание стержня происходит по полуволне синусоиды, получим ( $\tilde{P} = P_0/P_3$ ):

$$v_0 \left( L/2, \tilde{P} \right) = \frac{\tilde{P} v_{00}}{1 - \tilde{P}} . \tag{1.11}$$

Деформацию точек упругой оси принимаем в виде

$$\epsilon_0 = \frac{P_0}{EF} ,$$

где  $F$  — площадь поперечного сечения ( $F = \text{const}$ ). Тогда согласно (1.6) и (1.5):

$$\Delta\sigma_0 = \sigma_0(x, z) = E\Delta\epsilon(x, z) = E \left( \frac{P_0}{EF} + z \frac{d^2 v_0}{dx^2} \right) \Rightarrow \sigma_{\max} = \frac{P_0}{F} + h \frac{\pi^2}{L^2} \cdot \frac{E v_{00}}{1 - P_0/P_3} . \tag{1.12}$$

Из требования  $\sigma_{\max} \leq \sigma_*$  найдем такую нагрузку  $P_1$ , чтобы при  $P > P_1$  в точке  $(L/2, -h)$  впервые наступило состояние пластичности; напряжение в этой точке необходимо вычислять, используя модуль  $E^*$ . Находим распределения напряжений  $\{\sigma_{kr}\}_0$  и модулей  $\{\nu_{kr}\}_0$ . Эти распределения являются отправными для следующего шага. На следующем шаге решается краевая задача для уравнения (1.9); используя метод конечных разностей [10], получаем  $\Delta v_1(x)$  и вычисляем  $\{\Delta\sigma_{kr}\}_1$ . В каждой точке вычисляется



текущее напряжение  $\sigma(x, z)$  и находится состояние нагружения:  $\sigma \cdot \dot{\sigma} > 0$  или  $\sigma \cdot \dot{\sigma} < 0$ . По уровню напряженного состояния в каждой точке формируем матрицу модулей  $\{\nu_{kr}\}_{11}$  и т.д.

Для конкретности считаем, что стержень имеет прямоугольное поперечное сечение, рис. 1: площадь сечения  $F = 2bh$ , момент инерции  $I = 2bh^3/3$ .

Вводим систему безразмерных параметров: действующую силу отнесем к эйлеровой силе  $\tilde{P} = P/P_3$ ,  $P_3 = \pi^2 EI/L^2$ ; напряжения — к эйлерову напряжению  $\tilde{\sigma} = \sigma/\sigma_3$ ,  $\sigma_3 = \pi^2 EI/L^2 F$ ; деформации — к эйлеровой деформации  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon/\varepsilon_3$ ,  $\varepsilon_3 = \pi^2 I/L^2 F$ ; прогиб отнесем к половине высоты  $\tilde{v} = v/h$ ; введем безразмерные координаты  $\xi = \pi x/L$  ( $0 \leq \xi \leq 1$ ),  $\eta = z/h$  ( $-1 \leq \eta \leq 1$ ).

Тогда система уравнений (1.9), (1.5), (1.6) запишется в виде:

$$\frac{3}{2} \left( \tilde{I}_2 - \frac{\tilde{I}_1^2}{\tilde{I}_0} \right) \frac{d^2 \Delta \tilde{v}_i}{d\xi^2} + \tilde{P}_{i-1} \Delta \tilde{v}_i = -\Delta \tilde{P}_i \left( \tilde{v}_{i-1} + \frac{\tilde{I}_1}{\tilde{I}_0} \right) - \frac{1}{2} \frac{\tilde{J}_0 \tilde{I}_1 - \tilde{J}_1 \tilde{I}_0}{\tilde{I}_0}. \quad (1.13)$$

Здесь фигурируют безразмерные интегралы:

$$\tilde{I}_k = \int_{-1}^1 \nu \eta^k d\eta, \quad \tilde{J}_k = \int_{-1}^1 \nu \frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon_3} \eta^k d\eta \quad (\eta = 0, 1, 2). \quad (1.14)$$

Из уравнения (1.7) найдем выражение для деформации точек оси стержня:

$$(1.7) \Rightarrow \Delta \varepsilon_i^0 = \frac{\Delta P_i}{EI_0} - \frac{I_1}{I_0} \frac{d^2 \Delta v_i}{dx^2} + \frac{J_0}{I_0}.$$

Полученное выражение приводим к безразмерному виду (аналогично (1.13)):

$$\Delta \tilde{\varepsilon}_0 = 2 \frac{\Delta \tilde{P}_i}{\tilde{I}_0} - 3 \frac{\tilde{I}_1}{\tilde{I}_0} \frac{d^2 \Delta \tilde{v}_i}{d\xi^2} + \frac{\tilde{J}_0}{\tilde{I}_0}. \quad (1.15)$$

Выражение для приращения напряжений после приведения к безразмерному виду запишем так:

$$(1.5) \Rightarrow \Delta \sigma_i = E_{i-1}^* \{ \Delta \varepsilon_i - \Delta \varepsilon_i \} \Rightarrow \frac{1}{E} \Delta \sigma_i = \nu_{i-1} \{ \Delta \varepsilon_i^0 + z \Delta \varepsilon_i - \Delta \varepsilon_i \} \Rightarrow$$

$$\Delta \tilde{\sigma}_i = \nu_{i-1} \left\{ \Delta \tilde{\varepsilon}_0 + 3\eta \frac{d^2 \Delta \tilde{v}_i}{d\xi^2} - \Delta \tilde{\varepsilon}_i \right\}. \quad (1.16)$$

Последовательность решения системы уравнений (1.13), (1.15), (1.16) такова: решив уравнение (1.13), найдем приращение прогиба  $\Delta \tilde{v}_i(\xi_k)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) на  $i$ -том шаге нагружения; по соотношению (1.15) находим приращения деформации оси стержня  $\tilde{\varepsilon}_0(\xi)$ ; наконец, используя (1.16), определяем приращения напряжений  $\Delta \sigma_i(\xi_k, \eta_r)$ ; в узловых точках вычисляем величины напряжений в узловых точках и определяем состояния





нагрузки или разгрузки в узловых точках по знаку произведения  $\sigma_i \cdot \Delta\sigma_i$ ; формируем матрицу упруго-пластических модулей  $\{\nu(\xi_k, \eta_r)\}_i$  для следующего,  $(i + 1)$ -го шага нагружения и т.д.

В дальнейшем, рассматривая уравнения (1.13), (1.15), (1.16), значок «тильда» ( $\sim$ ) над буквенными (безразмерными) символами опускаем.

Выпишем основные соотношения, внося выражение (1.15) в (1.16):

$$\frac{3}{2} \left( I_2 - \frac{I_1^2}{I_0} \right) \frac{d^2 \Delta v_i}{d\xi^2} + P_{i-1} \Delta v_i = -\Delta P_i \left( v_{i-1} + \frac{I_1}{I_0} \right) - \frac{1}{2} \frac{J_0 I_1 - J_1 I_0}{I_0}. \quad (1.17)$$

$$\Delta \epsilon_i = v_{i-1} \left\{ 2 \frac{\Delta P_i}{I_0} - 3 \left( \frac{I_1}{I_0} - \eta \right) \frac{d^2 \Delta v_i}{d\xi^2} + \left( \frac{J_0}{I_0} - \Delta \epsilon_i \right) \right\}. \quad (1.18)$$

Рассмотрим некоторые качественные особенности полученных соотношений.

Введем обозначение

$$I(\xi) = \frac{3}{2} \left( I_2 - \frac{I_1^2}{I_0} \right). \quad (1.19)$$

$I(\xi)$  представляет собой жесткость упруго-пластического стержня на изгиб; для идеально упругого стержня  $I(\xi) \equiv 1$ .

Так как все величины безразмерны, мы будем сравнивать приложенную силу с жесткостью стержня на изгиб. Упругий стержень «несет» нагрузку  $P < P_3$  – в размерных величинах, поэтому  $I(\xi) = 1 > P$ .

Для стержня с линейным упрочнением

$$P_{III} \leq I(\xi) < 1,$$

где  $P_{III} = E_t/E$  – безразмерное значение силы Шэнли. Для стержней с нелинейным упрочнением  $I(\xi)$  может изменяться от значения, близкого к 0 до 1 в зависимости от диаграммы  $\sigma \sim \epsilon$ .

Уравнение (1.17) перепишем в виде

$$I(\xi) \frac{d^2 \Delta v_i}{d\xi^2} + P_i \Delta v_i = \psi_i(\xi), \quad (1.20)$$

где  $\psi(\xi)$  – известная на каждом шаге функция.

Очевидно, что уравнение (1.20) в известном смысле эквивалентно уравнению продольного изгиба неоднородного стержня. В первом приближении, считая функцию  $I(\xi)$  слабо зависящей от координаты  $\xi$ , примем для значения  $I(\xi)$  среднее по  $\xi$  значение  $I(\xi) = I^*$ . Тогда, из решения упругой задачи, считая, что изгиб происходит по полуwave синусоиды  $\Delta v_i = a_i \sin \xi$ , получим методом коллокации по сечению  $\xi = \pi/2$ :

$$(1 - P_i) a_i = A, \quad (1.21)$$

где  $A$  зависит от  $\Delta P_i$  или  $\Delta t_i$ .



Из (1.21) следует, что при выполнении условия

$$I - P_i = 0 \quad (1.22)$$

имеет место обращение в бесконечность скорости прогиба или самого прогиба.

Условие (1.22) характеризует критическое состояние стержня: стержень «несет» приложенную нагрузку пока выполняется условие

$$I - P_i > 0. \quad (1.23)$$

Это условие означает, что при квазистатическом нагружении нагрузка не должна превышать жесткость в «опасном» сечении [11, 12].

При расчетах на компьютере, когда задается шаг  $\Delta_i$  или  $\Delta t_i$ , точно определить момент выполнения условия (1.22) практически невозможно. При этом на некотором шаге нагружения приращение  $\Delta v_i$  меняет знак, становится отрицательным. Параметры критического состояния оказываются заключенными в достаточно жестких границах.

Условие смены знака приращением  $\Delta v_i$  аналогично критерию выпучивания, введенному в работе [13]: квазистатическая постановка *корректна*, пока  $\Delta v_i > 0$ , либо  $0 < v_i < \infty$ .

Приведенные выше качественные особенности полностью подтверждаются проведенными численными расчетами [11, 14, 15]. Кроме того, расчеты показали, что при решении системы (1.17), (1.18) (без каких бы то ни было упрощений) и при использовании коллокации по срединному сечению (т.е. при «назначении» стержню постоянной по длине жесткости, равной текущей жесткости срединного сечения) параметры критического состояния практически совпадают с точностью до 2–3%.

Воспользуемся этим замечанием и будем считать, что на каждом шаге приращение прогиба можно аппроксимировать в виде

$$\Delta v_i = a_i \sin \xi.$$

В уравнении продольного изгиба

$$I^{(i)}(\xi) \frac{d^2 \Delta v_i}{d\xi^2} + P_i \Delta v_i = -\Delta P_i \left( v_{i-1} + \frac{I_1}{I_0} \right) \quad (1.24)$$

жесткость  $I^{(i)}(\xi)$  и интегралы  $I_k^{(i)}$  вычисляем в срединном сечении  $\xi = \pi/2$ .

Подставляя  $\Delta v_i = a_i \sin \xi$  в уравнение (1.20), найдем приращение амплитуды прогиба на каждом шаге:

$$a_i = \frac{\Delta P_i (v_{i-1} + I_1 I_0^{-1})}{I^{(i)} \left( \frac{\pi}{2} \right) - P_i}. \quad (1.25)$$

Предположим, что материал стержня линейно упрочняется, причем эффект Баушингера не учитывается, рис. 2.

Считаем, что  $P_{\text{ш}} > P_*$  ( $P_{\text{ш}} = E_t/E$  – сила касательно-модульная, сила Шэнли;  $P_*$  – значение нагрузки, при которой в идеально прямом стержне достигается напряжение  $\sigma_*$  во всех его точках).

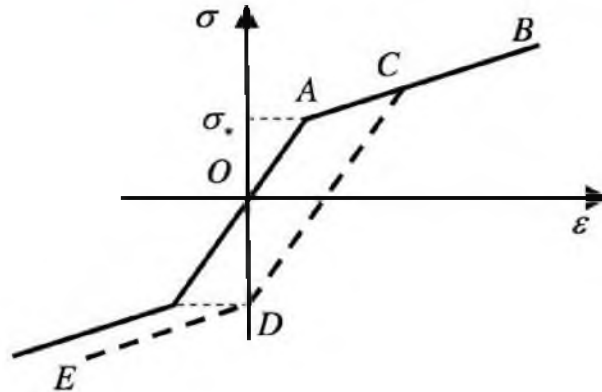


Рис. 2.

Найдем нагрузку  $P_1$ , при которой в упругом стержне (с начальной погибью) в наиболее «напряженной» точке  $(1/2\pi, -1)$  напряжение достигнет величины  $\sigma_*$ . Приращение кривизны геометрической оси упругого стержня с начальной погибью  $v_{00}$  в срединном сечении имеет значение в силу (1.25):

$$\Delta\zeta = -P_1 v_{00} / (1 - P_1). \tag{1.26}$$

В случае упругих деформаций во всех точках стержня имеем следующие величины введенных параметров:  $I_0 = 2$ ,  $I_1 = 0$ ,  $I_2 = 2/3$ ;  $J_0 \equiv 0$ ,  $\Delta\epsilon \equiv 0$ .

Подставляя выражение кривизны сечения  $\xi = \pi/2$  (1.26) в уравнение (1.18), получим уравнение относительно искомой нагрузки  $P_1(\eta = -1)$ :

$$P_1 + 3 \frac{P_1 v_{00}}{1 - P_1} = P_* \Rightarrow P_1^2 - (1 + P_* + 3v_{00})P_1 + P_* = 0 \Rightarrow$$

$$P_1^{(1,2)} = \frac{1}{2} \left( 1 + P_* + 3v_{00} \pm \sqrt{(1 + P_* + 3v_{00})^2 - 4P_*} \right). \tag{1.27}$$

Считаем, что начальный прогиб мал:  $v_{00}^2 = v_{00} = 1$ . Тогда полученное выражение (1.27) упрощается:

$$P_1^{(1,2)} = \frac{1}{2} \left( 1 + P_* + 3v_{00} \pm (1 - P_*) \sqrt{1 + 6v_{00} \frac{1 + P_*}{(1 - P_*)^2}} \right). \tag{1.28}$$

При выборе знака «+» перед радикалом получим  $P_1 > 1$  – это решение не годится, так как  $P < 1$ .

Поэтому искомое значение  $P_1$  соответствует знаку «-» перед радикалом. Имеем:

$$P_1 = P_* - \frac{3v_{00}P_*}{1 - P_*} \quad (P_1 < P_* < 1). \tag{1.29}$$

Найти точное значение силы  $P_2$ , при котором и в точке  $(1/2\pi, 1)$  будет достигнуто напряжение  $\sigma_*$ , т.е. все точки сечения  $\xi = 1/2\pi$  выйдут в состояние (рис. 2), невозможно, так как на каждом шаге интегрирования жесткость  $I$  изменяется.





Очевидно, верхнюю оценку нагрузки  $P_2$  получим, предположив, что вплоть до момента  $\sigma(\pi/2, 1) = \sigma_*$  ( $\sigma_* = P_* -$  безразмерные величины) сечение  $\xi = 1/2\pi$  имеет жесткость  $I = 1$ . Тогда аналогичными выкладками, как это сделано выше, в силу (1.26), (1.18) получим:

$$P_2 - \frac{3P_2 v_{00}}{1 - P_2} = P_* \Rightarrow P_1^{(1,2)} = \frac{1}{2} \left( 1 - 3v_{00} + P_* \pm \left( (1 - P_*) - \frac{3v_{00}(1 + P_*)}{1 - P_*} \right) \right).$$

Выбирая знак «+», имеем

$$P_2 = P_* + \frac{3v_{00}P_*}{1 - P_*}. \quad (1.30)$$

Формулы (1.29) и (1.30) дают интервал, куда попадает нагрузка  $P_2$ , при которой все точки сечения  $\xi = \pi/2$  «выйдут» в состояние  $AB$ .

Пусть свойства материала, геометрия стержня (его гибкость – отношение длины к радиусу инерции сечения) и начальный прогиб  $v_{00}$  таковы, что сила касательного модуля больше силы  $P^*$ :

$$P_{III} = E_t/E > P^*. \quad (1.31)$$

Тогда все точки сечения  $\xi = \pi/2$  «выйдут» в состояние  $AB$  прежде, чем приложенная сила достигнет значения касательно-модульной нагрузки.

Пусть  $P \geq P^*$ . При этом все точки сечения находятся на участке  $AB$  кривой  $\sigma \sim \varepsilon$ , и стержень работает как «упругий» с жесткостью

$$I = \frac{3}{2} \left( I_2 - \frac{I_1^2}{I_0} \right) = \nu = E_t/E.$$

Найдем силу  $P_3$ , при которой в точке  $(\pi/2, 1)$  начнется разгрузка.

Пусть  $\sigma_2 = \sigma(\pi/2, 1)$  и  $v_2 = v_{00}/(1 - P_2)$  – напряжение и прогиб, соответствующие силе  $P_2$ . При  $P = P_3$  напряжение в точке  $(\pi/2, 1)$  достигает своего максимума. При  $P \geq P_2$  имеем:

$$\sigma \left( \frac{\pi}{2}, 1 \right) = \sigma_2 + (P - P_2) - \frac{3(P - P_2)v_2}{\nu - P} \Rightarrow \left. \frac{d\sigma}{dP} \right|_{P=P_3} = 1 - \frac{3v_2}{\nu - P_3} \left( 1 + \frac{P_3 - P_2}{\nu - P_3} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_3 = \nu - \sqrt{3v_2(\nu - P_2)} \Rightarrow P_3 = P_{III} - \sqrt{3v_2(P_{III} - P_2)} \Rightarrow \quad (1.32)$$

$$\Rightarrow \lim_{v_{00} \rightarrow 0} P_3 = P_{III}. \quad (1.33)$$

Таким образом, в точке  $(\pi/2, 1)$  разгрузка начинается так: если  $v_{00} \neq 0$ , то при значении  $P_3 < P_{III}$ ; если  $v_{00} = 0$ , то при  $P = P_{III}$  (см. Часть I данной работы). В любом из этих случаев продольный изгиб без разгрузки возможен лишь при значении приложенной силы, меньшем касательно-модульной.

При распространении зоны разгрузки по глубине сечения жесткость  $I(\xi = \pi/2)$  возрастает. При достижении силой значения  $P_{III}$  жесткость  $I(\pi/2) > \nu = E_t/E$ . Поэтому при переходе силы через касательно-модульное значение никаких особенностей на кривой «сила–прогиб» не наблюдается.



Рассмотрим подробно один частный случай. Пусть материал на растяжение работает как идеально упругий, т.е. в зоне разгрузки  $\nu \equiv 1$  (схема Шэнли–Работнова [16, 17]). Граница зоны разгрузки характерна тем, что  $\Delta\sigma/\Delta P = 0$  при  $\eta = \vartheta$ , так как точки  $1 \geq \eta > \vartheta$  находятся в состоянии  $CD$  и для них  $\Delta\sigma/\Delta P < 0$ ; точки  $\vartheta > \eta \geq -1$  в состоянии  $AB$  и  $\Delta\sigma/\Delta P > 0$  (рис. 2).

Предположим, что стержень работает в окрестности критического состояния, т.е.  $\Delta\sigma/\Delta P \rightarrow \infty$  или  $v_i \rightarrow \infty$ .

Найдем соответствующие значения  $\vartheta = \vartheta^*$  и  $I(\pi/2)|_{\eta=\vartheta^*}$ . Приращение кривизны, по (1.25), равно  $-a_i$ , поэтому из (1.18) (при  $J_0 = 0, \Delta\epsilon_i = 0$ ):

$$\frac{\Delta\sigma}{\Delta P}\Big|_{\eta=\vartheta^*} = \nu \left[ \frac{2}{I_0} + 3 \left( \frac{I_1}{I_0} - \vartheta^* \right) \frac{v_{i-1} + I_1 I_0^{-1}}{I - P_i} \right] = 0. \quad (1.34)$$

В окрестности критического состояния второе слагаемое в скобках полученного выражения (1.34) является бесконечно большой величиной, так как  $(I - P_i) \rightarrow 0$ . Сократив (1.34) на  $\nu \neq 0$  и отбросив слагаемое  $2/I_0$  имеем:

$$3 \left( \frac{I_1}{I_0} - \vartheta^* \right) \frac{v_{i-1} + I_1 I_0^{-1}}{I - P_i} = 0 \Rightarrow I_1 - I_0 \vartheta^* = 0$$

– уравнение относительно искомой величины  $\vartheta^*$ .

Интегралы  $I_1$  и  $I_0$ , в силу сделанных предположений, вычисляются следующим образом:

$$I_1 = \int_{-1}^{\vartheta^*} \nu \eta d\eta + \int_{\vartheta^*}^1 \eta d\eta = \frac{1}{2} \left( \vartheta^{*2}(\nu - 1) + (1 - \nu) \right),$$

$$I_0 = \int_{-1}^{\vartheta^*} \nu \eta d\eta + \int_{\vartheta^*}^1 \eta d\eta = \vartheta^*(\nu - 1) + \nu + 1.$$

Таким образом, получаем уравнение для определения максимальной высоты зоны разгрузки:

$$I_1 - \vartheta^* I_0 = 0 \Rightarrow \vartheta^{*2}(\nu - 1) + 2\vartheta^*(1 + \nu) + (\nu - 1) = 0 \Rightarrow \vartheta_{1,2}^* = \frac{(1 \pm \sqrt{\nu})^2}{1 - \nu}. \quad (1.35)$$

Выбирая знак «минус» в числителе выражения (1.35) (так как  $\vartheta^* < 1$ ), получим границу зоны разгрузки [12]:

$$\vartheta^* = \frac{1 - \sqrt{\nu}}{1 + \sqrt{\nu}} \quad (\nu = E_t/E). \quad (1.36)$$

Подставив значение  $\vartheta^*$  в функцию  $I(\eta)$ , получим

$$I(\vartheta^*) = \frac{4\nu}{(1 + \sqrt{\nu})^2},$$



т.е. величину жесткости (в безразмерных параметрах), соответствующую модулю Кармана.

Непосредственными вычислениями можно убедиться в том, что  $I'(\vartheta^*) = 0$ ,  $I''(\vartheta^*) < 0$ , и так как  $I(\eta)$  монотонно возрастает при  $\vartheta < 1$  то значение  $\eta = \vartheta^*$  дает абсолютный максимум функции  $I(\eta)$ . Эти значения  $\vartheta^*$  и  $I(\vartheta^*)$  соответствуют величине зоны разгрузки и модулю, полученным при изучении устойчивости упруго-пластического стержня в постановке Кармана [17,18].

Однако для стержня из обычного упруго-пластического материала, рис. 2, значение  $I(\vartheta^*)$  будет лишь верхней границей для значений жесткости (имеются в виду значения  $I$ , которые соответствуют  $P > P_2$ ), так как в этом случае неизбежно появление пластических деформаций растяжения в точке  $(\pi/2, 1)$ . Действительно, в противном случае стержень будет работать по схеме Шэнли–Работнова, при этом в окрестности критического состояния:  $v \rightarrow \infty$  и  $|\Delta\sigma| \rightarrow \infty$ , а это означает, что найдется такой конечный прогиб, при котором  $\sigma(\pi/2, 1) = -\sigma_*$ .

Таким образом,  $I(\vartheta^*) > I(\vartheta)$ , поэтому критическая сила  $P^*$  меньше силы Кармана  $P_k$ . Для стержневой модели Шэнли на этот факт было указано в работе [19]. Нетрудно показать, что критическое состояние осуществляется при конечном прогибе.

Проиллюстрируем все вышесказанное результатами решения уравнений (1.17), (1.18) ( $J_0 = J_1 = 0$ ,  $\Delta\epsilon_i = 0$ ). Эти уравнения решались без каких-либо упрощений способом, подробно описанным в [11, 12]. Материал стержня имел характеристики  $P_* = \sigma_* = 0, 1$ ;  $\nu_0 = P_{III} = 0, 15$ ;  $I(\vartheta^*) = P_k = 0, 3122$ . Начальный прогиб  $v_{00} = 0, 001$ . Неравенство  $P_{III} > P_2$  удовлетворено.

При изменении силы от нулевого значения до  $P = P_1$  весь стержень находится в упругом состоянии,  $I(\xi) \equiv 1$ . При силе  $P > P_1$  жесткость *срединного* сечения стала падать, так как точка  $\eta = -1$  и следующие за ней вышли в состояние  $AB$  (рис. 2). Наконец, при  $P \approx P_2$  все точки стержня соответствуют состоянию, при этом  $I(\xi) \equiv \nu = E_t/E$ . На рис. 3,а показано состояние стержня, когда происходит «продольный изгиб без разгрузки», отмеченный впервые Шэнли [16]. Незаштрихованная область стержня на рис. 3 означает точки, которые находятся в состоянии  $AB$ . При силе  $P = P_3$  в точке  $(1/2\pi, 1)$  началась разгрузка,  $I > \nu$ . Появившаяся зона разгрузки, отмеченная горизонтальной штриховкой, увеличивает жесткость срединного сечения (см. рис. 3,б).

Отметим, что впервые, по-видимому, в работе [19] было отмечено, что продольный изгиб без разгрузки при  $P \geq P_{III}$  невозможен. Рис. 3,в показывает состояние стержня при  $P = 0, 195$ : высота зоны разгрузки  $\vartheta = 0, 5$ , жесткость  $I = 0, 312$ . Эти значения близки к теоретическим  $\vartheta^* = 0, 442$  и  $I(\vartheta^*) = P_k = 0, 3122$ . Прогиб при этом  $v = 0, 3$ .

На рис. 3,г в точке  $(\pi/2, 1)$  появилась зона пластических деформаций растяжения (вертикальная штриховка). Жесткость при этом уменьшается.

Жесткость сплошного стержня изменяется непрерывно, поэтому никаких особенностей в поведении стержня при появлении пластических деформаций растяжения в волокнах с выпуклой стороны стержня не наблюдается. Аналогичный вывод сделан в работе [20].

Сила возрастает, жесткость срединного сечения падает, так как зона пластических деформаций растяжения распространяется по высоте сечения. На рис. 3,г показано



состояние непосредственно перед критическим:  $P = 0,213$ ,  $I(\pi/2) = 0,216$ .

На следующем шаге нагружения  $I = P$ , при этом при конечном прогибе  $v^* = 0,49$ ,  $P^* = 0,2135$ , т.е.  $P^* < P_k$ . На рис. 4 показана характерная зависимость жесткости срединного сечения от приложенной нагрузки для стержня из линейно упрочняющегося материала при условии  $P_{III} > P_*$ . На рис. 4 сила  $P'$  есть безразмерное значение силы Шенли  $P_{III}$ .

а)



б)



в)



г)

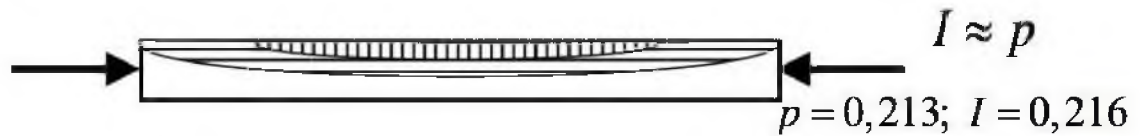


Рис. 3.

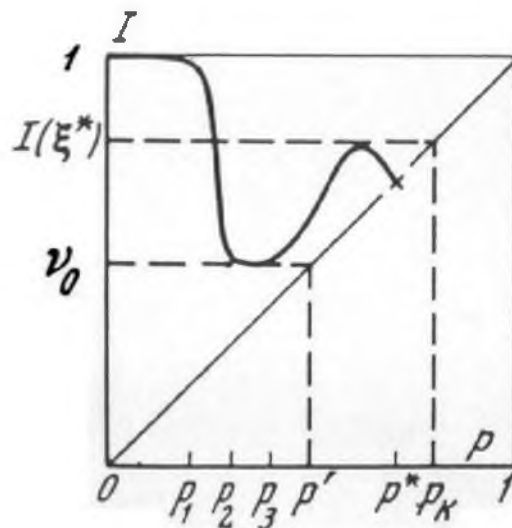


Рис. 4.



Отметим, что впервые в работах [20, 21] дан анализ продольного изгиба упруго-пластического стержня в связи с распространением по длине стержня и глубине поперечных сечений зоны пластических деформаций (при условии  $P_{III} > P_*$ ). Однако определённого вывода о зависимости «жёсткость – сила», подобного неравенству (1.23):  $I > P$ , в упомянутых работах сделано не было.

Авторы всех известных работ (цитированных выше, Часть I, исключая [22]) изучали продольный изгиб стержня, материал которого имеет линейное упрочнение, при условии  $P_{III} > P_*$  (хотя явно это во многих работах не оговаривается), в силу которого точки поперечных сечений переходят в пластическое состояние раньше, чем возрастающая сила достигнет касательно-модульного значения.

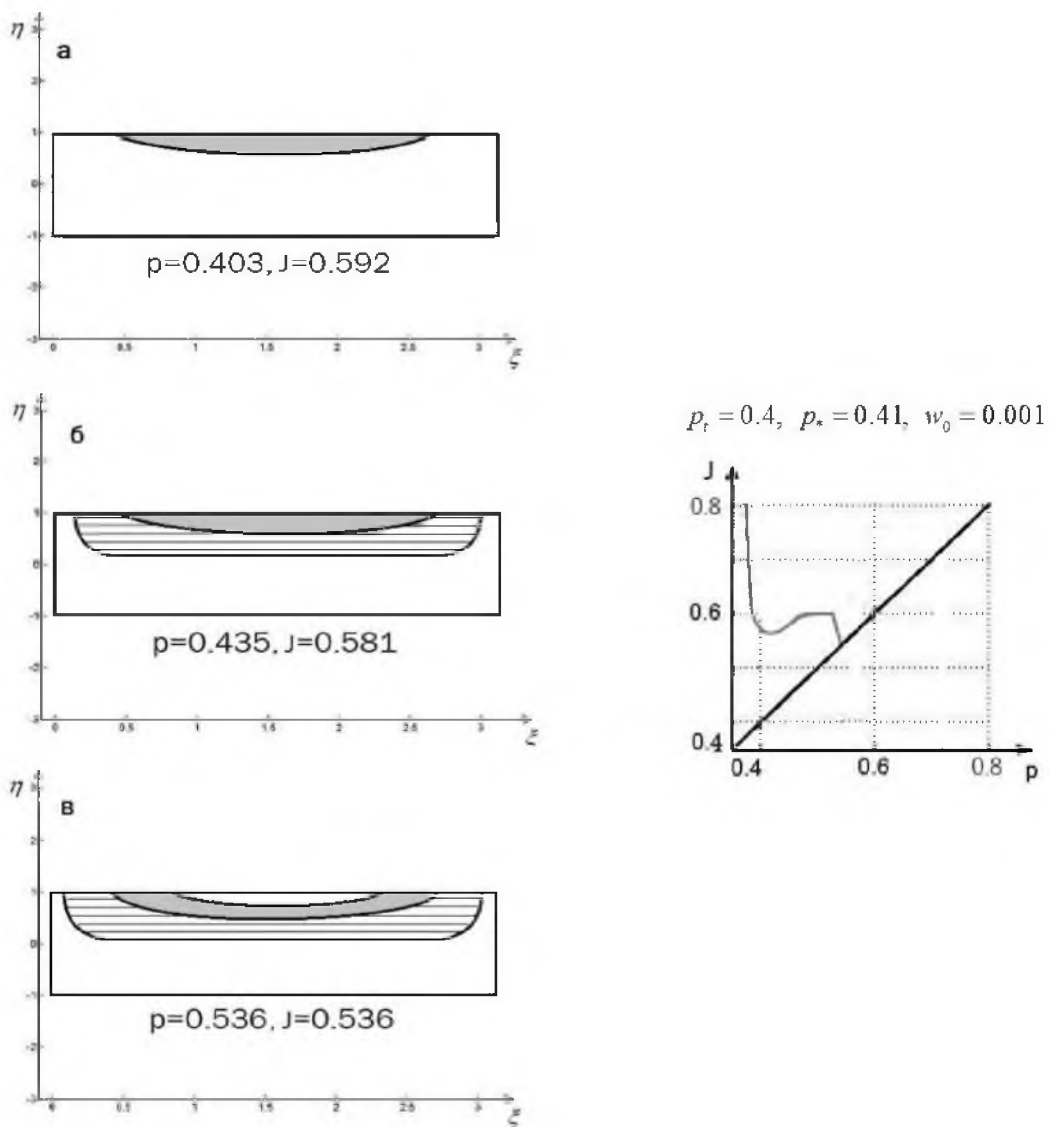


Рис. 5.  $P_{III} = 0,4, P_* = 0,4, w_0 = v_\infty = 0,001$ .

**2. Материал стержня имеет произвольную диаграмму  $\sigma : \varepsilon$ . В статьях [14, 15]**





согласно методике численного исследования, изложенной выше, рассмотрено поведение упругопластического стержня, материал которого имеет произвольную диаграмму  $\sigma : \varepsilon$ .

1) Материал стержня линейно упрочняется,  $P_{III} \leq P_*$ .

При условии  $P_{III} \approx P_*$  точки стержня не переходят в состояние  $DE$ , рис. 2, и при увеличении разности  $P_* - P_{III} > 0$  «не успевают» выйти в состояние вследствие резкого падения жёсткости срединного сечения. Проиллюстрируем сказанное графиками «жёсткость–сила» и картинками распространения пластичности по глубине сечений стержня (рис. 5 и 6).

На рис. 5а большая часть точек стержня перешла в состояние пластического нагружения (состояние  $AB$  – белая зона). На рис. 5б начинается разгрузка (состояние  $CD$  – зона с горизонтальной штриховкой). При этом часть точек стержня остаётся в зоне упругости (состояние  $OA$  – серая зона). На рис. 5в часть точек, которые оставались в зоне упругости  $OA$ , переходит в пластичность  $AB$ , от чего падает жесткость сечения  $\xi = \pi/2$ .

В результате происходит нарушение корректности квазистатической постановки:  $P_i > I(\pi/2) \Rightarrow \Delta v_i < 0$ .

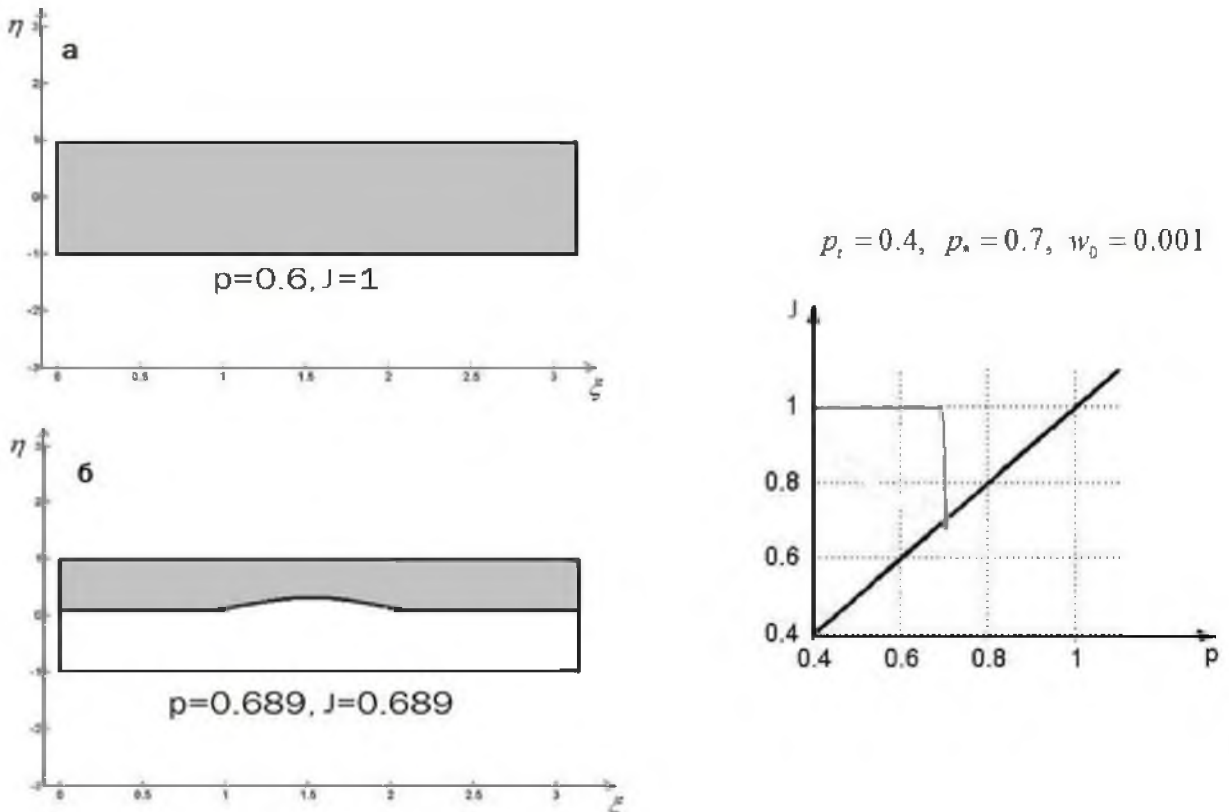


Рис. 6.  $P_{III} = 0,4, P_* = 0,7, v_0 = 0,001$ .

На рис. 6а все точки стержня находятся в упругой зоне  $OA$  – серая зона. Далее происходит переход части точек в пластичность (состояние  $AB$  – белая зона), что вызывает



резкое уменьшение жёсткости и нарушение корректности квазистатической постановки (рис. 6б и 6в)).

2) В цитированных выше статьях [14, 15] сделан вывод: при изучении продольного изгиба стержня, материал которого имеет произвольную диаграмму  $\sigma : \varepsilon$ , квазистатическая постановка корректна до тех пор, пока выполняется условие (1.23):  $I > P$ . При нарушении этого условия говорим об исчерпании несущей способности стержня.

**3. Обсуждение классических результатов [29].** Л. Эйлер, заложивший основы теории продольного изгиба, вывел формулу критической силы, «силы колонны»:

$$P_{\text{Э}} = \pi^2 \frac{EI}{L^2} . \quad (3.1)$$

Рассмотрим упруго-пластический материал с линейным упрочнением, рис. 2. Предположим, что под действием продольной силы, приложенной к идеально прямому стержню (при условии  $P_t > P_*$ ,  $P_t$  – сила касательного модуля,  $P_*$  – сила, соответствующая пределу пропорциональности), все его точки «вышли» в состояние  $AB$ . Тогда для вычисления критической силы в формуле (3.1) модуль  $E$  следует заменить модулем упрочнения (касательным модулем):

$$P_t = \pi^2 \frac{E_t I}{L^2} . \quad (3.2)$$

К этому в своё время пришёл Ф. Энгессер [30], но, под влиянием критики со стороны Ф.С. Ясинского [31], Энгессер вводит понятие приведённого модуля, в выражении которого учитывается упругая разгрузка. Для прямоугольного сечения приведённый модуль имеет вид:

$$E_k = \frac{4EE_t}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_t})^2} . \quad (3.3)$$

Т. Карман в своей докторской диссертации распространил понятия касательного и приведённого модулей на материалы с произвольной диаграммой  $\sigma : \varepsilon$ . Были поставлены эксперименты по продольному изгибу, до сих пор являющиеся образцовыми [22].

Приводим интерпретацию идей Кармана, данную А.С. Вольмиром [23].

Объединим формулы (3.1)–(3.3):

$$P_{\text{кр}} = \pi^2 \frac{\tilde{E}I}{L^2} \Rightarrow \frac{P_{\text{кр}}}{F} = \sigma_{\text{кр}} = \pi^2 \frac{\tilde{E}}{\lambda^2} . \quad (3.4)$$

Здесь  $F = \text{const}$  – площадь,  $\text{м}^2$ ;  $\lambda = L/r$  – гибкость стержня;  $r$  – радиус инерции сечения,  $\text{м}$ ;  $\tilde{E}$  может принимать значения:  $E$ ,  $E_t$ ,  $E_k$ .

Из (3.4) получим гибкость как функцию критического напряжения:

$$\lambda = \pi \sqrt{\frac{\tilde{E}}{\sigma_{\text{кр}}}} . \quad (3.5)$$

В [23] приведены данные об эксперименте по продольному изгибу дюралюминовых стержней прямоугольного сечения.



Пусть, например напряжение  $\sigma_1(P_1/F)$  есть критическое (бифуркационное) напряжение для данного стержня. На диаграмме  $\sigma : \varepsilon$  материала находим точку  $(\sigma_1, \varepsilon_1)$ , рис. 7, и в этой точке измеряем значение касательного модуля  $E_{t1}$ ; по формуле (3.3) определяем приведённый модуль  $E_{k1}$ .

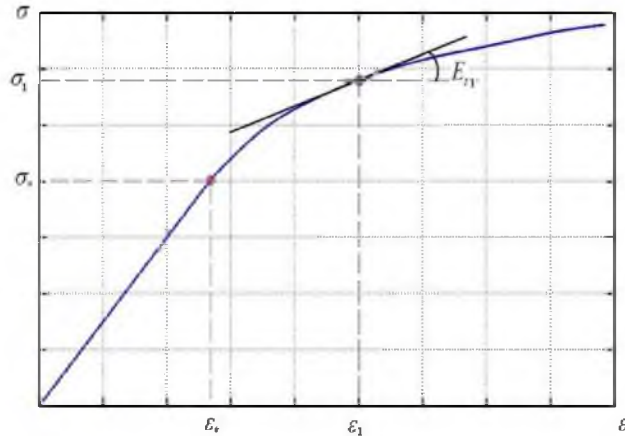


Рис. 7.

Далее вычисляются «критические» гибкости, соответствующие значениям найденных модулей:

$$\lambda_{t1} = \pi \sqrt{\frac{E_{t1}}{\sigma_1}}, \quad \lambda_{k1} = \pi \sqrt{\frac{E_{k1}}{\sigma_1}}. \quad (3.6)$$

Действуя подобным образом, можно построить графики  $\sigma_{кр} : \lambda$ , по которым для стержня данной гибкости можно оценить критическую силу. В литературе говорится о том, что экспериментальные точки  $(\sigma_{кр}, \lambda)$  ложатся ближе к кривой  $\sigma_{кр} : \lambda_t$ , [22, 23, 24]. Заметим, что при построении кривых  $\sigma_{кр} : \lambda$  начальный прогиб стержня не учитывается.

В работах [14, 15] приведены данные численных экспериментов, выполненных согласно описанному выше методу последовательных нагружений, для стержней с начальным прогибом (неизбежным в реальных условиях) для любых законов  $\sigma : \varepsilon$ . В работе [23] дана таблица значений  $\sigma : \varepsilon$ , соответствующая испытаниям на сжатие образцов из дюралюмина Д16Т.

Модуль упругости принят равным  $E = 7.35 \times 10^{10} \text{ Н/м}^2$  (в работе  $E = 7.5 \times 10^9 \text{ кгс/м}^2$ ); предел пропорциональности  $\sigma_* = 1.96 \times 10^8 \text{ Н/м}^2$  ( $\sigma_* = 2 \times 10^7 \text{ кгс/м}^2$ ).

Интерполируем кубическими сплайнами данные таблицы, чтобы получить более подробный график  $\sigma : \varepsilon$  и в каждой точке вычисляем через разностную производную значение касательного модуля  $E_t$ . По формуле (3.3) получаем значения приведённого модуля  $E_k$ .

Зададим начальные прогибы  $\{w_{0k}\}_{k=\overline{1,n}}$ ; по вычислительной методике, изложенной выше, [11, 12], определяем критические силы, т.е. силы, соответствующие исчерпанию несущей способности (наименьшие безразмерные силы, при которых нарушается условие  $I > p$ ):

$$\{w_{0k}\}_{k=\overline{1,n}} \Rightarrow \{\tilde{p}_k\}_{k=\overline{1,n}}.$$



В силу определения безразмерной нагрузки имеем:

$$\tilde{p} = \frac{P_{кр}}{P_э} \Rightarrow P_{кр} = \tilde{p}P_э = \tilde{p}\pi^2 \frac{EI}{L^2} = \tilde{p}\pi^2 \frac{EF}{\lambda^2} \Rightarrow \sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} = \pi^2 \frac{\tilde{p}F}{\lambda^2}. \quad (3.7)$$

Задавая последовательность  $\{\lambda_i\}$ , получим по (3.7) значения критических напряжений для данного значения начального прогиба.

Для данного значения  $w_0$  строится диаграмма  $\sigma_{кр} : \lambda$ . Полученная диаграмма «накладывается» на диаграммы работы [23]. В таблицах 1 и 2 показаны зависимости для «малого» и «большого» начальных прогибов.

Таблица 1

$$w_0 = 0.00001$$

$\lambda$	62,25	56,08	50,8	43,76	37,6	32,32	26,16	20
$\sigma_{кр} \text{ (Н/м}^2 \times 10^{-8}\text{)}$	1,87	2	2,12	2,38	2,49	2,64	2,88	3,05

Таблица 2

$$w_0 = 0.1$$

$\lambda$	62,2	56,08	50,8	43,76	37,6	32,32	26,16	20
$\sigma_{кр} \text{ (Н/м}^2 \times 10^{-8}\text{)}$	1,87	2,06	2,3	2,51	2,74	2,94	3,15	3,33

При сравнении наших зависимостей  $(\sigma_{кр}, \lambda)$  с построенными в [23] отмечаем тенденцию: при малых значениях  $w_0$  точки графика  $(\sigma_{кр}, \lambda)$  в основном попадают на кривую  $(\sigma_{кр}, \lambda_t)$ ; при больших значениях  $w_0$  точки  $(\sigma_{кр}, \lambda)$  попадают на кривую  $(\sigma_{кр}, \lambda_k)$ , рис. 8.

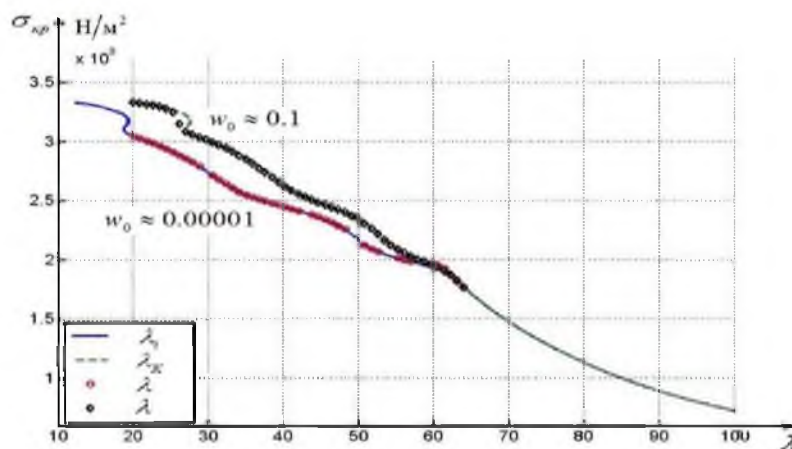


Рис. 8.

Отсюда заключаем: при малых значениях  $w_0$  продольный изгиб происходит в основном без разгрузки (см. диаграмму  $I : P$ , рис. 9а); при больших  $w_0$  – свою роль играет разгрузка в срединном сечении, рис. 9б.

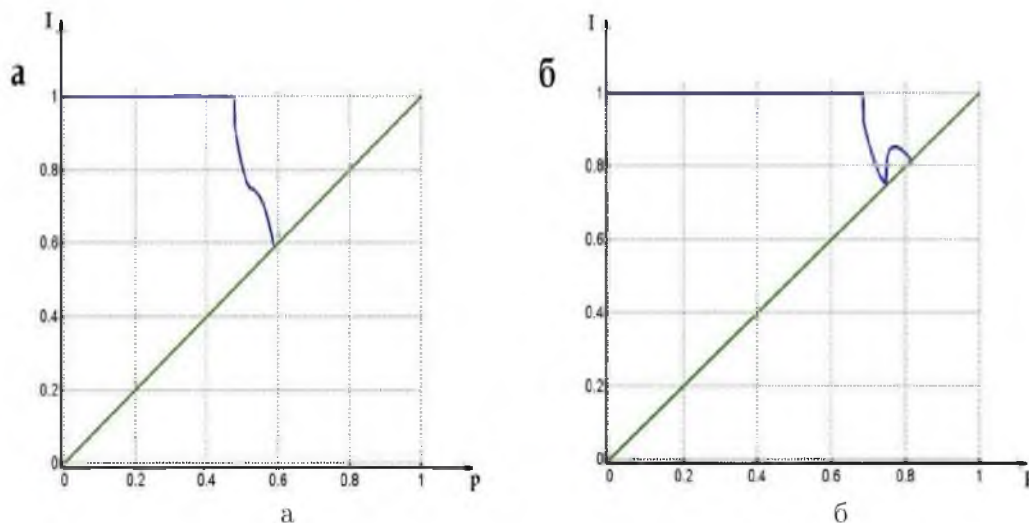


Рис. 9.

Подобная тенденция выявлена и при изменении скорости нагружения: при фиксированном  $w_0$  и «быстром нагружении»:  $\Delta p : 10^{-3}$  (здесь и далее под  $\Delta p$  подразумеваем минимальное но всем  $\lambda_t$  приращение безразмерной нагрузки) продольный изгиб протекает без разгрузки (жесткость срединного сечения постоянна,  $I = 1$ , затем монотонно падает) – концепция Шэнли [16], рис. 10а; при медленном нагружении,  $\Delta p : 10^{-5}$ , точки срединного сечения проходят все стадии диаграммы  $\sigma : \varepsilon$  – концепция Кармана, рис. 10в.

Обращаем внимание на следующее:

1). По сути своей касательно- и приведенно-модульный подходы аналогичны решению задачи методом коллокации по срединному сечению: по всему стержню считаем жесткости поперечных сечений по касательному или приведённому модулям.

2). В работах [11, 15] дано обоснование использования метода коллокации в задачах о продольном изгибе. В этом – объяснение факта совпадения диаграмм  $(\sigma_{кр}, \lambda)$  с  $(\sigma_{кр}, \lambda_t)$  или с  $(\sigma_{кр}, \lambda_k)$ .

Последнее зависит от начального прогиба и скорости нагружения.

3). Из определения устойчивости по Карману: во время изменения нагрузки принимаются меры к недопущению искривления и исследуется возможность бифуркации при постоянной нагрузке, [18].

Таким образом, в опытах Кармана скорость нагружения достаточно мала, поэтому точки  $(\sigma_{кр}, \lambda)$  попадают на кривую  $(\sigma_{кр}, \lambda_k)$ , рис. 10в. При увеличении скорости нагружения, *продолжающееся нагружение*, [16], точки  $(\sigma_{кр}, \lambda)$  группируются на кривой  $(\sigma_{кр}, \lambda_t)$ , рис. 10а.

Рис. 10б даёт представление о промежуточном случае: точки практически равномерно распределены между диаграммами  $(\sigma_{кр}, \lambda_t)$  и  $(\sigma_{кр}, \lambda_k)$ .

**4. Выпучивание в условиях ползучести.** При изучении процесса выпучивания при ползучести за критерий «потери устойчивости» (достаточное условие) обычно принимается какая-то характерная особенность кривой «прогиб – время». Например, обращение прогиба в бесконечность при конечном времени [27], точка минимума [2],



точка перегиба [25, 26], обращение скорости прогиба в бесконечность (при конечном прогибе) [28]. Подробный обзор этих критериев содержится в монографиях [23, 24].

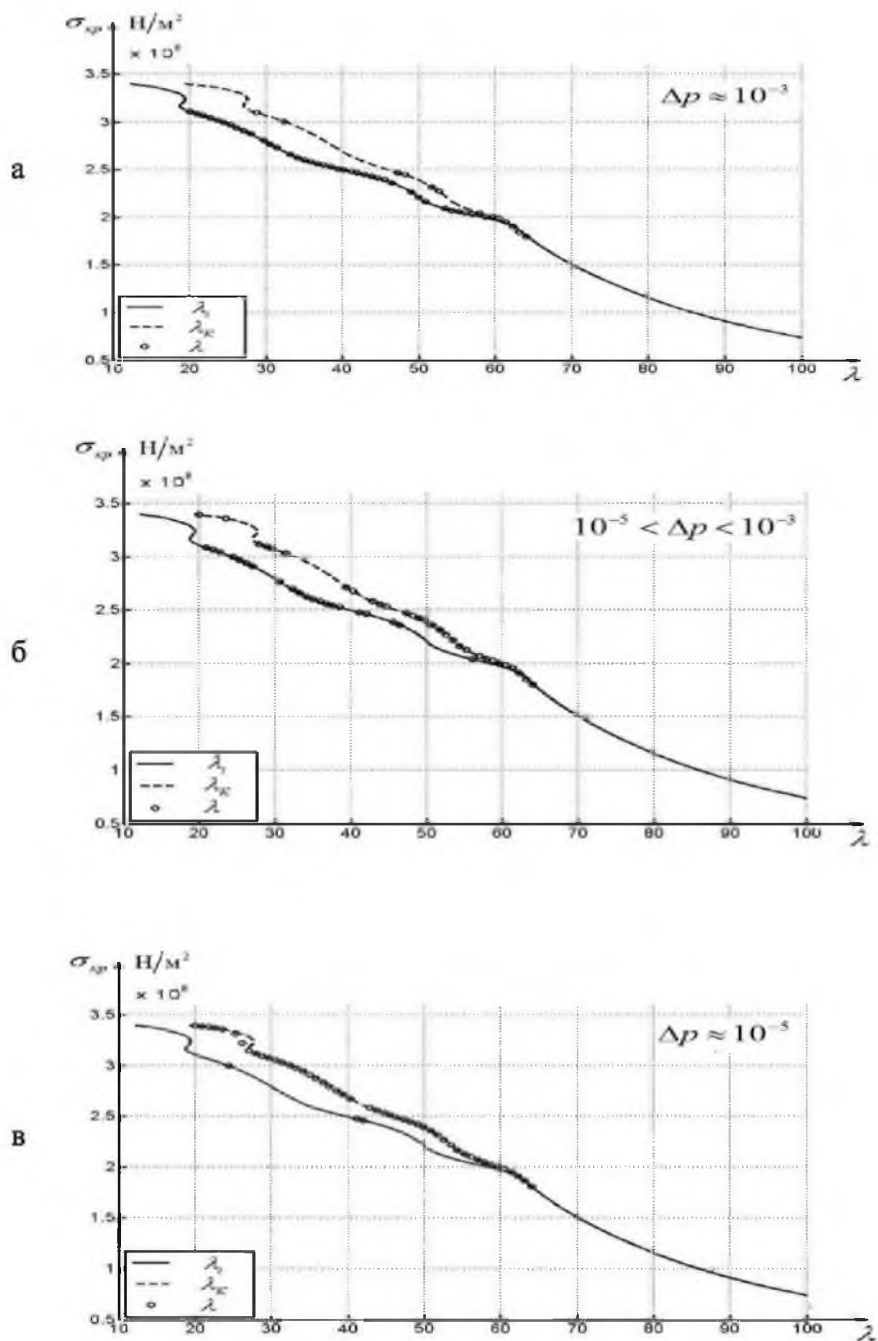


Рис. 10.

Пусть упруго-пластический стержень работает в условиях ползучести. Примем условие аддитивности для упругих, пластических и деформаций ползучести:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + f(\sigma) + \epsilon(\sigma, t). \quad (4.1)$$



Приложенная к стержню с начальной неправильностью  $v_{00}(x)$  продольная сила квазистатически возрастает до значения  $p_0$ . При этом стержень упруго-пластически нагружается, вычисляется его напряжённо-деформированное состояние (НДС) и достигнутый прогиб  $v_0(x)$ . Эти данные являются исходными для изучения процесса выпучивания под действием постоянной силы  $p_0$ . Приводим основные результаты исследования, полученные в работе [11].

При линейном упрочнении и установившейся ползучести характерные зависимости «время–прогиб» (безразмерные величины) представлены на рис. 11.

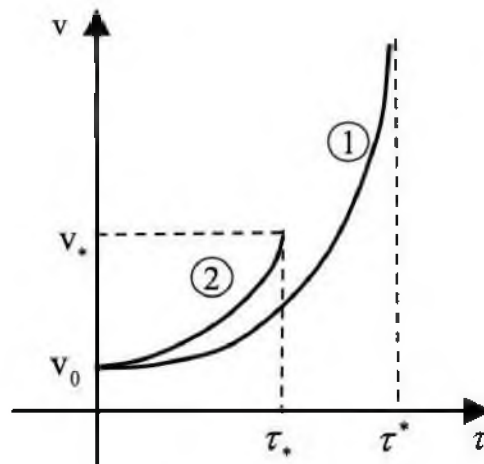


Рис. 11.

В этом случае различаются два вида характерных кривых  $v : \tau$  в зависимости от соотношения между приложенной силой  $p_0$  и касательно-модульной нагрузкой  $p_t$  (при условии  $p_t > p_*$ , для определённости).

При  $p_t > p_0$  кривая  $v : \tau$  имеет вертикальную асимптоту  $\tau : \tau^*$ , кривая 1, рис. 11; критическое время  $\tau = \tau^*$  – «время жизни» конструкции. Здесь жёсткость на изгиб срединного сечения во всё время процесса больше приложенной силы:  $I > p_0$ .

При  $p_0 > p_t$  имеются конечное время  $\tau_*$  (критическое время) и конечный прогиб  $v_*$ : в точке  $(\tau_*, v_*)$  скорость прогиба  $\dot{v} \rightarrow \infty$ . Точка  $(\tau_*, v_*)$  характерна тем, что в ней  $I = p_0$ , т.е. нарушается корректность квазистатической постановки [13], рис. 11, кривая 2.

Результаты решения системы (1.17), (1.18) – значения  $v_*$  и  $\tau_*$  отражены в небольших таблицах (4.2) и (4.4);  $\sigma_* = p_* = 0,45$ , скорость установившейся ползучести  $\dot{\epsilon} = \sigma^7$ .

1) Материал с линейным упрочнением:  $\nu = E_t/E = 0,7$

$$\begin{aligned} p_0 &= 0,65 & 0,7 & 0,75 \\ v^* &= \infty & \infty & 0,71 \\ \tau^* &= 1,02 & 0,25 & 0,02 \end{aligned} \tag{4.2}$$

2) Материал с нелинейным упрочнением:  $\epsilon = \sigma + A(\sigma - \sigma_T)^5$  ( $A = 7/15$ ) (4.3)

$$\begin{aligned} p_0 &= 0,525 & 0,72 & 0,82 \\ v^* &= 1,12 & 0,46 & 0,22 \\ \tau^* &= 28,1 & 0,82 & 0,7 \end{aligned} \tag{4.4}$$



На рис. 12 показана кривая  $v : \tau$ , соответствующая процессу выпучивания стержня с упруго-пластической диаграммой  $\sigma : \varepsilon$  (4.3) и законом ползучести по теории упрочнения [2]:  $\dot{\varepsilon}\varepsilon^\alpha = \sigma^\tau$ . На этой кривой ( $\alpha = 1, p_0 = 0.72, v_{00} = 0.01$ ) имеются характерные точки:  $\tau = \tau_1$  – точка перегиба графика;  $(\tau^*, v^*)$  – точка, где выполняется условие  $I = p_0$  и  $\dot{v} \rightarrow \infty$ .

Отметим, что с ростом показателя степени  $\alpha$  отношение  $\tau_1/\tau^* \rightarrow 1$ , т.е. критерий  $v''(\tau_1) = 0$  [25, 26] сближается с условием  $I = p$ .

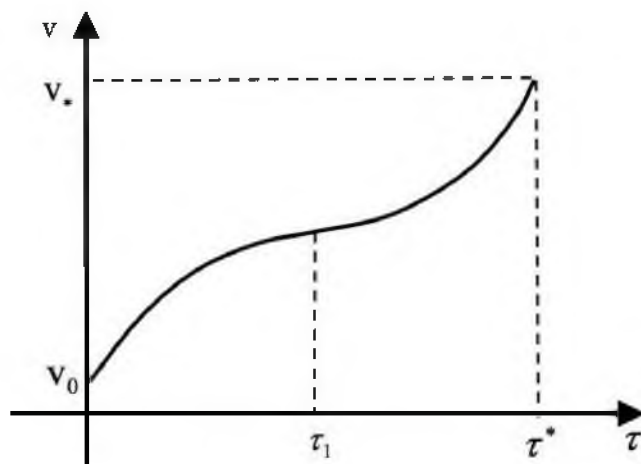


Рис. 12.

Итак, представленные в данной работе исследования показывают, что большинство известных «критериев устойчивости» как для упруго-пластического деформирования, так и для условий ползучести, имеют весьма ограниченную область применения, либо вообще не отражают никаких особенностей на кривых  $v : p$  или  $v : \tau$ .

Условие  $I > p$  можно считать наиболее общим условием, при выполнении которого квазистатическая постановка корректна (непротиворечива). Очевидно, что в общем случае необходимо решать задачу о продольном изгибе или выпучивании с учётом всей истории нагружения в каждой точке стержня. Однако расчёты показали, что процесс вычислений можно существенно упростить, используя метод коллокации.

**Замечание.** Отметим, что условие  $I > p$  есть по сути развитие концепции Хоффа-Веубеке [27, 28]: при выпучивании стержня (в условиях ползучести) под действием постоянной силы жёсткость срединного сечения с течением времени непрерывно падает (см. зависимость  $\sigma : \varepsilon$  (4.3)) и, наконец, в момент  $\tau = \tau^*$  становится равной приложенной силе, т.е. любая приложенная сила становится в момент  $\tau = \tau^*$  критической по Эйлеру.

### Литература

1. Ванько В.И. Продольный изгиб и выпучивание. Часть I: Модель Шэнли // Научные ведомости. Математика. Физика. – 2014. – №5 (176); 34. – С.112-125.
2. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций / М.: Физматгиз, 1966. – 752 с.
3. Макаров Б.П. О поведении сжато-изогнутых стержней в пластической стадии // Строительная механика и расчёт сооружений. – 1965. – №5. – С.35-37.



4. Ježek K. Die Tragfähigkeit des exzentrisch beanspruchten und des querbelasteten Druckstabes aus einem ideal plastischen Stahl // Sitzungsberichte der Academie der Wissenschaften in Wien. – Abteilung IIa. – 1934. – В.143; 7. – S.339-366.
5. Ржаницын А.Р. Процессы деформирования конструкций из упруго-вязких элементов // ДАН СССР. – 1946. – ЛII; №1. – С.25-27.
6. Багиров И., Шестериков С.А. Вязкоупругие идеальнохрупкие стержни // МТТ. – 1966/ – №4. – С. 124–127.
7. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике / М.: ГИТТЛ, 1957. – 476 с.
8. Lin T.-H. Creep stress and deflections of columns // JAS. – 1950. – 17, №3. – P.159– 172.
9. Libove C. Creep buckling of columns // JAS. – 1952. – 19, №7. – P.459–467.
10. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Часть I / М.: Наука. – 632 с.
11. Ванько В.И., Шестериков С.А. Продольный изгиб и выпучивание // МТТ. – 1967. – №2. – С.157–162.
12. Ванько В.И. Продольный изгиб упругопластического стержня // МТТ. – 1968. – №4. – С.171–174.
13. Ванько В.И. О критериях выпучивания в условиях ползучести // ПМТФ. – 1965. – №2. – С.127-130.
14. Перельгина Е.С. Математическое моделирование продольного изгиба стержня с произвольной диаграммой  $\sigma \sim \varepsilon$  // Необратимые процессы в природе и технике: Труды VI Всеросс. Конф. – 2011, Часть II / М.: МГТУ им. Н.Э.Баумана. – 342 с.
15. Перельгина Е.С. О продольном изгибе упругопластического стержня с произвольной диаграммой  $\sigma \sim \varepsilon$  // Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Спец. выпуск: Прикл. математика. – 2011. – С.177-184.
16. Shanley F. Inelastic column theory // JAS. – 1947. – 14; №5. – P.261-267.
17. Работнов Ю.Н. О равновесии сжатых стержней за пределом пропорциональности // Инж. сборник. – 1952. – XI. – С.123-126.
18. Работнов Ю.Н. Сопrotивление материалов / М.: Физматгиз, 1962. – 456 с.
19. Пановко Я.Г. О критической силе сжатого стержня за пределом пропорциональности // Инж. сб. – 1954. – XX. – С.160-163.
20. Лепик Ю.Р. О равновесии сжатых упруго-пластических стержней // ПММ. – 1957. – XXI. – С.101-108.
21. Лепик Ю.Р. Изучение послекритической стадии сжатого упруго-пластического стержня с учетом вторичных пластических деформаций // Уч. записки Тартуского гос. университета. Труды по математике и механике. – 1959. – Вып.73. – С.168–178.
22. Kármán Th., von Die Knickfestigkeit gerader Stübe // Physikalische Zeitschrift. – 1908. – В.8, S.136 (см. Kármán Th., von Collected Works. Vol. 1: 1902-1913 / London: Butter Worths Scientific Publications, 1956. – 531 с.).
23. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем / М.: Физматгиз, 1963. – 880 с.
24. Зубчанинов В.Г. Устойчивость / Учебное пособие. Часть 1 / Тверь: Тв. политехн. ин-т, 1995. – 200 с.
25. Шестериков С.А. О критериях устойчивости при ползучести // ПММ. – 1959. – 23;6. – С.1101-1106.
26. Куршин Л.М. Устойчивость стержней в условиях ползучести // ПМТФ. – 1961, – №6. – С.128-135.
27. Hoff N.J. Creep Buckling // The Aeronautical Quarterly. – 1956. – 7; №2. – P.1-20.
28. Veubeke F. Creep Buckling // Chapter 13 in Temperature effects in Aircraft Structures / N.-Y.: Pergamon Press, 1958. – 420 с.
29. Ванько В.И., Перельгина Е.С. Продольный изгиб упругопластического стержня: обсуждение классических результатов // Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Серия «Естественные науки». Спец. выпуск Прикл. математика. Часть 2. – 2012. – С.9–15.
30. Engesser F. Über Knickfestigkeit // Schweiz. Bauzeitung. – 1895. – В.26; 24.



31. Jasinski F. Zu den Knickfragen // Schweiz. Bauzeitung. – 1895. – В.26;24 (см. Ясинский Ф.С. Избранные труды / М.: ГТИ, 1952. – 428 с.).

**LONGITUDINAL BEND AND SWELLING.  
Part II: ROD OF COMPLETE CROSS SECTION**

**V.I. Vanko, E.S. PereLygina**

Bauman MSTU  
2d Bauman St., 5, Moscow, 105005, Russia, e-mail: [vvanko@mail.ru](mailto:vvanko@mail.ru)

**Abstract.** Processes of longitudinal bend and swelling of the rod with complete cross section are studied at the condition of material creep. Elastic-plastic properties of the rod material are described by an arbitrary diagram  $\sigma \sim \varepsilon$ . By the numeric experiment it is proved that the exhausting of bearing ability of the rod (the correctness destruction of quasistatic setting) occurs at the condition when applied longitudinal force is equal to the rigidity of the center cross section (at dimensionless parameters).

**Key words:** rod of complete cross section, diagram  $\sigma \sim \varepsilon$ , creep, correctness, quasistatic setting, rod bearing ability.