МАТЕМАТИКА

MSC 11P05

ПРОБЛЕМА ВАРИНГА С НАТУРАЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

С.А. Гриценко, Н.Н. Мотькина

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, 308015, Белгород, Россия, e-mail: Motkina@bsu.edu.ru

Аннотация. В работе решается вариант проблемы Варинга с натуральными числами x, такими, что $a < \{\eta x^n\} < b$, где a и b — произвольные числа из отрезка $[0, 1]$, η — квадратичная иррациональность.

Ключевые слова: аддитивные задачи, проблема Варинга, число решений, асимптотическая формула, квадратичная иррациональность.

1. Введение. Настоящая работа является продолжением исследований авторов аддитивных задач с числами из специальных множеств. Для числа решений $I_{3,1}(N)$ *задачи Гольдбаха* о представимости нечетного натурального N в виде суммы трех простых чисел:

$$p_1 + p_2 + p_3 = N$$

в 1937 г. И.М. Виноградов получил асимптотическую формулу [1], а именно доказал, что:

$$I_{3,1}(N) \sim \frac{N^2}{2(\log N)^3} \prod_p \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right) \prod_{p|N} \left(1 - \frac{1}{p^2 - 3p + 3}\right).$$

В 1938 г. Хуа Ло-Кен доказал [4], что достаточно большое натуральное N, $N \equiv 5 \pmod{24}$, представимо суммой квадратов пяти простых чисел (*задача Хуа Ло-Кена*):

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 = N.$$

Для числа представлений $I_{5,2}(N)$ Хуа показал [7], что

$$I_{5,2}(N) \asymp \frac{N^{3/2}}{(\log N)^5}.$$

В 1770 г. Ж. Лагранж доказал, что каждое натуральное число есть сумма не более четырех квадратов натуральных чисел (*задача Лагранжа*):

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 = N.$$

Для числа решений $I_{4,2}(N)$ задачи Лагранжа известно, что [4]

$$I_{4,2}(N) = \pi^2 N \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^4} \sum_{\substack{1\le a\le q \\ (a,q)=1}} S_{a,q}^4 e^{-2\pi i N a/q} + O(N^{17/18+\varepsilon}),$$

где

$$S_{a,q} = \sum_{j=1}^{q} e^{2\pi i a j^2/q}.$$

Пусть η — квадратичная иррациональность, a и b — произвольные действительные числа, $0 \le a < b \le 1$. Ранее нами получены следующие результаты.

Теорема 1 [5]. *Для числа решений $J_{3,1}(N)$ задачи Гольдбаха с простыми p_i, $a < \{\eta p_i\} < b$, $i = 1,2,3$, при любом фиксированном положительном C справедливо равенство*

$$J_{3,1}(N) = I_{3,1}(N)\sigma_3(N,a,b) + O(N^2 \log^{-C} N),$$

где

$$\sigma_3(N,a,b) = \sum_{|m|<\infty} e^{2\pi i m(\eta N - 1,5(a+b))} \frac{\sin^3 \pi m(b-a)}{\pi^3 m^3}.$$

Теорема 2 [6]. *Пусть $J_{5,2}(N)$ — число решений задачи Хуа Ло–Кена с простыми числами p_i, $a < \{\eta p_i^2\} < b$, $i = 1,2,3,4,5$. Для достаточно большого $N \equiv 5 \pmod{24}$ справедлива формула*

$$J_{5,2}(N) = I_{5,2}(N)\sigma_5(N,a,b) + O(N^{3/2-0,00002}),$$

где

$$\sigma_5(N,a,b) = \sum_{|m|<\infty} e^{2\pi i m(\eta N - 2,5(a+b))} \frac{\sin^5 \pi m(b-a)}{\pi^5 m^5}.$$

Теорема 3 [7]. *Число решений $J_{4,2}(N)$ задачи Лагранжа в целых числах l_i, $a < \{\eta l_i\} < b$, $i = 1,2,3,4$ для любого положительного малого ε выражается формулой*

$$J_{4,2}(N) = (b-a)^4 I_{4,2}(N) + O(N^{0,9+\varepsilon}).$$

Полученные нами в теоремах 1 и 2 формулы отличаются от асимптотических формул классических задач Гольдбаха и Хуа Ло-Кена в простых числах без ограничений. У нас в главных членах появляются ряды $\sigma_3(N,a,b)$, $\sigma_5(N,a,b)$ специального вида. Изучение поведения этих рядов представляет собой отдельную проблему, которая исследуется авторами в [8].

В данной работе рассмотрена *проблема Варинга*:

$$x_1^n + x_2^n + \ldots + x_k^n = N \tag{1}$$

с натуральными числами $x_1, x_2, \ldots, x_k$ специального вида. Число решений $J(N)$ рассматриваемой задачи связано с числом решений $I(N)$ классической задачи, причем в главном члене появляется ряд $\sigma(N,a,b)$ того же типа, что и в теоремах 1, 2.

Теорема 4. *Пусть $k \geq cn^2 \log n$, $n \geq 3$. Тогда для числа решений $J(N)$ проблемы Варинга в натуральных числах $x_1, x_2, \ldots, x_k$ таких, что $a < \{\eta x_j^n\} < b$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$, справедлива асимптотическая формула.*

$$J(N) = I(N)\sigma(N,a,b) + O(N^{\frac{k}{n}-1-\frac{c_1}{n^2}})\,,$$

где $I(N)$ — число решений уравнения (1) в произвольных натуральных числах $x_1, x_2, \ldots, x_k$,

$$\sigma(N,a,b) = \sum_{|m|<\infty} e^{2\pi i m(\eta N - k(a+b)/2)} \frac{\sin^k \pi m(b-a)}{\pi^k m^k}\,.$$

Для $I(N)$ известно [12], что при $k \geq cn^2 \log n$,

$$I(N) \sim \frac{(\Gamma(1+1/n))^k}{\Gamma(k/n)} N^{k/n-1}\,.$$

2. Вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q\tau}\,, \quad (a,q) = 1, \quad 0 \leq a < q \leq \tau\,, \quad |\theta| \leq 1\,.$$

Пусть η — алгебраическое число степени $s \geq 2$, m — натуральное число, $m \leq 2M$. Тогда существуют целые взаимно простые числа A и Q такие, что

$$\left|\alpha + \eta m - \frac{A}{Q}\right| \leq \frac{1}{2\sqrt{\tau} q Q}\,,$$

$$\frac{(c_0\sqrt{\tau})^{\frac{1}{s-1}}}{8Mq} \leq Q \leq 2\sqrt{\tau} q\,,$$

где $c_0 = c_0(\eta) > 0$.

□ В силу теоремы Дирихле существуют целые числа A_1 и Q_1 такие, что

$$\left|\eta - \frac{A_1}{Q_1}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{\tau} Q_1}\,, \quad (A_1, Q_1) = 1, \quad 1 \leq Q_1 \leq \sqrt{\tau}\,. \tag{2}$$

По условию леммы 1

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leq \frac{1}{q\tau}\,, \quad (a,q) = 1, \quad 1 \leq q \leq \tau\,. \tag{3}$$

Тогда из теоремы Дирихле следует, что существуют целые взаимно простые числа A и Q такие, что

$$\left|\alpha+\eta m-\frac{A}{Q}\right| \leq \frac{1}{2\sqrt{\tau}qQ}, \quad 1 \leq Q \leq 2\sqrt{\tau}q. \tag{4}$$

Докажем, что

$$\frac{(c_0\sqrt{\tau})^{\frac{1}{s-1}}}{8Mq} \leq Q \leq 2\sqrt{\tau}q,$$

где $c_0 = c_0(\eta) > 0$.

Из неравенства (2) имеем

$$\left|\eta-\frac{A_1 m}{Q_1}\right| \leq \frac{m}{\sqrt{\tau}Q_1}.$$

Пусть

$$\frac{A_1 m}{Q_1}=\frac{A_2}{Q_2}, \quad (A_2, Q_2)=1, \quad Q_2 \leq Q_1 \leq \sqrt{\tau},$$

тогда

$$\left|\eta-\frac{A_2}{Q_2}\right| \leq \frac{m}{\sqrt{\tau}Q_2}. \tag{5}$$

Из (3) и (5) следует, что

$$\left|\alpha+\eta m-\frac{aQ_2+qA_2}{qQ_2}\right| \leq \frac{1}{q\tau}+\frac{m}{\sqrt{\tau}Q_2}.$$

Поскольку $Q_2 \leq \sqrt{\tau}$,

$$\frac{1}{q\tau}+\frac{m}{\sqrt{\tau}Q_2} \leq \frac{2m}{\sqrt{\tau}Q_2},$$

то

$$\left|\alpha+\eta m-\frac{A_3}{Q_3}\right| \leq \frac{2m}{\sqrt{\tau}Q_2},$$

где

$$\frac{A_3}{Q_3}=\frac{aQ_2+qA_2}{qQ_2}, \quad (A_3, Q_3)=1.$$

Пусть в приближении (4) числа $\alpha+\eta m$ рациональной дробью A/Q сначала $Q \neq Q_3$. Тогда

$$\frac{1}{QQ_3} \leq \left|\frac{A}{Q}-\frac{A_3}{Q_3}\right| = \left|\left(\frac{A}{Q}-\alpha-\eta m\right)-\left(\frac{A_3}{Q_3}-\alpha-\eta m\right)\right| \leq$$
$$\leq \frac{1}{2\sqrt{\tau}qQ}+\frac{2m}{\sqrt{\tau}Q_2}. \tag{6}$$

Поскольку $Q_3 \leq Q_2 \leq q\sqrt{\tau}$, из (6) имеем

$$\frac{1}{QQ_3} \leq \frac{1}{2\sqrt{\tau}qQ}+\frac{2m}{\sqrt{\tau}Q_2} \leq \frac{1}{2QQ_3}+\frac{2m}{\sqrt{\tau}Q_3},$$

поэтому

$$Q \geq \frac{\sqrt{\tau}}{4m} .$$

Рассмотрим теперь случай, когда в неравенстве (4) Q совпадает с Q_3. Пусть $\delta|(aQ_2 + qA_2, qQ_2)$, тогда $\delta|(aqQ_2 + q^2A_2, q^2Q_2)$, следовательно, $\delta|(q^2A_2, q^2Q_2) = q^2$, откуда $\delta \leq q^2$. Тогда имеем:

$$Q_3 \geq \frac{Q_2}{q} .$$

Кроме того,

$$Q_2 \geq \frac{Q_1}{m} \geq \frac{Q_1}{2M} ,$$

значит,

$$Q_3 \geq \frac{Q_1}{2Mq} .$$

По теореме Лиувилля,

$$\frac{c_0}{Q_1^s} \leq \left|\eta - \frac{A_1}{Q_1}\right| \leq \frac{1}{Q_1\sqrt{\tau}} ,$$

где $c_0 = c_0(\eta) > 0$. Тогда имеем

$$Q_1 \geq (c_0\sqrt{\tau})^{\frac{1}{s-1}}, \quad Q_3 \geq \frac{(c_0\sqrt{\tau})^{\frac{1}{s-1}}}{2Mq} .$$

Мы доказали, что существуют целые взаимно простые числа A и Q такие, что

$$\left|\alpha + \eta m - \frac{A}{Q}\right| \leq \frac{1}{2\sqrt{\tau}qQ} ,$$

при

$$\frac{(c_0\sqrt{\tau})^{\frac{1}{s-1}}}{8Mq} \leq \min\left(\frac{(c_0\sqrt{\tau})^{\frac{1}{s-1}}}{2Mq}, \frac{\sqrt{\tau}}{4m}\right) \leq Q \leq 2\sqrt{\tau}q .$$

Лемма 2 ([13], с. 22). *Пусть r — натуральное число, α и β— вещественные числа, $0 < \Delta < 1/4$, $\Delta \leq \beta - \alpha \leq 1 - \Delta$. Тогда существует периодическая с периодом 1 функция $\psi(x)$, удовлетворяющая условиям:*

1. *$\psi(x) = 1$ в промежутке $\alpha + \Delta/2 \leq x \leq \beta - \Delta/2$,*

2. *$0 < \psi(x) < 1$ в промежутках $\alpha - \Delta/2 < x < \alpha + \Delta/2$ и $\beta - \Delta/2 < x < \beta + \Delta/2$,*

3. *$\psi(x) = 0$ в промежутке $\beta + \Delta/2 \leq x \leq 1 + \alpha - \Delta/2$,*

4. *$\psi(x)$ разлагается в ряд Фурье вида*

$$\psi(x) = \beta - \alpha + \sum_{0<|m|<\infty} c(m)e^{2\pi imx},$$

где

$$|c(m)| \le \min\left(\beta-\alpha, \frac{1}{\pi|m|}, \frac{1}{\pi|m|}\left(\frac{r}{\pi|m|\Delta}\right)^r\right).$$

Лемма 3 ([12], с. 85). *Пусть $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ — целые числа, $J_{k,n}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ — число решений системы уравнений*

$$\begin{cases} x_1+\dots+x_k-x_{k+1}-\dots-x_{2k} &= \lambda_1, \\ x_1^n+\dots+x_k^n-x_{k+1}^n-\dots-x_{2k}^n &= \lambda_n, \end{cases}$$

$$1 \le x_1,\dots,x_{2k} \le P.$$

Справедливы следующие соотношения:

1. $J_{k,n}(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \le J_{k,n}(0,\dots,0)$;
2. $\sum_{\lambda_1,\dots,\lambda_n} J_{k,n}(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = P^{2k}$;
3. $|\lambda_1| < kP, \dots, |\lambda_n| < kP^n$.

Лемма 4 ([13], с. 76). *Пусть $f(x) = \alpha_n x^n + \ldots + \alpha_1 x$, α_j — вещественные числа. Пусть n — постоянное, $n \ge 12$, r — целое, $r \ge 2r_1$,*

$$r_1 = \left[n^2(2\log n + \log\log n + 2,6)\right].$$

Тогда

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 \left|\sum_{x\le P} e^{2\pi i f(x)}\right|^r d\alpha_n \dots d\alpha_1 \ll P^{\,r-\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Лемма 5 ([12], с. 198). *Пусть $f(x) = \alpha_{n+1}x^{n+1}+\ldots+\alpha_1 x$, α_j — вещественные числа.*

$$\alpha_{n+1} = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a,q)=1, \quad 1 \le q \le P^{n+1}, \quad |\theta| \le 1.$$

Тогда

$$\left|\sum_{x\le P} e^{2\pi i(\alpha_{n+1}x^{n+1}+\ldots+\alpha_1 x)}\right| \le c_1(n)P\Delta,$$

где

$$\Delta = \min\left(P, \frac{P^{n+1}}{q}, q\right)^{-\frac{1}{16n^2\log n}},$$

$c_1(n)$ — положительная константа.

Доказательство теоремы 4. 1. Функцию

$$\psi_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } a<x<b, \\ 0, & \text{если } 0\le x\le a \text{ или } b \le x \le 1 \end{cases}$$

продолжим периодически на всю числовую ось с периодом 1. Пусть

$$S_0(\alpha) = \sum_{x \le P} \psi_0(\eta x^n) e^{2\pi i \alpha x^n} ,$$

где $P = N^{1/n}$. Тогда число решений уравнения (1) в натуральных числах x_j, удовлетворяющих условию $a < \{\eta x_j^n\} < b$, $j = 1, 2, \ldots, k$, равно

$$J(N) = \int_0^1 S_0^k(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha .$$

В лемме 2 о «стаканчиках» И.М. Виноградова выберем $r = [\log N]$, $\Delta = \log^{-1} N$. При выборе $\alpha = a + \Delta/2$ и $\beta = b - \Delta/2$ функцию ψ из леммы о «стаканчиках» И.М. Виноградова обозначим как ψ_1, α и β — как α_1 и β_1, соответственно. Положив $\alpha = a - \Delta/2$ и $\beta = b + \Delta/2$, соответствующую функцию ψ обозначим ψ_2, α и β — как α_2 и β_2, соответственно.

Определим

$$J_\nu(N) = \int_0^1 \left(\sum_{x \le P} \psi_\nu(\eta x^n) e^{2\pi i \alpha x^n} \right)^k e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha , \quad \nu = 1, 2 . \tag{7}$$

Из свойств $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ следует:

$$J_1(N) \le J(N) \le J_2(N) .$$

Для $J_1(N)$ и $J_2(N)$ выведем приближенные формулы, главные члены в которых одинаковы.

В представлении функции $\psi_\nu(\eta x^n)$ рядом Фурье

$$\psi_\nu(\eta x^n) = \sum_{|m| < \infty} c_\nu(m) e^{2\pi i m \eta x^n}$$

оценим сумму при $|m| > r\Delta^{-1}$. Из леммы о «стаканчиках» И.М. Виноградова имеем

$$\sum_{|m| > r\Delta^{-1}} c_\nu(m) e^{2\pi i m \eta x^n} \ll \sum_{|m| > r\Delta^{-1}} \frac{1}{\pi |m|} \left(\frac{r}{\pi |m| \Delta} \right)^r \ll \frac{1}{\pi^{r+1}} < N^{-\log \pi} .$$

Разложение в ряд Фурье функции $\psi_\nu(\eta x^n)$

$$\psi_\nu(\eta x^n) = \sum_{|m| \le r\Delta^{-1}} c_\nu(m) e^{2\pi i m \eta x^n} + O(N^{-\log \pi})$$

подставим в (7):

$$J_\nu(N) = \int_0^1 \left(\sum_{|m| \le r\Delta^{-1}} c_\nu(m) \sum_{x \le P} e^{2\pi i (\alpha + m\eta) x^n} \right)^k e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha + O(N^{k-1-\log \pi})$$

$$= \sum_{|m_1|\le r\Delta^{-1}} c_\nu(m_1)\ldots \sum_{|m_k|\le r\Delta^{-1}} c_\nu(m_k) \int_0^1 \sum_{x_1\le P} e^{2\pi i(\alpha+m_1\eta)x_1^n}\times$$

$$\times\ldots \sum_{x_k\le P} e^{2\pi i(\alpha+m_k\eta)x_k^n} e^{-2\pi i\alpha N} d\alpha + O(N^{k-1-\log\pi})\,.$$

2. При $m_1 = m_2 = \ldots = m_k = m$ рассмотрим

$$I_1(N) = \sum_{|m|\le r\Delta^{-1}} c_\nu^k(m) e^{2\pi i m\eta N} \sum_{x_1\le P}\ldots\sum_{x_k\le P}\times$$

$$\times\int_0^1 e^{2\pi i(\alpha+m\eta)(x_1^n+x_2^n+\ldots+x_k^n-N)} d\alpha\,.$$

Учтем, что подынтегральная функция периодична но x с периодом 1, получим

$$I_1(N) = I(N) \sum_{|m|\le r\Delta^{-1}} c_\nu^k(m) e^{2\pi i m\eta N}\,.$$

Промежуток суммирования но m разобьем па два промежутка: $|m| < M$ и $M \le |m| \le r\Delta^{-1}$. На втором промежутке сумму оцепим тривиально, используя известные оценки для коэффициентов Фурье:

$$\sum_{M\le|m|\le r\Delta^{-1}} c_\nu^k(m) e^{2\pi i m\eta N} = O(M^{-k+1})\,.$$

Поскольку при $m \ne 0$

$$c_\nu(m) = i\frac{e^{-2\pi i m\beta_\nu} - e^{-2\pi i m\alpha_\nu}}{2\pi m}\left(\frac{e^{\pi i m\Delta/r} - e^{-\pi i m\Delta/r}}{2\pi i m\Delta/r}\right)^r$$

или после преобразования

$$c_\nu(m) = e^{-\pi i m(\alpha_\nu+\beta_\nu)}\frac{\sin\pi m(\beta_\nu-\alpha_\nu)}{\pi m}\left(\frac{\sin\pi m\Delta/r}{\pi m\Delta/r}\right)^r\,,$$

то для $0 < |m| < M$

$$c_\nu^k(m) = e^{-k\pi i m(a+b)}\frac{\sin^k\pi m(b-a) + O(M\Delta)}{\pi^k m^k}\left(1 + O\left(M\Delta\right)^{k-1}\right) =$$

$$= e^{-k\pi i m(a+b)}\frac{\sin^k\pi m(b-a)}{\pi^k m^k}\left(1 + O(M\Delta)\right)\,.$$

Тогда

$$\sum_{|m|\le r\Delta^{-1}} c_\nu^k(m) e^{2\pi i m\eta N} =$$

$$= \sum_{|m|<\infty} e^{2\pi i m(\eta N - k(a+b)/2)} \frac{\sin^k \pi m(b-a)}{\pi^k m^k} + O(M\Delta) + O(M^{-k+1})\,.$$

При выборе $M = \Delta^{-1/k}$ получим

$$I_1(N) = I(N)(\sigma(N,a,b) + O(\Delta^{\frac{k-1}{k}}))\,.$$

3. Если среди $m_1, m_2, \ldots, m_k$ есть два не равных друг другу числа, то допустим, что $m_1 < m_2$. Рассмотрим

$$I(N, m_1, m_2, \ldots, m_k) = \int_0^1 |S(\alpha + m_1\eta)| \ldots |S(\alpha + m_k\eta)| d\alpha\,,$$

где

$$S(\alpha) = \sum_{x \le P} e^{2\pi i \alpha x^n}\,.$$

Сделаем замену $t = \alpha + m_1\eta$. Поскольку подынтегральная функция является периодичной по t с периодом 1, интеграл можно рассматривать на промежутке $E = [-1/\tau; 1 - 1/\tau)$, где $\tau = 2nP^{n-1}$.

По теореме Дирихле о приближении действительных чисел рациональными числами t представимо в виде

$$t = \frac{d}{q} + \frac{\theta}{q\tau}\,, \quad (d,q) = 1\,, \quad 1 \le q \le \tau\,, \quad |\theta| \le 1\,. \tag{8}$$

Промежуток интегрирования по t разобьем на два непересекающихся множества: E_1 — «большие» дуги и E_2 — «малые» дуги. На «больших» дугах E_1 в разложении (8) выберем $q \le P^{1/4}$. Тогда $E_2 = E \setminus E_1$. Тогда

$$I(N, m_1, m_2, \ldots, m_k) = \int_{E_1} F(t)dt + \int_{E_2} F(t)dt\,,$$

где

$$F(t) = |S(t)||S(t + (m_2 - m_1)\eta)| \ldots |S(t + (m_k - m_1)\eta)|\,.$$

4. Пусть $J_{k,n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ — число решений системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + \cdots + x_k - x_{k+1} - \cdots - x_{2k} &= \lambda_1, \\ x_1^n + \cdots + x_k^n - x_{k+1}^n - \cdots - x_{2k}^n &= \lambda_n, \end{cases}$$

$$1 \le x_1, \ldots, x_{2k} \le P\,.$$

При $5n^2 \log n \le k_1 \le k/2$ по лемме 3 получим

$$\int_0^1 |S(t)|^{2k_1} dt = \sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}} J_{k_1,n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, 0) \ll J_{k_1,n}(0, \ldots, 0) \sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}} 1 \ll$$

$$\ll P^{2k_1-\frac{n(n+1)}{2}}(2k_1)^{n-1}P^{\frac{n(n-1)}{2}} = (2k_1)^{n-1}P^{2k_1-n}\,.$$

Здесь для оценки $J_{k_1,n}(0,\ldots,0)$ применили лемму 4.

Пользуясь полученным неравенством, оценим интеграл по множеству E_1, как

$$\int_{E_1} F(t)dt \ll P^{2k_1-n}\max_{t\in E_1}|S(t+m\eta)|^{k-2k_1}\,.$$

Для интеграла по множеству E_2 получим оценку

$$\int_{E_2} F(t)dt \ll P^{2k_1-n}\max_{t\in E_1}|S(t)|^{k-2k_1}\,.$$

5. Оценим

$$\max_{t\in E_1}|S(t+m\eta)|$$

сверху. Для этого изучим рациональные приближения числа $t+m\eta$.

По теореме Дирихле

$$\eta=\frac{A}{Q}+\frac{\theta_1}{Q\tau_1}\,,\quad (A,Q)=1\,,\quad |\theta_1|<1\,,\quad 1\le Q\le\tau_1\,. \tag{9}$$

Значение τ_1 выберем позже.

Поскольку η — квадратичная иррациональность, согласно теореме Лиувилля имеем

$$\frac{c(\eta)}{Q^2}\le\left|\eta-\frac{A}{Q}\right|\,,\quad c(\eta)>0\,. \tag{10}$$

Из (9), (10) получаем

$$\frac{c(\eta)}{Q^2}\le\frac{1}{Q\tau_1}\,,$$

следовательно, $Q\asymp\tau_1$. Тогда

$$\eta=\frac{A}{Q}+\frac{\theta_2}{Q^2}\,,\quad |\theta_2|\le 1\,.$$

Для t, принадлежащих «большим» дугам E_1, рассмотрим $\gamma=t+m\eta$. Тогда

$$\gamma=\frac{d}{q}+\frac{Am}{Q}+\frac{\theta}{q\tau}+\frac{\theta_2 m}{Q^2}=\frac{dQ+Amq}{qQ}+\frac{\theta}{q\tau}+\frac{\theta_2 m}{Q^2}=$$

$$=\frac{A_1}{Q_1}+\frac{\theta}{q\tau}+\frac{\theta_2 m}{Q^2}\,,\quad (A_1,Q_1)=1\,.$$

Поскольку

$$Q_1=\frac{qQ}{(dQ+Amq,qQ)}\,, \tag{11}$$

то

$$Q_1 \leq qQ.$$

При выборе $\tau_1 = \sqrt{\tau}$ выполняется

$$\frac{\theta}{q\tau} \ll \frac{1}{Q^2} \ll \left(\frac{q}{Q_1}\right)^2,$$

$$\left|\frac{\theta}{q\tau} + \frac{\theta_2 m}{Q^2}\right| = \frac{\theta_3}{Q_1^2}, \quad |\theta_3| \leq (1+|m|)q^2. \tag{12}$$

Обозначим $(dQ + Amq, Q)$ как δ, тогда $\delta | mq$ и

$$(dQ + Amq, qQ) \leq q(dQ + Amq, Q) = q\delta \leq |m|q^2. \tag{13}$$

Тогда из (11), (13) имеем

$$Q_1 \geq \frac{qQ}{mq^2} \geq \frac{Q}{mq}. \tag{14}$$

6. Повторим рассуждения доказательства теоремы 2 (глава XI, [12]) в нашей ситуации. Рассмотрим

$$S(\alpha) = \sum_{x \leq P} e^{2\pi i \alpha x^{n+1}}.$$

Пусть $Y = [P^{1-\frac{1}{n^2}}]$. Тогда

$$S(\alpha) = \frac{1}{Y}\sum_{y\leq Y}\sum_{x\leq P} e^{2\pi i\alpha(x+y)^{n+1}} + O(Y) = W + O(Y).$$

Воспользуемся неравенством Коши, леммой 3:

$$|W|^{2k} \leq \frac{1}{Y}\sum_{y\leq Y}|\sum_{x\leq P} e^{2\pi i\alpha(x^{n+1}+g_1(y)x^n+\ldots)}|^{2k} =$$

$$= \frac{1}{Y}\sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{n+1}} J_{k,n+1}(\lambda_1,\ldots,\lambda_{n+1})|\sum_{y\leq Y} e^{2\pi i\alpha(\lambda_{n+1}+g_1(y)\lambda_n+\ldots)}| \leq$$

$$\leq \frac{1}{Y}\sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} J_{k,n}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)|\sum_{y\leq Y} e^{2\pi i\alpha(g_1(y)\lambda_n+\ldots+g_n(y)\lambda_1)}| \leq$$

$$\leq \frac{1}{Y}\sqrt{\sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} J_{k,n}^2(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)}\sqrt{\sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}|\sum_{y\leq Y} e^{2\pi i\alpha(g_1(y)\lambda_n+\ldots+g_n(y)\lambda_1}|^2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{Y}\sqrt{J_{k,n}(0,\ldots,0)P^{2k}}\sqrt{\sum_{y\leq Y}\sum_{y_1\leq Y}|\sum_{\lambda_n} e^{2\pi i\alpha(n+1)\lambda_n(y-y_1)}|(\sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1}} 1)} \leq$$

$$\leq \frac{1}{Y}\sqrt{P^{\,4k-\frac{n(n+1)}{2}}}\sqrt{\sum_{y\leq Y}\sum_{y_1\leq Y}\min\left(2kP^n, \frac{1}{2\|\alpha(n+1)(y-y_1)\|}\right)(2k)^{n-1}P^{\frac{n(n-1)}{2}}} \leq$$

$$\ll \frac{1}{Y}P^{2k-\frac{n}{2}}\sqrt{\sum_{y\leq Y}\sum_{y_1\leq Y}\min\left(P^n, \frac{1}{\|\alpha(n+1)(y-y_1)\|}\right)}\,.$$

Зафиксируем y_1, это можно сделать Y способами. Положим $\beta = -\alpha(n+1)y_1$. Имеем

$$\sum_{y\leq Y}\min\left(P^n, \frac{1}{\|\alpha(n+1)y+\beta\|}\right) \leq \sum_{y\leq Y(n+1)}\min\left(P^n, \frac{1}{\|\alpha y+\beta\|}\right).$$

Положим

$$\alpha = \gamma = \frac{A_1}{Q_1} + \frac{\theta_3}{Q_1^2}\,.$$

Сумму по y разобьем на суммы длины Q_1, таких сумм будет

$$\frac{Y(n+1)}{Q_1} + 1.$$

Рассмотрим одну такую сумму.

$$\sum_{lQ_1<y\leq(l+1)Q_1}\min\left(P^n, \frac{1}{\|\gamma y+\beta\|}\right) = \sum_{y\leq Q_1}\min\left(P^n, \frac{1}{\|\gamma y+\beta_1\|}\right),$$

где $\beta_1 = \beta + l\gamma Q_1$. Рассмотрим

$$\gamma y + \beta_1 = \left(\frac{A_1}{Q_1} + \frac{\theta_3}{Q_1^2}\right)y + \beta_1\,,$$

где $|\theta_3| \leq (1+|m|)q^2$. Тогда

$$\gamma y + \beta_1 = \frac{A_1 y + [\beta_1 Q_1] + \theta_3 y/Q_1 + \{\beta_1 Q_1\}}{Q_1}\,,$$

имеем

$$\sum_{y\leq Q_1}\min\left(P^n, \frac{1}{\|\gamma y+\beta_1\|}\right) = \sum_{|y|\leq Q_1/2}\min\left(P^n, \frac{1}{\|y+\theta(y)\|}\right),$$

где $|\theta(y)| \ll |m|q^2$. В результате,

$$\sum_{|y|\leq Q_1/2}\min\left(P^n, \frac{1}{\|y+\theta(y)\|}\right) \ll |m|P^{n+1/2} + Q_1\log Q_1 \ll |m|P^{n+1/2}\,.$$

Отсюда

$$\sum_{y\leq Y}\sum_{y_1\leq Y}\min\left(P^n, \frac{1}{\|\gamma(n+1)(y-y_1)\|}\right) \ll Y\left(\frac{Y}{Q_1}+1\right)|m|P^{n+1/2} \ll Y|m|P^{n+1/2}\,.$$

Тогда

$$|W|^{2k} \ll \frac{1}{Y} P^{2k-n/2} \sqrt{Y|m|P^{n+1/2}} = P^{2k+1/4} \sqrt{\frac{|m|}{Y}},$$

$$S(\gamma) \ll P^{1+\frac{1}{8k}} \left(\frac{|m|}{Y} \right)^{\frac{1}{4k}}.$$

7. Для оценки

$$\max_{t \in E_2} |S(t)|$$

воспользуемся леммой 5. В рассматриваемой задаче для $t \in E_2$

$$\min\left(P, \frac{P^{n-1}}{q}, q\right) = \begin{cases} q, & \text{если } P^{1/4} < q < P, \\ P, & \text{если } P \le q \le P^{n-2}, \\ \frac{P^{n-1}}{q}, & \text{если } P^{n-2} \le q \le P^{n-1} \end{cases} \ll P.$$

Тогда

$$\max_{t \in E_2} |S(t)| \ll P^{1-\frac{1}{16cn^2 \log n}}.$$

8. Выбирая $k = 2k_1 + 16n^2$, получим утверждение теоремы.

Заключение. В данной работе получена асимптотическая формула для проблемы Варинга с числами специального вида. В главном члене появляется ряд специального вида, поведение которого было изучено авторами ранее. Причина появления такого ряда представляет интерес и требует дальнейшего исследования.

Литература

1. Виноградов И.М. Представление нечетного числа суммой трех простых чисел // ДАН СССР. – 1937. – 15. – С.169-172.
2. Hua L.K. On the representation of numbers as the sum of powers of primes // Math. Z. – 1938. – 44. – P.335-346.
3. Хуа Ло-ген. Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел / М.: Мир, 1964. – 194 с.
4. Kloosterman H.D. On the representation of numbers in the form $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ // Acta mathematica. – 1926. – 49. – P.407-464.
5. Gritsenko S., Motkina N. Ternary Goldbach's Problem Involving Primes of a Special type. Режим доступа: http://arXiv.org/abs/0812.4606 – 25 Dec 2008.
6. Gritsenko S., Motkina N. Hua Loo Keng's Problem Involving Primes of a Special Type / Режим доступа: http://arXiv.org/abs/0812. 4665 – 26 Dec 2008.
7. Гриценко С.А., Мотькина Н.Н. Представление натуральных чисел суммами четырех квадратов целых чисел специального вида // Современная математика и ее приложения. – 2010. – 67. – С.71-77.
8. Гриценко С.А., Мотькина Н.Н. О вычислении некоторых особых рядов // Чебышевский сборник. – 2011. – 12; Вып.4. – С.85-92.
9. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел / М.: Наука, 1983. – 240 с.
10. Виноградов И.М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел / М.: Наука, 1980. – 160 с.

WARING's PROBLEM WITH SPECIAL NATURAL NUMBERS

S.A. Gritsenko, N.N. Motkina

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, 308015, Belgorod, Russia, e-mail: Motkina@bsu.edu.ru

Abstract. It is proposed the solution of the variant of Waring's Problem with given natural numbers x such that $a < \{\eta x^n\} < b$ where a and b are arbitrary values of the segment $[0, 1]$ and η is quadratical irrational.

Key words: additive problems, Waring's Problem, number of solutions, asymptotic formula, quadratic irrationality.