MSC: 31A05, 31A20, 31A25, 31B25, 35Q15;
30E25, 31C05, 34M50, 35F45.

ПРОБЛЕМЫ ДИРИХЛЕ И РИМАНА-ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А.С. Ефимушкин, В.И. Рязанов

Институт прикладной математики и механики НАН Украины,
ул. Розы Люксембург, 74, Донецк, 83114, Украина, e-mail: art.89@bk.ru; vl.ryazanov1@gmail.com

Аннотация. Доказан аналог теоремы Лузина, что любая функция на отрезке измеримая относительно логарифмической ёмкости почти всюду совпадает с производной от некоторой непрерывной функции. На этой основе установлен аналог теоремы Геринга о разрешимости задачи Дирихле для гармонических функций в единичном круге с произвольными граничными данными измеримыми относительно логарифмической ёмкости. Более того, доказано, что пространство найденных решений имеет бесконечную размерность. Отсюда нами также выводится разрешимость соответствующих задач Дирихле и Римана-Гильберта для аналитических функций в единичном круге. Наконец, результаты перенесены на квазидиски и, в частности, на области с гладкими и липшицевыми границами.

Ключевые слова: задачи Дирихле и Римана-Гильберта, логарифмическая ёмкость, функции ограниченной вариации, гармонические и аналитические функции.

1. Введение. Краевые задачи для аналитических функций f восходят к знаменитой диссертации Римана (1851), а также известным работам Гильберта (1904, 1912, 1924), и Пуанкаре (1910), смотри историю вопроса в монографии [1], где также рассматривался случай обобщенных аналитических функций.

Хорошо известно, что, если аналитическая функция f задана в единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и непрерывна в его замыкании, то по формуле Шварца

$$f(z) \quad = \quad i\,\mathrm{Im}\, f(0) \quad + \quad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} \mathrm{Re}\, f(\zeta)\cdot\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\cdot\frac{d\zeta}{\zeta} \tag{1}$$

и, таким образом, аналитическая функция f в единичном круге $\mathbb{D}$ определяется с точностью до чисто мнимой постоянной ic, $c = \mathrm{Im}\, f(0)$, её реальной частью $\varphi(\zeta) = \mathrm{Re}\, f(\zeta)$ на границе единичного круга, см., напр., § 8, гл. III, часть 3 в [2], с. 346.

Известно также, что любая гармоническая функция $u(z)$ в $\mathbb{D}$ имеет сопряженную функцию $v(z)$, такую, что $f(z) = u(z) + iv(z)$ является аналитической функцией в $\mathbb{D}$. Заметим, что граничные значения сопряженной функции v не могут быть произвольно предписаны одновременно с граничными значениями u, поскольку v единственным образом определяется через u с точностью до аддитивной постоянной, см., например, I.A в [3]. Поэтому задача Дирихле для аналитических функций сводится к задаче для гармонических функций с заданной граничной функцией вещественной части.

В 1904 году Гильберт поставил следующую проблему, которую теперь принято называть проблемой Гильберта, или *проблемой Римана-Гильберта*. Она состояла в доказательстве существования аналитической функции f в области $D \subset \mathbb{C}$, ограниченной спрямляемой жордановой кривой, с граничным условием

$$\lim_{z\to\zeta} \operatorname{Re} \overline{\lambda(\zeta)} \cdot f(z) = \varphi(\zeta) \qquad \forall\, \zeta \in \partial D\,, \tag{2}$$

где им предполагалось, что функции λ и φ непрерывно дифференцируемы относительно натурального параметра длины на кривой ∂D, и что $|\lambda| \neq 0$ на ∂D. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $|\lambda(\zeta)| \equiv 1$. При $\lambda(\zeta) \equiv 1$ мы возвращаемся к задаче Дирихле и, таким образом, задача Римана-Гильберта является её естественным обобщением, которая находит интересные приложения к математической физике.

Первый способ решения этой проблемы, основанный на теории сингулярных интегральных уравнений, был предложен самим Гильбертом в работе [4]. Эта попытка оказалась не совсем удачной, поскольку теория сингулярных интегральных уравнений была еще недостаточно развита в то время. Однако, как раз этот способ стал основным подходом в этом направлении исследований, см., например, монографии [1], [5] и [6]. В частности, на этом пути было доказано существование решений этой задачи для функций λ и φ непрерывных по Гёльдеру, см. [5].

Другой способ решения задачи Римана-Гильберта, основанный на редукции к решению соответствующих двух задач Дирихле, был также предложен Гильбертом, см. [7]. На основе результата Геринга из работы [8], весьма общее решение задачи Римана-Гильберта этим способом совсем недавно было дано в статье [9] в жордановых областях при произвольных функциях φ и λ, измеримых относительно гармонической меры. Здесь мы даем решение задачи Римана-Гильберта при функциях φ и λ, измеримых относительно так называемой абсолютной гармонической меры или, что то же самое, относительно логарифмической ёмкости.

Напомним, что Лузину принадлежит следующая замечательная теорема: *для любой измеримой и п.в. конечной (относительно меры Лебега) функции φ на интервале $[a, b]$, существует непрерывная функция Φ, такая, что $\Phi'(x) = \varphi(x)$ п.в. на $[a, b]$* (см., например, теорему VII(2.3) в [10]). Это утверждение было хорошо известно до Лузина для суммируемой функции φ относительно её неопределенного интеграла Φ, см., например, теорему IV(6.3) в [10]. Однако, этот результат весьма нетривиален для несуммируемой φ. Здесь мы доказываем соответствующий аналог результата Лузина в терминах логарифмической ёмкости, см. теорему 1 в секции 3, после того как в секции 2 будут приведены необходимые сведения о логарифмической ёмкости.

Напомним что, что Герингом был установлен следующий блестящий результат: для любой вещественной с периодом 2π функции, которая измерима (относительно меры Лебега), существует гармоническая в единичном круге $\mathbb{D}$ функция, такая, что $u(z) \to \varphi(\vartheta)$ для п.в. ϑ при $z \to e^{i\vartheta}$ вдоль некасательных путей, см. [8]. В секции 4, на основе нашего аналога теоремы Лузина, мы доказываем аналог результата Геринга в терминах логарифмической ёмкости, см. теорему 2. Более того, нами доказано, что пространство найденных решений имеет бесконечную размерность, см. теорему 3 в той же секции.

Теоремы 2 и 3 ведут нас также к решению соответствующей задачи Дирихле для аналитических функций в $\mathbb{D}$, см. теоремы 4 там же.

Кроме того, после того как в секции 5 нами установлена взаимосвязь между граничными значениями сопряженных гармонических функций, см. теорему 5, на той же основе нами доказано в секции 6 существование решений задачи Римана-Гильберта для аналитических функций в $\mathbb{D}$, см. теорему 6. Наконец, в секции 7 нами сформулированы и доказаны аналоги этих результатов в квазидисках и, в частности, в областях с гладкими и липшицевыми границами.

2. О логарифмической ёмкости. Наиболее важным для нашего исследования является понятие логарифмической ёмкости, см., например, [11], [12] и [13]. Пусть E – произвольное ограниченное борелевское множество плоскости $\mathbb{C}$. *Положительным распределением массы* на множестве E называют произвольную неотрицательную вполне аддитивную функцию множества ν с $\nu(E) = 1$, определенную на борелевских подмножествах множества E. Функцию

$$U^{\nu}(z) := \int\limits_{E} \log\left|\frac{1}{z-\zeta}\right| \, d\nu(\zeta) \tag{3}$$

называют *логарифмическим потенциалом* распределения ν. Соответственно, *логарифмической ёмкостью* $C(E)$ борелевского множества E называется величина

$$C(E) = e^{-V} , \qquad V = \inf_{\nu} V_{\nu}(E) , \qquad V_{\nu}(E) = \sup_{z} U^{\nu}(z) . \tag{4}$$

Заметим, что здесь супремум достаточно вычислять по множеству E. Если $V = \infty$, то полагают $C(E) = 0$. Известно, что $0 \le C(E) < \infty$, $C(E_1) \le C(E_2)$, если $E_1 \subseteq E_2$, $C(E) = 0$, если $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ с $C(E_n) = 0$, см., например, лемму III.4 в [12].

Напомним, что логарифмическая ёмкость совпадает с так называемой абсолютной гармонической мерой, введенной Рольфом Неванлинной, см., например, [13], с. 123. Поэтому множество E имеет нулевую (хаусдорфову) длину, если $C(E) = 0$, см., например, теорему V.6.2 в [13]. Однако, существуют множества нулевой длины, имеющие положительную ёмкость, см., например, теорему IV.5 в [12].

Хорошо известна также следующая геометрическая характеризация логарифмической ёмкости, см. [13]:

$$C(E) = \tau(E) := \lim_{n\to\infty} V_n^{\frac{2}{n(n-1)}} , \tag{5}$$

где V_n обозначает супремум (на самом деле, максимум для компактов) величины

$$V(z_1, \ldots, z_n) = \prod_{k<l}^{l=1,\ldots,n} |z_k - z_l| , \tag{6}$$

когда всевозможные конечные наборы точек $z_1, \ldots, z_n$ пробегают множество E. Следуя Фекете [14], величину $\tau(E)$ называют *трансфинитным диаметром* множества E.

Из указанной геометрической интерпретации логарифмической ёмкости через трансфинитный диаметр, сразу же видим, что если $C(E) = 0$, то $C(f(E)) = 0$ для любого отображения f непрерывного по Гёльдеру.

Чтобы ввести множества, измеримые относительно логарифмической ёмкости, определим, следуя [12], *внутреннюю* C_* *и внешнюю ёмкости* C^*:

$$C_*(E) \ : = \ \sup_{F \subseteq E} \ C(E) \ , \tag{7}$$

где супремум берётся но всем компактным множествам $F \subset \mathbb{C}$, и

$$C^*(E) \ : = \ \inf_{E \subseteq O} \ C(O) \ , \tag{8}$$

где инфимум берётся но всем открытым множествам $O \subseteq \mathbb{C}$. Далее ограниченное множество $E \subset \mathbb{C}$ называется *измеримым относительно логарифмической ёмкости*, если

$$C^*(E) \ = \ C_*(E) \ , \tag{9}$$

и общее значение $C_*(E)$ и $C^*(E)$ по-прежнему обозначается через $C(E)$. Отметим, см. лемму III.5 в [12], что внешняя ёмкость полуаддитивна, т.е.

$$C^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) \ \leq \ \sum_{n=1}^{\infty} C^*(E_n) \ . \tag{10}$$

Функцию $\varphi : E \to \mathbb{C}$, заданную па ограниченном множестве $E \subset \mathbb{C}$, будем называть *измеримой относительно логарифмической ёмкости*, если для любых открытых множеств $O \subseteq \mathbb{C}$ измеримы относительно логарифмической ёмкости множества

$$\Omega = \{z \in E : \varphi(z) \in O\} \ . \tag{11}$$

Ясно, что само множество E измеримо относительно логарифмической ёмкости.

Замечание 1. Известно, что борелевские множества и, в частности, компактные и открытые множества измеримы относительно логарифмической ёмкости, см. [12], с. 9 и 31. Кроме того, как это следует прямо из определения, любое множество $E \subset \mathbb{C}$ конечной логарифмической ёмкости, представимо в виде объединения сигма-компакта (объединения счётного числа компактов) и множества логарифмической ёмкости пуль. Известно также, что борелевские множества, например, компакты измеримы относительно всех хаусдорфовых мер и, в частности, относительно меры длины, см., например, теорему II(7.4) в [10]. Поэтому любое множество $E \subset \mathbb{C}$ конечной логарифмической ёмкости измеримо относительно меры длины. Таким образом, на таком множестве любая функция $\varphi : E \to \mathbb{C}$ измеримая относительно логарифмической ёмкости будет также измеримой относительно меры длины на E. Однако, существуют функции измеримые относительно меры длины, которые не являются измеримыми относительно логарифмической ёмкости, см., например, теорему IV.5 в [12].

Нас особо будут интересовать функции $\varphi : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{C}$, заданные па единичной окружности $\partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Однако, ввиду (5), нам достаточно будет изучить соответствующие вопросы па отрезках вещественной оси, поскольку любая замкнутая дуга па $\partial\mathbb{D}$ допускает билипшицево (даже бесконечно гладкое, так называемое стереографическое) отображение g па такой отрезок, а g и g^{-1} по теореме Кирсбрауна допускают продолжение до липшицевых отображений $\mathbb{C}$ на себя, см., например, теорему 2.10.43 в [15].

В связи с этим, напомним, что отображение $g : X \to X'$ между метрическими пространствами (X, d) и (X', d') называется *липшицевым*, если $d'(g(x_1), g(x_2)) \leqslant C \cdot d(x_1, x_2)$ для любых $x_1, x_2 \in X$ и для некоторой конечной постоянной C. Если в дополнение к этому $d(x_1, x_2) \leqslant c \cdot d'(g(x_1), g(x_2))$ для любых $x_1, x_2 \in X$ и для некоторой конечной постоянной c, то отображение g называется *билипшицевым*.

Напомпим также, см., например, [10], с. 195, что точка $x_0 \in \mathbb{R}$ называется *точкой плотности* для измеримого (относительно длины, т.е. по Лебегу) множества $E \subset \mathbb{R}$, если $x_0 \in E$ и

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{|\,(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus E\,|}{2\varepsilon} = 0\,. \tag{12}$$

Аналогично говорим, что точка $x_0 \in \mathbb{R}$ является *точкой плотности относительно логарифмической ёмкости* для измеримого (относительно C) множества $E \subset \mathbb{R}$, если $x_0 \in E$ и

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{C([x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \setminus E)}{C([x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon])} = 0\,. \tag{13}$$

Напомним, наконец, что функция $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ *аппроксимативно непрерывна (относительно логарифмической ёмкости) в точке* $x_0 \in (a, b)$, если она непрерывна на некотором множестве $E \subseteq [a, b]$, для которого x_0 является точкой плотности (относительно логарифмической ёмкости), см., например, [10], с. 199, и [15], с. 176, соответственно.

Для дальнейшего важно, что имеет место следующий аналог теоремы А. Данжуа, см., например, теорему 2.9.13 в [15], сравни теорему IV(10.6) в [10].

Предложение 1. *Функция $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ измерима относительно логарифмической ёмкости тогда и только тогда, когда она аппроксимативно непрерывна для п.в. $x \in (a, b)$ также относительно логарифмической ёмкости.*

Замечание 2. Как известно, $C([a, b]) \simeq -1/\log\delta$ при $\delta = b - a \to 0$, где запись $u \simeq v$ означает, что для достаточно малых δ найдется постоянная $c \in (0, \infty)$, такая, что $v/c \leq u \leq c \cdot v$, см., например, [16], с. 131. Кроме того, $C(E) \geq A/\log(1/|E|)$ при малых длинах $|E|$, см., папример, лемму 1 в [17]. Таким образом, если x_0 является точкой плотности для множества E относительно логарифмической ёмкости, то x_0 - также точка плотности для множества E относительно меры длины. Следовательно, любая точка аппроксимативной непрерывности функции $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ относительно логарифмической ёмкости, является также точкой аппроксимативной непрерывности функции φ относительно меры Лебега на вещественной оси.

Отсюда, в частности, получаем следующую полезную лемму.

Лемма 1. *Пусть функция* $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ *ограничена и измерима относительно логарифмической ёмкости и пусть* $\Phi(x) = \int\limits_a^x \varphi(t)\ dt$ *– её неопределенный интеграл Лебега. Тогда* $\Phi'(x) = \varphi(x)$ *п.в. на* (a,b) *относительно логарифмической ёмкости.*

$\square$ Действительно, пусть $x_0 \in (a,b)$ - точка аппроксимативной непрерывности для функции φ. Тогда найдется множество $E \subseteq [a,b]$, для которого x_0 является точкой плотности и на котором функция φ непрерывна. Так как $|\varphi(x)| \leq C < \infty$ для всех $x \in [a,b]$, получаем, что при малых h

$$\left|\frac{\Phi(x_0+h)-\Phi(x_0)}{h} - \varphi(x_0)\right| \leq \max_{x\in E\cap[x_0,x_0+h]} |\ \varphi(x)-\varphi(x_0)\ | \ +\ 2C\,\frac{|\ (x_0,x_0+h)\setminus E\ |}{|h|}\ ,$$

т.е. $\Phi'(x_0) = \varphi(x_0)$. Таким образом, заключение леммы следует из предложения 1, см. также замечание 2. $\blacksquare$

3. Об одном аналоге теоремы Лузина.

При доказательстве аналога теоремы Лузина в терминах логарифмической ёмкости ключевую роль будет играть следующая лемма о сингулярных функциях канторовского типа.

Лемма 2. *Существует непрерывная неубывающая функция* $\Psi : [0,1] \to [0,1]$, *такая, что* $\Psi(0) = 0$, $\Psi(1) = 1$ *и* $\Psi'(t) = 0$ *п.в. относительно логарифмической ёмкости.*

$\square$ Для доказательства этого факта воспользуемся конструкцией множеств канторовского типа логарифмической ёмкости нуль, принадлежащей Рольфу Неванлинне. Именно, рассмотрим произвольную последовательность чисел $p_k > 1$, $k = 1,2,\ldots$, и определим соответствующую последовательность множеств $E(p_1,\ldots,p_n)$, $n = 1,2,\ldots$, по индукции следующим образом. Пусть $E(p_1)$ - множество, состоящее из 2-х равных по длине отреков, которое получается из единичного отрезка $[0,1]$ выбрасыванием центрального интервала длины $1-1/p_1$; $E(p_1,p_2)$ - множество, состоящее из 2^2 равных по длине отреков, которое получается выбрасыванием из каждого отрезка предыдущего множества $E(p_1)$ центрального интервала, который составляет $1-1/p_2$ долю от его длины и так далее. Обозначим через $E(p_1,p_2,\ldots)$ пересечение всех множеств $E(p_1,\ldots,p_n)$, $n = 1,2,\ldots$. По теореме V.6.3 в [13] множество $E(p_1,p_2,\ldots)$ имеет логарифмическую ёмкость нуль тогда и только тогда, когда ряд $\sum 2^{-k}\log p_k$ расходится. Например, это условие выполняется, если $p_k = e^{2^k}$.

Как известно, все множества канторовского типа гомеоморфны. Более того, найдется гомеоморфизм $h : [0,1] \to [0,1]$, $h(0) = 0$ и $h(1) = 1$, при котором $E(p_1,p_2,\ldots)$ перейдёт в классическое канторово множество, см., например, конструкцию 8.23 в [19]. Таким образом, если κ - классическая канторова функция, см., нанример, конструкцию 8.15 в [19], то $\Psi = \kappa\circ h$ - искомая функция. $\blacksquare$

Лемма 3. *Пусть функция* $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *ограничена и измерима относительно логарифмической ёмкости. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется непрерывная функция*

$G : [a,b] \to \mathbb{R}$, такая, что $|G(x)| \le \varepsilon$ для всех $x \in [a,b]$, $G(a) = G(b) = 0$, и $G'(x) = g(x)$ п.в. на $[a,b]$ относительно логарифмической ёмкости.

☐ Пусть $H(x) = \int\limits_a^x g(t)\,dt$ – неопределенный интеграл Лебега функции g. Выберем на $[a,b]$ конечный набор точек $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$, таких, что колебание H меньше $\varepsilon/2$ на каждом из отрезков $[a_k, a_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Применяя линейные преобразования независимой и зависимой переменной в функции $\Psi : [0,1] \to [0,1]$ из леммы 2, получаем на каждом из отрезков $[a_k, a_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, функцию F_k, которая имеет нулевую производную п.в. относительно логарифмической ёмкости и совпадает с функцией H в концах отрезка. Пусть F – функция на $[a,b]$, склеенная из функций F_k. Тогда $G = H - F$ даёт нам искомую функцию по леммам 1 и 2. ■

Лемма 4. *Пусть функция $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ограничена и измерима относительно логарифмической ёмкости и пусть P - замкнутое подмножество отрезка $[a,b]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется непрерывная функция $G : [a,b] \to \mathbb{R}$, такая, что $|G(x+h)| \le \varepsilon|h|$ для всех $x \in P$ и всех h, таких, что $x + h \in [a,b]$, $G(x) = G'(x) = 0$ для всех $x \in P$, и $G'(x) = g(x)$ п.в. на $[a,b] \setminus P$ относительно логарифмической ёмкости.*

☐ Пусть $I = (a,b)$. Тогда множество $I \setminus P$ является открытым и представимо в виде объединения счётного числа попарно непересекающихся интервалов $I_k = (a_k, b_k)$. Выберем в каждом интервале I_k возрастающую последовательность чисел $c_k^{(j)}$, $j = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, такую, что $c_k^{(j)} \to a_k$ при $j \to -\infty$ и $c_k^{(j)} \to b_k$ при $j \to \infty$. Обозначим через $\varepsilon_k^{(j)}$ меньшее из 2-х чисел $\varepsilon(c_k^{(j)} - a_k)/(k + |j|)$ и $\varepsilon(b_k - c_k^{(j)})/(k + |j|)$. Тогда по лемме 3 в каждом интервале I_k найдется непрерывная функция G_k, такая, что $|G_k(x)| \le \varepsilon_k^{(j)}$ для всех $x \in [c_k^{(j)}, c_k^{(j+1)}]$, $G_k(c_k^{(j)}) = 0$ для всех $j = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, и $G_k'(x) = g(x)$ п.в. на I_k относительно логарифмической ёмкости. Таким образом, полагая $G(x) = G_k(x)$ на каждом интервале I_k и $G(x) = 0$ на множестве P, получаем искомую функцию. ■

Наконец, докажем следующий аналог теоремы Лузина, сформулированной во введении.

Теорема 1. *Пусть функция $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ измерима относительно логарифмической ёмкости. Тогда найдется непрерывная функция $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}$, такая, что $\Phi'(x) = \varphi(x)$ п.в. на (a,b) также относительно логарифмической ёмкости. Более того, функцию Φ можно выбрать так, что $\Phi(a) = \Phi(b) = 0$ и $|\Phi(x)| \le \varepsilon$ при всех $x \in [a,b]$ для любого заранее предписанного $\varepsilon > 0$.*

☐ Определим по индукции последовательность замкнутых множеств $P_n \subseteq [a,b]$, $n = 0, 1, \ldots$ и последовательность непрерывных функций $G_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n = 0, 1, \ldots$, чьи производные существуют п.в. и измеримы относительно логарифмической ёмкости, такие, что при обозначениях $Q_n = \bigcup\limits_{k=0}^{n} P_k$ и $\Phi_n = \sum\limits_{k=0}^{n} G_k$ выполняются следующие условия: (a) $\Phi_n'(x) = \varphi(x)$ при $x \in Q_n$, (b) $G_n(x) = 0$ при $x \in Q_{n-1}$, (c) $|G_n(x+h)| \le |h|/2^n$ для всех $x \in Q_{n-1}$ и всех h, таких, что $x + h \in [a,b]$, (d) $C(I \setminus Q_n) < 1/n$, где $I = [a,b]$.

Итак, пусть $G_0 \equiv 0$ и $P_0 = \varnothing$ и пусть G_n и P_n с указанными свойствами уже построены для всех $n = 1, 2, \ldots, m$. Тогда найдется компакт $E_m \subset I \setminus Q_m$, такой, что:

$$C(I \setminus (Q_m \cup E_m)) < 1/(m+1) \ , \tag{14}$$

а функции Φ'_m и φ непрерывны па E_m, см., папример, теорему 2.3.5 в [15].

По лемме 4 с множеством $P = Q_m$ и функцией $g : I \to \mathbb{R}$, равной $\varphi(x) - \Phi'_m(x)$ па E_m и пулю па $I \setminus E_m$, найдется непрерывная функция $G_{m+1} : I \to \mathbb{R}$, такая, что: (i) $G'_{m+1}(x) = \varphi(x) - \Phi'_m(x)$ п.в. па $I \setminus Q_m$ относительно логарифмической ёмкости, (ii) $G_{m+1}(x) = G'_{m+1}(x) = 0$ для всех $x \in Q_m$, и (iii) $|G_{m+1}(x+h)| \leq |h|/2^{m+1}$ для всех $x \in Q_m$ и всех h, таких, что $x + h \in I$.

По определению логарифмической ёмкости, условиям (i) и (14), найдется компакт $P_{m+1} \subseteq E_m$, такой, что

$$C(I \setminus (Q_m \cup P_{m+1})) < 1/(m+1) \ , \tag{15}$$

$$G'_{m+1}(x) = \varphi(x) - \Phi'_m(x) \qquad \forall\ x \in P_{m+1} \ . \tag{16}$$

Как легко видеть из (15) и (16), а также (ii) и (iii), условия (a), (b), (c) и (d) сохраняются и для $n = m + 1$.

Положим теперь на основе приведённой конструкции последовательностей G_n и P_n:

$$\Phi(x) \ = \ \lim_{k\to\infty} \ \Phi_k(x) \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} \ G_k(x) \ , \qquad Q \ = \ \lim_{k\to\infty} \ Q_k \ = \ \bigcup_{k=1}^{\infty} \ P_k \ . \tag{17}$$

Заметим, что $\Phi_k \to \Phi$ равномерно на отрезке I ввиду условия (c) и, следовательно, функция Φ является непрерывной. По построению, для любого $x_0 \in Q$ имеем, что $x_0 \in Q_n$ при всех достаточно больших n и, т.к.

$$\frac{\Phi(x_0+h) - \Phi(x_0)}{h} = \frac{\Phi_n(x_0+h) - \Phi_n(x_0)}{h} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{G_k(x_0+h) - G_k(x_0)}{h} \ ,$$

мы получаем из условий (a), (b) и (c), что

$$\limsup_{h\to 0} \left| \frac{\Phi(x_0+h) - \Phi(x_0)}{h} - \varphi(x_0) \right| < \frac{1}{2^n} \ ,$$

т.е. $\Phi'(x_0) = \varphi(x_0)$. Кроме того, по условию (d) видим, что $C(I \setminus Q) = 0$. Таким образом, $\Phi'(x) = \varphi(x)$ п.в. на $[a,b]$ относительно логарифмической ёмкости.

Наконец, применяя конструкцию доказательства леммы 3 к найденной нами функции Φ вместо неопределенного интеграла, находим новую функцию Φ_*, такую, что $\Phi'_*(x) = \varphi(x)$ п.в. на $[a,b]$ также относительно логарифмической ёмкости с $\Phi_*(a) = \Phi_*(b) = 0$ и $|\Phi_*(x)| \leq \varepsilon$ при всех $x \in [a,b]$ для любого заранее предписанного $\varepsilon > 0$. ■

4. О задаче Дирихле в единичном круге.

Одним из центральных результатов работы является следующий аналог теоремы Геринга.

Теорема 2. *Пусть $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – 2π-периодическая функция, которая измерима относительно логарифмической ёмкости. Тогда существует гармоническая функция $u(z)$, $z \in \mathbb{D}$, такая, что $u(z) \to \varphi(\vartheta)$ при $z \to e^{i\vartheta}$ вдоль некасательных путей для всех $\vartheta \in \mathbb{R}$ за исключением быть может множества логарифмической ёмкости нуль.*

□ По теореме 1 найдется непрерывная 2π-периодическая функция $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такая, что $\Phi'(\vartheta) = \varphi(\vartheta)$ для п.в. ϑ относительно логарифмической ёмкости. Пусть

$$U(re^{i\vartheta}) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\vartheta-t)+r^2}\,\Phi(t)\,dt \tag{18}$$

для $r < 1$. Тогда по хорошо известному результату, восходящему к Фату, $\frac{\partial}{\partial\vartheta}\,U(z) \to \Phi'(\vartheta)$ при $z \to e^{i\vartheta}$ вдоль любых некасательных путей всюду, где существует $\Phi'(\vartheta)$, см., например, 3.441 в [20], с. 53, см. также теорему IX.1.2 в [21]. Следовательно, заключение теоремы следует для функции $u(z) = \frac{\partial}{\partial\vartheta}\,U(z)$, $z = re^{i\vartheta}$, $r \in (0,1)$, доопределённой нулём в точке $z = 0$.

Действительно, функция U является гармонической в единичном круге, см., например, теорему I.D.1.1 в [3], и потому бесконечно дифференцируемой. Таким образом, дифференциальный оператор $\partial/\partial\vartheta$ перестановочен с оператором Лапласа для U в проколотом единичном круге $\mathbb{D}\setminus\{0\}$ и, следовательно, функция $u(z)$ - гармоническая в $\mathbb{D}\setminus\{0\}$. Кроме того,

$$u(re^{i\vartheta}) \;=\; -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{r(1-r^2)\sin\vartheta}{(1-2r\cos(\vartheta-t)+r^2)^2}\,\Phi(t)\,dt \tag{19}$$

и элементарные вычисления в (19) дают оценку па окружностях $|z| = r$, $r \in (0,1)$,

$$|u(z)| \;\le\; \frac{2r(1+r)}{(1-r)^3}\cdot M \;\to\; 0 \qquad \text{при} \qquad r \to 0\ ,$$

где $M = \max\Phi$. Таким образом, $u(z) \to 0$ при $z \to 0$. Наконец, интеграл от функции u по любой окружности $|z| = r$, $r \in (0,1)$, равен пулю и, но характеристическому свойству о средних интегральных значениях па окружностях, функция $u(z)$ — гармоническая в $\mathbb{D}$. ■

По известному принципу максимума Линделёфа, см., панример, лемму 1.1 в монографии [18], получается теорема единственности для задачи Дирихле в классе *ограниченных гармонических функций* в единичном круге. В более широких классах гармонических функций пет никакой теоремы единственности решений задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Более того, в работе [9] было доказано, что пространство всех гармонических функций в $\mathbb{D}$ с некасательным пределом 0 в почти каждой точке $\partial\mathbb{D}$ имеет бесконечную размерность.

На основе леммы 2 можно аналогично доказать более тонкий результат о гармонических функциях относительно логарифмической ёмкости вместо меры длины на $\partial\mathbb{D}$.

Лемма 5. *Пространство всех гармонических функций $u : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, таких, что $\lim\limits_{z\to\zeta} u(z) = 0$ вдоль любых некасательных путей для почти всех $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ относительно логарифмической ёмкости имеет бесконечную размерность.*

□ Действительно, пусть $\Phi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ - интегрируемая функция, которая дифференцируема с $\Phi'(t) = 0$ п.в. на $\partial\mathbb{D}$ относительно логарифмической ёмкости. Тогда функция

$$U(z) := \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\vartheta - t) + r^2}\,\Phi(t)\,dt\,, \quad z = re^{i\vartheta},\ r < 1\,,$$

является гармонической в $\mathbb{D}$ и $U(z) \to \Phi(\Theta)$ при $z \to e^{i\Theta}$, см., например, теорему 1.3 в [18] или теорему IX.1.1 в [21], и $\frac{\partial}{\partial\vartheta}U(z) \to \Phi'(\Theta)$ при $z \to e^{i\Theta}$ вдоль любых некасательных путей, где $\Phi'(\Theta)$ существует, см., например, 3.441 в [20], с. 53, или теорему IX.1.2 в [21]. Таким образом, гармоническая функция $u(z) = \frac{\partial}{\partial\vartheta}U(z)$ имеет некасательный предел 0 п.в. на $\partial\mathbb{D}$ относительно логарифмической ёмкости.

Укажем подпространство таких функций u с бесконечным базисом. Именно, пусть $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ - функция канторовского типа из леммы 2 и пусть $\varphi_n : [0, 2\pi] \to [0,1]$ равна $\varphi((t - a_{n-1})/(a_n - a_{n-1}))$ на $[a_{n-1}, a_n)$, где $a_0 = 0$ и $a_n = 2\pi(2^{-1} + \ldots + 2^{-n})$, $n = 1, 2, \ldots$ и 0 вне $[a_{n-1}, a_n)$. Обозначим через U_n и u_n гармонические функции, соответствующие φ_n как в первом абзаце.

По построению, носители функций φ_n взаимно не пересекаются и, таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\gamma_n\varphi_n$ корректно определён для любой последовательности $\gamma_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$. Если мы дополнительно ограничимся последовательностями $\gamma = \{\gamma_n\}$ в пространстве l с нормой $\|\gamma\| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}|\gamma_n|$, то ряд является подходящей функцией Φ для первого абзаца.

Обозначим через U и u гармонические функции, соответствующие функции Φ как в первом абзаце, а через $\mathcal{H}_0$ – класс всех таких функций u. Заметим, что функции u_n, $n = 1, 2, \ldots$, из второго абзаца образуют базис пространства $\mathcal{H}_0$ с локально равномерной сходимостью в $\mathbb{D}$, которое метризуемо.

Во-первых, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\gamma_n u_n \neq 0$, если $\gamma \neq 0$. Действительно, предположим, что $\gamma_n \neq 0$ для некоторого $n = 1, 2, \ldots$. Тогда $u \neq 0$, поскольку пределы $\lim\limits_{z\to\zeta} U(z)$ существуют для всех $\zeta = e^{i\vartheta}$ с $\vartheta \in (a_{n-1}, a_n)$ и могут быть произвольно близкими как к 0 так и к γ_n.

Во-вторых, $u_m^* = \sum\limits_{n=1}^{m}\gamma_n u_n \to u$ локально равномерно в $\mathbb{D}$ при $m \to \infty$. Действительно, имеем следующую оценку остаточного члена в круге

$\mathbb{D}(r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le r\}$, $r < 1$,

$$|u(z) - u_m^*(z)| \ \le \ \frac{2r(1+r)}{(1-r)^3} \cdot \sum_{n=m+1}^{\infty} |\gamma_n| \ \to \ 0 \qquad \text{при} \qquad m \to \infty\ . \qquad \blacksquare$$

Замечание 3. Отметим, что гармонические функции u, найденные нами в лемме 5, в отличие от функций U, сами не могут быть представлены в виде интеграла Пуассона с какой-либо интегрируемой функцией $\Phi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, поскольку такой интеграл имел бы некасательные пределы Φ п.в., см., например, следствие IX.9.1 в [21]. Таким образом, u не принадлежит к классам h_p ни при каком $p > 1$, см., например, теорему IX.2.3 в [21].

Теорема 3. *Пусть $\varphi : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ - функция, измеримая относительно логарифмической ёмкости. Тогда пространство всех гармонических функций $u : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ с пределами $\lim\limits_{z\to\zeta} u(z) = \varphi(\zeta)$ для п.в. $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ относительно логарифмической ёмкости вдоль некасательных путей имеет бесконечную размерность.*

□ Действительно, по теореме 2 имеем по крайней мере одну такую гармоническую функцию u и, комбинируя этот факт с леммой 5, получаем заключение теоремы 3. ■

Теорема 4. *Пусть $\varphi : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ - функция, измеримая относительно логарифмической ёмкости. Тогда существует аналитическая функция f в $\mathbb{D}$, такая, что $\mathrm{Re}\, f(z) \to \varphi(\zeta)$ при $z \to \zeta$ вдоль любых некасательных путей для п.в. $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ относительно логарифмической ёмкости. Размерность пространства всех таких аналитических функций бесконечна.*

□ Действительно, поскольку любая гармоническая функция u в $\mathbb{D}$ имеет сопряженную функцию v, такую, что $f = u + iv$ - аналитическая функция в $\mathbb{D}$, теорема 4 следует непосредственно из теоремы 3. ■

5. О взаимосвязи граничных значений сопряженных функций.

Известен весьма тонкий факт, восходящий к Лузину, что гармонические функции в единичном круге с непрерывными (даже абсолютно непрерывными !) граничными значениями могут иметь сопряженные гармонические функции, чьи граничные значения не являются непрерывными функциями, более того, не являются даже существенно ограниченными в окрестности любой точки единичной окружности, см. например, [22], с. 557. Таким образом, взаимосвязь между граничными значениями сопряженных гармонических функций является весьма непростой вещью, см. также I.E в [3].

Мы называем $\lambda : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{C}$ *функцией ограниченной вариации*, пишем $\lambda \in \mathcal{BV}(\partial\mathbb{D})$, если

$$V_\lambda(\partial\mathbb{D}) \ := \ \sup \sum_{j=1}^{k} |\lambda(\zeta_{j+1}) - \lambda(\zeta_j)| < \infty\ , \tag{20}$$

где супремум берётся над всеми конечными наборами точек $\zeta_j \in \partial\mathbb{D}$, $j = 1, \ldots, k$, с циклическим порядком, означающим, что ζ_j лежит между ζ_{j+1} и ζ_{j-1} для каждого $j = 1, \ldots, k$. Здесь мы предполагаем, что $\zeta_{k+1} = \zeta_1 = \zeta_0$. Величина $V_\lambda(\partial\mathbb{D})$ называется *вариацией функции* λ.

Замечание 4. Как это явствует из неравенства треугольника, если мы добавляем новые промежуточные точки в набор ζ_j, $j = 1, \ldots, k$, то сумма в (9) не убывает. Таким образом, супремум в (9) достигается при $\delta = \max\limits_{j=1,\ldots,k} |\zeta_{j+1} - \zeta_j| \to 0$. Отметим также, что по определению $V_\lambda(\partial\mathbb{D}) = V_{\lambda\circ h}(\partial\mathbb{D})$, т.е. *вариация является инвариантом* при гомеоморфизмах $h : \partial\mathbb{D} \to \partial\mathbb{D}$ и, таким образом, определение может быть распространено естественным образом на произвольную жорданову кривую в $\mathbb{C}$.

Обозначим через $A(\zeta_0, \delta)$ дугу единичной окружности $\partial\mathbb{D}$ с центром в точке $\zeta_0 \in \partial\mathbb{D}$ длины 2δ, где $\delta \in (0, \pi)$. Назовём множество $E \subset \partial\mathbb{D}$ *логарифмически тонким в точке* $\zeta_0 \in \partial\mathbb{D}$, если при $\delta \to 0$

$$C(E \cap A(\zeta_0, \delta)) \;=\; o\left(\left(\log\frac{1}{\delta}\right)^{-1}\right) . \tag{21}$$

Как известно, $C(A(\zeta_0, \delta)) \simeq -1/\log\delta$ при $\delta \to 0$, где запись $u \simeq v$ означает, что для достаточно малых δ найдется постоянная $c \in (0, \infty)$, такая, что $v/c \leq u \leq c \cdot v$, см., например, [16], с. 131. Таким образом, (21) означает, что

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{C(E \cap A(\zeta_0, \delta))}{C(A(\zeta_0, \delta))} \;=\; 0 \; , \tag{22}$$

т.е. ζ_0 является *точкой разрежения для множества* E относительно логарифмической ёмкости. Условие (21) влечёт также, что ζ_0 является точкой разрежения для множества E относительно меры длины на окружности $\partial\mathbb{D}$, как это следует, например, из леммы 1 в [17].

Будем говорить, что функция $\varphi : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ *почти непрерывна* в точке $\zeta_0 \in \partial\mathbb{D}$, если найдется некоторое логарифмически тонкое множество $E \subseteq \partial\mathbb{D}$, такое, что $\varphi(\zeta) \to \varphi(\zeta_0)$ при $\zeta \to \zeta_0$ вдоль множества $\partial\mathbb{D} \setminus E$. Будем также говорить, что φ *почти непрерывна на* $\partial\mathbb{D}$, если она почти непрерывна в каждой точке $\zeta_0 \in \partial\mathbb{D}$ за исключением быть может множества логарифмической ёмкости нуль. Заметим, что почти непрерывные функции являются измеримыми относительно логарифмической ёмкости по предложению 1. Заметим также, что логарифмически тонкие множества, а также множества логарифмической ёмкости нуль и, следовательно, почти непрерывные функции инвариантны относительно конформных (дробно-линейных) отображений расширенной комплексной плоскости на себя, переводящих единичную окружность в расширенную вещественную ось и обратно. Таким образом, по теореме 1 в [17] получаем следующее заключение.

Теорема 5. *Пусть $\alpha : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ – функция ограниченной вариации и пусть $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ – аналитическая функция, такая, что*

$$\lim_{z\to\zeta} \mathrm{Re}\, f(z) \;=\; \alpha(\zeta) \qquad \textit{для п.в.} \quad \zeta \in \partial\mathbb{D} \tag{23}$$

относительно логарифмической ёмкости вдоль любых некасательных путей. Тогда

$$\lim_{z\to\zeta} \mathrm{Im}\, f(z) \;=\; \beta(\zeta) \qquad \textit{для п.в.} \quad \zeta \in \partial\mathbb{D} \tag{24}$$

относительно логарифмической ёмкости вдоль любых некасательных путей, где $\beta : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ *– некоторая функция измеримая относительно логарифмической ёмкости.*

Также докажем следующее предложение, которым мы воспользуемся позже.

Предложение 2. *Для любой функции* $\lambda : \partial\mathbb{D} \to \partial\mathbb{D}$ *класса* $\mathcal{BV}(\partial\mathbb{D})$ *найдется функция* $\alpha_\lambda : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ *класса* $\mathcal{BV}(\partial\mathbb{D})$*, такая, что* $\lambda(\zeta) = \exp\{i\alpha_\lambda(\zeta)\}$, $\zeta \in \partial\mathbb{D}$.

В дальнейшем мы называем функцию α_λ *функцией аргумента* λ.

□ Рассмотрим функцию $\Lambda(\vartheta) = \lambda(e^{i\vartheta})$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$. Ясно, что $V_\Lambda = V_\lambda$ и, таким образом, Λ имеет не более чем счетный набор скачков j_n, где ряд $\sum j_n$ является абсолютно сходящимся, $\sum |j_n| \le V_\lambda$, и $\Lambda(\vartheta) = J(\vartheta) + C(\vartheta)$, где $C(\vartheta)$ – непрерывная функция, а $J(\vartheta)$ – функция скачков Λ, которая равна сумме всех ее скачков на отрезке $[0, \vartheta]$, см., например, следствие VIII.3.2 и теорему VIII.3.7 в [23]. Мы имеем, что $V_J \le V_\lambda$ и $V_C \le 2V_\lambda$, см., например, теорему 6.4 в [24]. Ассоциируем с комплексной величиной j_n вещественную величину

$$\alpha_n \ = \ -2 \ \mathrm{arctg} \, \frac{\mathrm{Re} \ j_n}{\mathrm{Im} \ j_n} \ \in \ [-\pi, \pi] \ .$$

В силу геометрической интерпретации этих величин ($|j_n|$ равна длине хорды для дуги единичной окружности длины $|\alpha_n|$) и элементарных вычислений, мы имеем, что $|j_n| \le |\alpha_n| \le j_n \cdot \pi/2$.

Теперь, ассоциируем с функцией $J(\vartheta)$ функцию $j(\vartheta)$, которая равна сумме всех α_n соответствующих скачкам Λ па отрезке $[0, \vartheta]$. Заметим, что $V_j \le V_J \cdot \pi/2$. Далее, ассоциируем с комплекснозначной функцией $C(\vartheta)$ вещественнозначную функцию $c(\vartheta)$ следующим образом. Так как $C(\vartheta)$ равномерно непрерывна на отрезке $[0, 2\pi]$, последний можно поделить на отрезки $S_k = [\theta_{k-1}, \theta_k]$, $\theta_k = 2\pi k/m$, $k = 1, \dots, m$, с достаточно большим $m \in \mathbb{N}$, таким, что $|C(\vartheta) - C(\vartheta')| < 2$ для всех ϑ и $\vartheta' \in S_k$. Положим по индукции

$$c(\vartheta) = c(\theta_{k-1}) - 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{Re}[C(\vartheta) - C(\theta_{k-1})]}{\mathrm{Im}[C(\vartheta) - C(\theta_{k-1})]} \qquad \forall \vartheta \in S_k, \ k = 1, \dots, m,$$

где

$$c(0) := \mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{Re}[C(0) - 1]}{\mathrm{Im}[C(0) - 1]} \ .$$

Кроме того, пусть $\gamma_\lambda(\vartheta) = j(\vartheta) + c(\vartheta)$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$. По построению $\Lambda(\vartheta) = e^{i\gamma_\lambda(\vartheta)}$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$, $V_{\gamma_\lambda} \le V_\lambda \cdot 3\pi/2$. Наконец, полагая $\alpha_\lambda(\zeta) = \gamma_\lambda(\vartheta)$, если $\zeta = e^{i\vartheta}$, $\vartheta \in [0, 2\pi)$, получаем искомую функцию α_λ класса $\mathcal{BV}(\partial\mathbb{D})$. ■

6. Проблема Римана-Гильберта в единичном круге.

Теорема 6. *Пусть $\lambda : \partial\mathbb{D} \to \partial\mathbb{D}$ – функция ограниченной вариации и $\varphi : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ – функция измеримая относительно логарифмической ёмкости. Тогда существуют аналитические функции $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, такие, что вдоль любых некасательных путей*

$$\lim_{z\to\zeta} \mathrm{Re}\,\{\overline{\lambda(\zeta)} \cdot f(z)\} \;=\; \varphi(\zeta) \qquad \text{для п.в.} \quad \zeta \in \partial\mathbb{D} \tag{25}$$

относительно логарифмической ёмкости. Пространство всех таких аналитических функций имеет бесконечную размерность.

□ Заметим, что по предложению 2 функция аргумента $\alpha_\lambda \in L^\infty(\partial\mathbb{D})$ поскольку $\lambda \in \mathcal{BV}(\partial\mathbb{D})$. Поэтому

$$g(z) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\mathbb{D}} \alpha(\zeta)\, \frac{z+\zeta}{z-\zeta}\, \frac{d\zeta}{\zeta}\,, \qquad z \in \mathbb{D}\,, \tag{26}$$

является аналитической функцией в $\mathbb{D}$ с $u(z) = \mathrm{Re}\, g(z) \to \alpha(\zeta)$ при $z \to \zeta$ вдоль любых некасательных путей в $\mathbb{D}$ для п.в. $\zeta \in \partial\mathbb{D}$, см., например, следствие IX.1.1 в [21] и теорему I.E.1 в [3]. Отметим, что $\mathcal{A}(z) = \exp\{ig(z)\}$ является аналитической функцией.

По теореме 5 существует функция $\beta : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ конечная п.в. и измеримая относительно логарифмической ёмкости, такая, что $v(z) = \mathrm{Im}\; g(z) \to \beta(\zeta)$ при $z \to \zeta$ для п.в. $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ также относительно логарифмической ёмкости вдоль любых некасательных путей. Таким образом, по теореме 4 существует аналитическая функция $\mathcal{B} : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, такая, что $U(z) = \mathrm{Re}\; \mathcal{B}(z) \to B(\zeta) := \varphi(\zeta) \cdot \exp\{\beta(\zeta)\}$ при $z \to \zeta$ вдоль любых некасательных путей для п.в. $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ относительно логарифмической ёмкости. Наконец, элементарные вычисления показывают, что искомая функция $f = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$. Более того, по той же теореме 4 размерность пространства таких функций бесконечна. ■

Замечание 5. Как это следует из формулы (26), первая аналитическая функция $\mathcal{A}$ в приведенном доказательстве вычисляется в явном виде. Функция $\beta : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ в доказательстве также может быть явно вычислена по следующей формуле, см., например, теорему I.E.4.1 в [3], для п.в. $\zeta \in \partial\mathbb{D}$

$$\beta(\zeta) \;:=\; \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{1}{\pi} \int\limits_{\varepsilon}^{\pi} \frac{\alpha(\zeta e^{-it}) - \alpha(\zeta e^{it})}{2\ \mathrm{tg}\ \frac{t}{2}}\, dt\,. \tag{27}$$

Вторая аналитическая функция $\mathcal{B}$ в этом доказательстве равна $\dfrac{\partial}{\partial\vartheta}\, G(z)$, $z = re^{i\vartheta}$, с

$$G(z) \;:=\; \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\mathbb{D}} \Phi(\zeta)\, \frac{z+\zeta}{z-\zeta}\, \frac{d\zeta}{\zeta}\,, \qquad z \in \mathbb{D}\,, \tag{28}$$

где $\Phi : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция, такая, что $\dfrac{\partial}{\partial\vartheta}\, \Phi(\zeta) = B(\zeta)$, $\zeta = e^{i\vartheta}$, для п.в. $\vartheta \in [0, 2\pi]$ относительно логарифмической ёмкости, см. нетривиальную конструкцию в доказательстве теоремы 1 .

7. Распространение результатов на квазидиски. Наши результаты можно распространить па случай квазидисков (областей, ограниченных квазиконформными кривыми) и, в частности, па области с гладкими и липшицевыми границами.

Итак, пусть D – область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и пусть $\mu : D \to \mathbb{C}$ – измеримая функция с $|\mu(z)| < 1$ п.в. *Уравнением Бельтрами* в D с коэффициентом μ называется уравнение вида

$$f_{\bar{z}} = \mu(z) \cdot f_z \ , \tag{29}$$

где $f_{\bar{z}} = \bar{\partial} f = (f_x + if_y)/2$, $f_z = \partial f = (f_x - if_y)/2$, $z = x + iy$, f_x и f_y – частные производные функции $f : D \to \mathbb{C}$ но x и y, соответственно. Уравнение (29) называется *невырожденным*, если $||\mu||_\infty < 1$.

Напомним, что гомеоморфпые решения с обобщенными производными но Соболеву невырожденных уравнений Бельтрами (29) называются *квазиконформными отображениями*, см., например, [25] и [26]. *Квазидисками* именуются образы единичного круга $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ при квазиконформных отображениях $\mathbb{C}$ на себя, а их границы - *квазиокружностями* или *квазиконформными кривыми*. Напомним, что *жордановой кривой* называется взаимнооднозначный непрерывный образ окружности в $\mathbb{C}$. Известно, что любая гладкая и любая липшицева жорданова кривая является спрямляемой квазиконформной кривой и, в тоже время, квазиконформные кривые могут быть песпрямляемыми, как показывает известный пример так называемой снежинки Коха, см., например, пункт II.8.10 в [26].

Заметим, что жордановы кривые вообще говоря не имеют касательных. Поэтому нам нужна замена понятия некасательного предела. В связи с этим, напомним теорему Бейджмила [27], см. также теорему III.1.8 в [11], согласно которой для любой функции $\Omega : \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{C}}$, за исключением не более чем счетного множества $\zeta \in \partial\mathbb{D}$, для любой пары дуг γ_1 и γ_2 в $\mathbb{D}$, оканчивающихся в $\zeta \in \partial\mathbb{D}$,

$$C(\Omega, \gamma_1) \ \cap \ C(\Omega, \gamma_2) \ \neq \ \varnothing \ , \tag{30}$$

где $C(\Omega, \gamma)$ обозначает *предельное множество* Ω *в* ζ *вдоль* γ, т.е.,

$$C(\Omega, \gamma) \ = \ \{w \in \overline{\mathbb{C}} \ : \ \Omega(z_n) \to w, \ z_n \to \zeta, \ z_n \in \gamma\} \ .$$

Непосредственно но теоремам Римана и Каратеодори, см., панример, теоремы II.2.1 и II.3.2 в [21] и теорему II.C.1 в [3], этот результат можно распространить па произвольную жордапову область D в $\mathbb{C}$. Для функции $\Omega : D \to \overline{\mathbb{C}}$ и $\zeta \in \partial D$, обозначим через $P(\Omega, \zeta)$ пересечение всех предельных множеств $C(\Omega, \gamma)$ для дуг γ в D, оканчивающихся в ζ. Далее называем точки множества $P(\Omega, \zeta)$ *главными асимптотическими значениями* Ω в ζ. Отметим, что, если Ω имеет предел хотя бы вдоль одной дуги в D, оканчивающейся в точке $\zeta \in \partial D$, со свойством (30), то главное асимптотическое значение единственно.

Теорема 7. *Пусть* D *– жорданова область в* $\mathbb{C}$*, ограниченная квазиконформной кривой,* $\lambda : \partial D \to \mathbb{C}$*,* $|\lambda(\zeta)| \equiv 1$ *– функция ограниченной вариации и* $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$ *–*

функция, измеримая относительно логарифмической ёмкости. Тогда существуют аналитические функции $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, такие, что в смысле единственного главного асимптотического значения

$$\lim_{z\to\zeta} \mathrm{Re}\,\{\overline{\lambda(\zeta)} \cdot f(z)\} \;=\; \varphi(\zeta) \qquad \text{для и.в.} \quad \zeta \in \partial\mathbb{D} \tag{31}$$

относительно логарифмической ёмкости. Пространство всех таких аналитических функций имеет бесконечную размерность.

Если ∂D – спрямляемая квазиконформная кривая, то предел в (31) имеет место и.в. относительно натурального параметра вдоль любых некасательных путей.

В частности, последнее заключение в теореме 7 имеет место для областей с гладкими и липшицевыми границами.

□ Без ограничения общности можно считать, что $0 \in D$ и $1 \in \partial D$. Жорданова область D по теоремам Римана и Каратеодори может быть отображена с помощью конформного отображения h на единичный круг $\mathbb{D}$ с нормировками $h(0) = 0$ и $h(1) = 1$.

По принципу отражения для квазиконформных отображений, привлекая конформное отражение (инверсию) относительно единичной окружности в образе и квазиконформное отражение относительно ∂D в прообразе, мы можем продолжить h до квазиконформного отображения $H : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ с нормировками $H(0) = 0, H(1) = 1$ и $H(\infty) = \infty$, см., например, I.8.4, II.8.2 и II.8.3 в [26]. Отметим, что $\Lambda = \lambda \circ H^{-1}$ является функцией ограниченной вариации, $V_\Lambda(\partial\mathbb{D}) = V_\lambda(\partial D)$.

При отображениях H и H^{-1} множества логарифмической ёмкости нуль на ∂D переходят в множества логарифмической ёмкости нуль на $\partial\mathbb{D}$ и наоборот, поскольку квазиконформные отображения являются непрерывными по Гёльдеру на ∂D и $\partial\mathbb{D}$, соответственно, см., например, теорему II.4.3 в [26].

Далее, функция $\Phi = \varphi \circ H^{-1}$ является измеримой относительно логарифмической ёмкости. Действительно, при указанных отображениях любые множества, измеримые относительно логарифмической ёмкости, переходят в множества, измеримые относительно логарифмической ёмкости, поскольку любое такое множество представимо в виде объединения сигма-компакта и множества логарифмической ёмкости нуль, а компакты при непрерывных отображениях переходят в компакты и являются измеримыми множествами относительно логарифмической ёмкости.

Поэтому исходная задача (31) сводится к задаче Римана-Гильберта для аналитических функций F в единичном круге:

$$\lim_{z\to\zeta} \overline{\Lambda(\zeta)} \cdot F(z) \;=\; \Phi(\zeta)\ , \tag{32}$$

а по теореме 6 существует аналитическая функция $F : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, для которой это граничное условие выполняется для п.в. $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ относительно логарифмической ёмкости вдоль любых некасательных путей. Таким образом, ввиду теоремы Бейджмила, искомое решение исходной задачи Римана-Гильберта (31) существует и представимо в виде $f = F \circ H$. Более того, по той же теореме 6 размерность пространства таких решений бесконечна.

Наконец, поскольку искажение углов при квазиконформных отображениях ограничено, см., например, [28], [29] и [30], то в случае спрямляемой ∂D условие (31) можно понимать вдоль некасательных путей п.в. относительно натурального параметра. ■

Отметим, что использование логарифмической ёмкости позволяет применить наши результаты также к задачам Дирихле и Римана-Гильберта для уравнений Бельтрами, поскольку логарифмическая ёмкость является инвариантом при квазиконформных отображениях.

Литература

1. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции / М.: Физматгиз, 1959. – 509 с.
2. Гурвиц А. Курант Р. Теория функций / М.: Наука, 1968. – 618 с.
3. Кусис П. Введение в теорию пространств H^p / М.: Мир, 1984. – 364 с.
4. Hilbert D. Über eine Anwendung der Integralgleichungen auf eine Problem der Funktionentheorie / Verhandl. des III Int. Math. Kongr., Heidelberg, 1904.
5. Гахов Ф.Д. Краевые задачи / М.: Наука, 1977. – 640 с.
6. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / М.: Наука,1968. – 448 с.
7. Hilbert D. Grundzüge einer algemeinen Theorie der Integralgleichungen / Leipzig, Berlin, 1912.
8. Gehring F.W. On the Dirichlet problem // Michigan Math. J. – 1955–1956. – 3. – P.201.
9. Ryazanov V. On the Riemann-Hilbert Problem without Index // Ann. Univ. Bucharest, Ser. Math. – 2014. – 5 (LXIII); 1. – P.169-178.
10. Сакс С. Теория интеграла / М.: ИЛ, 1949. – 344 с.
11. Носиро К. Предельные множества / М.: ИЛ, 1963. – 252 с.
12. Карлесон Л. Избранные проблемы теории исключительных множеств / М.: Мир, 1971. – 126 с.
13. Неванлинна Р. Однозначные аналитические функции / М.: ОГИЗ, 1941. – 388 с.
14. Fékete M. Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten // Math. Z. – 1923. – 17. – P.228-249.
15. Федерер Г. Геометрическая теория меры / М.: Наука, 1987. – 760 с.
16. Adams D.R., Hedberg L.I. Function spaces and potential theory / Berlin: Springer-Verlag, 1996. – 366 p.
17. Twomey J.B. The Hilbert transformation and fine continuity // Irish Math. Soc. Bulletin. – 2006. – 58. – P.81-91.
18. Garnett J.B., Marshall D.E. Harmonic Measure / Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005. – 572 p.
19. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе / М.: Мир, 1967. – 252 с.
20. Зигмунд А. Тригонометрические ряды /- М.: НКТП, 1939. – 324 с.
21. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного / М.: Наука, 1966. – 628 с.
22. Бари Н.К. Тригонометрические ряды / М.: Физматлит, 1961. – 936 с.
23. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной / М.: Наука, 1974. – 480 с.
24. Рудин У. Основы математического анализа / М.: Мир, 1966. – 320 с.
25. Альфорс Л. Лекции по квазиконформным отображениям / М.: Мир, 1969. – 134 с.
26. Lehto O., Virtanen K.J. Quasiconformal mappings in the plane / Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1973. – 258 p.
27. Bagemihl F. Curvilinear cluster sets of arbitrary functions // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. – 1955. – 41. – P.379–382.
28. Agard S. B., Gehring F.W. Angles and quasiconformal mappings // Proc. London Math. Soc.(3). – 1965. – 14a. – P.1–21.

29. Agard S. Angles and quasiconformal mappings in space // J. Anal. Math. – 1969. – 22. – P.177-200.
30. Taari O. Charakterisierung der Quasikonformität mit Hilfe der Winkelverzerrung // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI. – 1966. – 390. – P.1-43.

PROBLEMS OF DIRICHLET AND RIEMANN-HILBERT FOR ANALYTIC FUNCTIONS

A.S. Yefimushkin, V.I. Ryazanov

Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NASU,
Roze Luxemburg St., 74, Donetsk, 83114, Ukraine, e-mail: art.89@bk.ru; vl.ryazanov1@gmail.com

Abstract. It is proved the analog of Lusin's theorem which set that each function on a segment being measurable with respect to logarithmic capacity coincides almost everywhere with the derivative of a continuous function. On this basis, it is established the analog of Gehring's theorem on solvability of the Dirichlet problem for harmonic functions on the unit disk with arbitrary boundary data which are measurable with respect to logarithmic capacity. Furthermore, it is proved that the space of the found solutions has the infinite dimension. We also derive from here the solvability of the corresponding problems of Dirichlet and Riemann-Hilbert for analytic functions on the unit disk. Finally, these results are extended to quisidisks and, in particular, to domains with smooth and Lipschitz boundaries.

Key words: problems of Dirichlet and Riemann-Hilbert, logarithmic capacity, functions of bounded distortion, harmonic and analytic functions.