MSC 47F05

К ТЕОРИИ СПЕКТРА 2×2-ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Д.В. Корниенко

Елецкий государственный университет им. И.А.Бунина,
ул. Коммунаров, 28, Елец, 399770, Россия,
e-mail: v_v_kornienko@mail.ru, dmkornienko@mail.ru

Аннотация. Для замкнутых дифференциальных операторов $L : \mathcal{H}_{x,t} \to \mathcal{H}_{x,t}$, порождённых задачей Дирихле для эллиптических систем второго порядка изучены спектры: $C\sigma L = R\sigma L$– пустое множество; точечный спектр $P\sigma L$ располагается в левой полуплоскости ($\mathrm{Re}\, z < 0$) комплексной плоскости $\mathbb{C}$. В случае эллиптической системы без младших членов собственные вектор-функции оператора L образуют ортогональный базис. В случае эллиптической системы с младшими членами вектор-функции оператора L образуют базис Рисса, не являющимся ортогональным в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_{x,t}$.

Ключевые слова: эллиптические системы, граничные задачи, замкнутые операторы, спектр, ортогональный базис, базис Рисса.

Работа посвящена сравнительному изучению и описанию спектральных свойств дифференциальных операторов, порождённых задачей Дирихле для эллиптической системы (1) без «младших членов»

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u^1}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} &= \lambda u^1 + f^1, \\ \dfrac{\partial^2 u^2}{\partial^2 t^2} + \dfrac{\partial^2 u^1}{\partial x^2} &= \lambda u^2 + f^2, \end{cases} \tag{1}$$

и для эллиптической системы (2) с «младшими членами» по переменным x, t

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u^1}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial u^1}{\partial t} - \dfrac{\partial u^2}{\partial x} &= \lambda u^1 + f^1, \\ \dfrac{\partial^2 u^2}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2 u^1}{\partial x^2} + \dfrac{\partial u^2}{\partial t} + \dfrac{\partial u^1}{\partial x} &= \lambda u^2 + f^2, \end{cases} \tag{2}$$

рассматриваемых в замыкании $V_{x,t}$ ограниченной области $\Omega_{x,t} = (0;\pi)^2$ евклидова пространства $\mathbb{R}^2_{x,t}$.

Присоединив к системам уравнений (1) и (2) условие Дирихле

$$u\Big|_{\partial\Omega_{x,t}} = 0 \tag{3}$$

получим две граничные задачи: задачу (1), (3) и задачу (2), (3).

Для системы Коши-Римана и более общих, так называемых симметричных и несимметричных систем, имеется ряд глубоких результатов, относящихся к описанию правильных граничных условий [1].[1)]

Описанию регулярных граничных задач для более общих систем уравнений первого порядка по выделенной переменной t при числе переменных более двух посвящена работа [14]. [2)] Исследованию свойств задачи Дирихле для 2×2 — эллиптических систем посвящена работа [2]; сильно и усиленно эллиптические системы изучались в работах [3], [4] соответственно. Однако, спектральные свойства этих граничных задач и граничных задач иного типа при числе переменных больше двух почти не изучены.

Элементы спектральной теории замкнутых операторов подробно изложены в книгах [5], [6]. Спектральные свойства задачи Дирихле для систем дифференциально-операторных уравнений изучались в работах [7], [8], [9], [10].

Для систем Коши-Римана имеется ряд глубоких результатов, относящихся к описанию правильных граничных условий [1] в областях специального вида. Описанию регулярных граничных задач для более общих систем уравнений при числе переменных более двух посвящены работы [13], [14]. Сильно и усиленно эллиптическим системам посвящены работы [3], [4] соответственно. Однако спектральные свойства этих граничных задач и граничных задач иного типа почти не изучены.

Также, как и в работах [8], [9], [10] системы дифференциальных уравнений (1) и (2) для удобства будем называть эллиптическими системами первого типа. Эллиптической системой второго типа с младшими членами в данном случае будет система вида

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial^2 u^1}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial u^1}{\partial t} + \dfrac{\partial u^2}{\partial x} = \lambda u^1 + f^1, \\ \dfrac{\partial^2 u^2}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2 u^1}{\partial x^2} + \dfrac{\partial u^2}{\partial t} + \dfrac{\partial u^1}{\partial x} = \lambda u^2 + f^2, \end{cases} \tag{4}$$

Отметим, что система (4) равносильна системе (6) (для $\lambda = 0$) в следующем смысле: после умножения первого уравнения системы (1) на -1 и формальной замены $-f^1$ на f^1 (в силу произвольности правой части), получаем систему (2). Эти рассуждения наводят на мысль о совпадении свойств разрешимости граничных задач для данных систем безотносительно к условиям, определяющим граничную задачу. Однако, исследования в случае эллиптических систем первого порядка показывают, что спектральные свойства рассматриваемых дифференциальных операторов различны; они в некотором смысле аналогичны тем отличиям, которые проявились при сопоставлении слабой иррегулярности сильной в работе [11], а также при изучении эллиптических систем в [7], [8]. Обозначим символами $e_i = (\delta_i^1\ \delta_i^2)^{\top}$, $i = 1, 2$; ортонормированный базис евклидова пространства $\mathcal{E}_2^2$ вектор-столбцов, а через $\mathcal{U}_2^2$— унитарное пространство элементов $u = u^1 e_1 + u^2 e_2$; $u^k \in \mathbb{C}$; $k = 1, 2$; со скалярным произведением $(u, v; \mathcal{U}_2^2) = u^1 \bar{v}^1 + \bar{u}^2 \bar{v}^2$.

[1)]Дезин Алексей Алексеевич (23 апреля 1923г., Москва - 4 марта 2008г., Москва) – советский и российский математик.

[2)]Романко Василий Кириллович (28 декабря 1936, Москва - 27 сентября 2012 года, Москва) – советский и российский математик.

Пусть $\mathcal{H}^2_{x,t} = \mathcal{L}^2_2\left(V_{x,t}\right)$ – гильбертово пространство комплекснозначных вектор-функций $u : V_{x,t} \to \mathbb{C}^2$, норма в котором задаётся формулой

$$\left|u; \mathcal{H}^2_{x,t}\right|^2 = \iint\limits_{V_{x,t}} \left|u(\xi,\, \tau);\; \mathcal{U}^2_2\right|^2 d\xi\, d\tau\,.$$

Пусть также $\mathfrak{D}$ – линейное многообразие гладких комплекснозначных вектор-функций $u = u(x,t)$, принадлежащих классу $\mathbb{C}\left(\overline{\Omega}_{x,t}\right) \cap \mathbb{C}^{(2)}\left(\Omega_{x,t}\right)$ и удовлетворяющих условиям (3). Опишем вначале спектральные свойства эллиптической системы первого типа без младших членов.

Эллиптическая система без младших членов. Обозначая символом $\widetilde{L}$ оператор, областью определения которого является $\mathfrak{D}$, а множество значений определяется правой частью (1), получаем эллиптический дифференциальный оператор; этот оператор не замкнут. Применяя в $\mathcal{H}^2_{x,t}$ стандартную процедуру замыкания, получаем замкнутое расширение L оператора $\widetilde{L}$. В этом случае говорят, что замкнутый оператор $L : \mathcal{H}^2_{x,t} \to \mathcal{H}^2_{x,t}$ порождён задачей (1), (2). Изучим его спектр и спектральные свойства его собственных вектор-функций. Говоря о спектре замкнутого оператора, мы следуем терминологии, принятой в монографиях [5, с. 25], [6, с. 620]. Резольвентное множество, спектр, точечный спектр, непрерывный спектр и остаточный спектр оператора L обозначим символами ρL, σL, $P\sigma L$, $C\sigma L$ и $R\sigma L$ соответственно. Имеет место [10] следующая теорема.

Теорема 1. *Спектр σL оператора L, порождённого задачей (1), (3), состоит из замыкания $\overline{P\sigma L}$ на комплексной плоскости его точечного спектра $P\sigma L$. Множество $C\sigma L = \sigma L \setminus P\sigma L$ образует непрерывный спектр оператора L. Точечный спектр оператора L даётся формулой*

$$\lambda_{m,k,s} = -k^2 + i(-1)^m s^2; \quad m = 1, 2; \quad k \in \mathbb{N}; \quad s \in \mathbb{N}\,. \tag{5}$$

Собственная вектор-функция оператора L, принадлежащая его собственному значению (6), представима в виде

$$u_{m,k,s}(x,t) = \left(ie_1 + (-1)^{m+1} e_2\right) \sin(kt) \sin(sx)\,.$$

Последовательность $\{u_{m,k,s}(t,x) :\; m = 1, 2;\; k \in \mathbb{N};\; s \in \mathbb{N}\}$ собственных вектор-функции оператора L образует ортогональный базис в пространстве $\mathcal{H}^2_{x,t}$.

Эллиптическая система с младшими членами по переменным x, t. Также, как и в случае эллиптической системы без младших членов обозначим символом $\widetilde{L}$ оператор, областью определения которого является $\mathfrak{D}$, а множество значений определяется правой частью (2), получаем эллиптический дифференциальный оператор; этот оператор не замкнут. Применяя в $\mathcal{H}^2_{x,t}$ стандартную процедуру замыкания, получаем замкнутое расширение L оператора $\widetilde{L}$. В этом случае говорят, что замкнутый оператор $L : \mathcal{H}^2_{x,t} \to \mathcal{H}^2_{x,t}$ порождён задачей (2), (3). Изучим его спектр и спектральные свойства его собственных вектор-функций.

Теорема 2. *Спектр σL оператора L, порождённого задачей (2), (3) состоит из замыкания $\overline{P\sigma L}$ на комплексной плоскости его точечного спектра $P\sigma L$. Множество $C\sigma L = \sigma L \setminus P\sigma L$ образует непрерывный спектр оператора L. Точечный спектр оператора L даётся формулой*

$$\lambda_{m,k,s} = i(-1)^m \left(\frac{1}{4} + s^2\right) - k^2 - \frac{1}{4}, \quad m = 1,2; k, s \in \mathbb{Z}\,. \tag{6}$$

Собственная вектор-функция оператора L, принадлежащая его собственному значению (6), представима в виде:

$$u_{m,k,s}(x,t) = e^{-\frac{t}{2}} e^{ik\,t}\Big(e_1 + i(-1)^m e_2\Big) e^{\frac{x}{2}} \sin{(sx)}\ .$$

Последовательность $\{u_{m,k,s}(t,x) : m = 1,2;\ k \in \mathbb{N};\ s \in \mathbb{N}\}$ собственных вектор-функции оператора L образует базис Рисса в пространстве $\mathcal{H}^2_{x,t}$.

□ Достаточно заметить, что последовательность $\{u_{m,k,s}(t) :\ m = 1,2;\ k \in \mathbb{N}\}$ вектор-функций

$$u_{m,k,s}(t) = e^{-\frac{t}{2}} e^{ik\pi\,t}\Big(e_1 + i(-1)^m e_2\Big); \quad m = 1,2;$$

является базисом Рисса в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^2_t = \mathcal{H}_t \oplus \mathcal{H}_t$, $\mathcal{H}_t = \mathcal{L}_2[0,\pi]$, и воспользоваться, доказанным в [8], представлением $\mathcal{H}^2_{x,t}$ в виде тензорного произведения гильбертовых пространств $\mathcal{H}^2_t$ и $\mathcal{H}_x$, то есть формулой $\mathcal{H}^2_{x,t} = \mathcal{H}^2_t \otimes \mathcal{H}_x$, где $\mathcal{H}_x = \mathcal{L}_2[0,\pi]$. ■

Литература

1. Дезин А.А. Теоремы существования и единственности решений граничных задач для уравнений с частными производными в функциональных пространствах // Успехи матем. наук. – 1959. – XIV, вып. 3 (87). – С.21-73.
2. Бицадзе А.В. О единственности решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными // Успехи матем. наук. – 1948. – 3, № 6. – С.211-212.
3. Вишик М.И. О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений // Матем. сборник. – 1951. – 29, (71), Вып. 4. – С.615-676.
4. Солдатов А.П. О первой и второй краевых задачах для эллиптических систем на плоскости // Дифференц. уравнения. – 2003. – 39, №5. – С.674-686.
5. Дезин А.А. Общие вопросы теории граничных задач. – М.: Наука, 1980. – 207 с.
6. Качмаж С. Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов / М.: Гос.из-во физ.-мат. литературы, 1958. – 508 с.
7. Корниенко Д.В. О спектральных задачах для линейных систем дифференциально-операторных уравнений // Вестник Елецкого госуниверситета им. И. А. Бунина. Вып. 5: Серия «Математика, физика». – Елец: ЕГУ им. И.А.Бунина, 2004. – С.71-78.
8. Корниенко Д.В. Об одной спектральной задаче для двух гиперболических систем уравнений // Дифференц. уравнения. – 2006. – 42, №1. – С.91-100.
9. Корниенко Д.В. О спектре задачи Дирихле для систем дифференциально-операторных уравнений // Дифференц. уравнения. – 2006. – 42, №8. – С.1063-1071.
10. Алексеева О.В. О спектре задачи Дирихле для двух эллиптических систем // Научные ведомости БелГУ. Математика Физика. – 2010. – №17(88). – Вып.20. – С.5-9.

11. Дезин А.А. О слабой и сильной иррегулярности // Дифференц. уравнения. – 1981. – 17, №10. – С.1851-1858.
12. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы, Т.1. Общая теория / М.: ИЛ., 1962. – 895 с.
13. Романко В.К. К теории операторов вида $\frac{d^m}{dt^m} - A$. // Дифференц. уравнения. – 1967. – 3, №11. – С.1957-1970.
14. Романко В.К. Смешанные краевые задачи для одной системы уравнений // Докл. АН СССР. – 1986. – 286, №1. – С.47-50.

TO THE THEORY OF 2×2-ELLIPTIC SYSTEMS SPECTRUM

D.V. Kornienko

Elets State University,
Kommunarov St., 28, Elets, 399770, Russia, e-mail: o.v.alexeeva@gmail.com, wk1953@mail.ru

Abstract. Specta of closed differential operators $L : \mathcal{H}_{x,t} \to \mathcal{H}_{x,t}$ generated by the Dirichlet problem for elliptic systems of second order are studied. Namely, $C\sigma L = R\sigma L$ is empty; the point spectrum of $P\sigma L$ is located in the left half (Re $z < 0$) of complex plane $\mathbb{C}$. In the case of the elliptic system without less terms, vector-valued eigenfunctions of the operator L form the orthogonal basis. In the case of the elliptic system with some less terms, vector-valued eigenfunctions of the operator L form the Riesz basis. But it is not orthogonal in the Hilbert space $\mathcal{H}_{x,t}$.

Keywords: elliptic systems, boundary problems, closed operators, spectrum, orthogonal basis, Riesz' basis.