MSC 35M10

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

Ю.К. Сабитова

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,
Институт прикладных исследований Республики Башкортостан,
ул. Одесская, 68, Стерлитамак, 453103, Россия, e-mail: sabitovauk@rambler.ru

Аннотация. Для нагруженного уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа изучена нелокальная задача в прямоугольной области. Методом спектрального анализа установлен критерий единственности решения поставленной задачи и доказана теорема существования. Решение построено в виде суммы биортогонального ряда.

Ключевые слова: нагруженное уравнение смешанного типа, нелокальная задача, полнота, существование и единственность решения.

1. Введение. Теория краевых задач для уравнений смешанного типа, в силу теоретической и прикладной важности, является одним из интенсивно развивающихся разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными и привлекает к себе внимание многих исследователей, интересующихся как самой теорией, так и ее приложениями. В частности, многие математические модели тепло- и массообмена в средах, окруженных пористой средой, сводятся к краевым задачам для уравнений смешанного типа. Одним из важнейших классов уравнений с частными производными являются нагруженные уравнения смешанного типа. Исследование локальных и нелокальных краевых задач для нагруженных уравнений с частными производными изложено в монографии А.М. Нахушева [1].

Рассмотрим нагруженное уравнение смешанного эллиптико-гиперболического типа

$$Lu = \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} - b^2 u(x,y) + C_1(y) u(x,0) = 0, & y > 0\,, \\ u_{xx} - u_{yy} - b^2 u(x,y) + C_2(y) u(x,0) = 0, & y < 0\,, \end{cases} \tag{1}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,y) |\ 0 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$, где $C_1(y)$, $C_2(y)$ – заданные непрерывные функции, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $b \geq 0$ – заданные действительные числа.

Нелокальная задача. Найти в области D функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x,y) \in C^2(D_+ \cup D_-) \cap C^1(\overline{D}); \tag{2}$$

$$Lu(x,y) \equiv 0\,, \quad (x,y) \in D_+ \cup D_-\,; \tag{3}$$

$$u(0,y) = u(1,y)\,, \quad u_x(0,y) = 0\,, \quad -\alpha \leq y \leq \beta\,; \tag{4}$$

$$u(x,\beta) = \varphi(x)\,, \quad u(x,-\alpha) = \psi(x)\,, \quad 0 \leq x \leq 1\,, \tag{5}$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, $D_- = D \cap \{y < 0\}$, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$.

Отметим работу К.Б. Сабитова и Е.П. Мелишевой [2], где решена задача Дирихле для нагруженного уравнения смешанного типа (1) в прямоугольной области D.

В данной работе, следуя [2], при всех $b > 0$ на основании свойства полноты системы корневых функций одномерной нелокальной спектральной задачи установлен критерий единственности решения задачи. При определенных условиях на функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и число α решение $u(x, y)$ построено в виде суммы биортогонального ряда.

2. Теорема единственности. Пусть $u(x, y)$ – решение задачи (2) – (5). Из работы Е.И. Моисеева [3], известно, что системы функций

$$\{\cos(2\pi kx)\}_{k=1}^{\infty}, \ 1, \ \{x\sin(2\pi kx)\}_{k=1}^{\infty}; \tag{6}$$

$$\{4(1-x)\cos(2\pi kx)\}_{k=1}^{\infty}, \ 2(1-x), \ \{4\sin(2\pi kx)\}_{k=1}^{\infty} \tag{7}$$

являются биортонормированными, полны и образуют базис Рисса в пространстве $L_2(0, 1)$. Рассмотрим функции

$$u_k(y) = 4\int_0^1 u(x, y)(1-x)\cos 2\pi kx dx, \tag{8}$$

$$u_0(y) = 2\int_0^1 u(x, y)(1-x)dx, \tag{9}$$

$$v_k(y) = 4\int_0^1 u(x, y)\sin 2\pi kx dx, \quad k \in N. \tag{10}$$

На основании (10) введем функцию

$$v_{k,\varepsilon}(y) = 4\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u(x, y)\sin 2\pi kx dx, \tag{11}$$

где ε – достаточно малое число. Дифференцируя равенство (11) но y два раза при $y \in (-\alpha, 0) \cup (0, \beta)$ и учитывая уравнение (1), получим

$$v_{k,\varepsilon}^{+''}(y) = 4\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u_{yy}(x, y)\sin 2\pi kx dx =$$

$$= 4\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\left[-u_{xx}(x, y) + b^2u(x, y) - C_1(y)\,u(x, 0)\right]\sin 2\pi kx dx =$$

$$= -4 \int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u_{xx}(x,y) \sin 2\pi kx dx + 4b^2 \int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u(x,y) \sin 2\pi kx dx -$$

$$- 4C_1(y) \int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u(x,\, 0) \sin 2\pi kx dx\,, \quad y > 0\,; \tag{12}$$

$$v_{k,\varepsilon}^{-\prime\prime}(y) = 4 \int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u_{yy}(x,\, y) \sin 2\pi kx dx =$$

$$= 4 \int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \left[u_{xx}(x,y) - 4b^2 u(x,y) + 4C_2(y)\, u(x,\, 0)\right] \sin 2\pi kx dx =$$

$$= 4 \int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u_{xx}(x,y) \sin 2\pi kx dx - 4b^2 \int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u(x,y) \sin 2\pi kx dx +$$

$$+ 4C_2(y) \int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u(x,\, 0) \sin 2\pi kx dx\,, \quad y < 0\,. \tag{13}$$

В первых интегралах из правой части равенств (12) и (13) интегрируя по частям два раза и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ с учетом условия (4), получим

$$v_k''(y) - \lambda_k^2 v_k(y) = -C_1(y)\, v_k(0)\,, \quad y > 0\,, \tag{14}$$

$$v_k''(y) + \lambda_k^2 v_k(y) = C_2(y)\, v_k(0)\,, \quad y < 0\,, \tag{15}$$

где $\lambda_k^2 = b^2 + (2\pi k)^2$. Дифференциальные уравнения (14) и (15) имеют общие решения

$$v_k(y) = \begin{cases} a_k e^{\lambda_k y} + b_k e^{-\lambda_k y} - \dfrac{a_k + b_k}{\lambda_k} \displaystyle\int\limits_0^y C_1(t)\, \mathrm{sh}\left[\lambda_k (t - y)\right] dt\,, & y > 0, \\ c_k \cos \lambda_k y + d_k \sin \lambda_k y + \dfrac{c_k}{\lambda_k} \displaystyle\int\limits_y^0 C_2(t) \sin\left[\lambda_k (y - t)\right] dt\,, & y < 0, \end{cases} \tag{16}$$

где a_k, b_k, c_k, d_k – произвольные постоянные.

Для функций (16) в силу (2) и (10) выполнены условия сопряжения

$$v_k(+0) = v_k(-0)\,, \qquad v_k'(+0) = v_k'(-0)\,. \tag{17}$$

Условия (17) имеют место только в том случае, если

$$c_k = a_k + b_k, \quad d_k = a_k - b_k. \tag{18}$$

Подставляя (18) в (16), получим

$$v_k(y) = \begin{cases} a_k e^{\lambda_k y} + b_k e^{-\lambda_k y} + \dfrac{a_k + b_k}{\lambda_k} C_{1k}(y)\,, \quad y > 0\,, \\ a_k(\cos\lambda_k y + \sin\lambda_k y) + b_k(\cos\lambda_k y - \sin\lambda_k y) + \dfrac{a_k + b_k}{\lambda_k} C_{2k}(y)\,, \quad y < 0\,, \end{cases} \tag{19}$$

где

$$C_{1k}(y) = \int\limits_0^y C_1(t)\,\mathrm{sh}\,[\lambda_k(t-y)]dt, \quad C_{2k}(y) = \int\limits_y^0 C_2(t)\sin[\lambda_k(y-t)]dt\,.$$

Для нахождения постоянных a_k и b_k воспользуемся граничными условиями (5) и формулой (10):

$$v_k(\beta) = 4\int\limits_0^1 u(x,\beta)\sin 2\pi kx dx = 4\int\limits_0^1 \varphi(x)\sin 2\pi kx dx = \varphi_k\,, \tag{20}$$

$$v_k(-\alpha) = 4\int\limits_0^1 u(x,-\alpha)\sin 2\pi kx dx = 4\int\limits_0^1 \psi(x)\sin 2\pi kx dx = \psi_k\,. \tag{21}$$

Удовлетворяя функции (19) к граничным условиям (20) и (21), найдем

$$a_k = \frac{\varphi_k}{2\Delta_{\alpha\beta}(k)}\left[\cos\lambda_k\alpha + \sin\lambda_k\alpha + \frac{1}{\lambda_k}C_{2k}(-\alpha)\right] - \frac{\psi_k}{2\Delta_{\alpha\beta}(k)}\left[e^{-\lambda_k\beta} + \frac{1}{\lambda_k}C_{2k}(\beta)\right], \tag{22}$$

$$b_k = \frac{\varphi_k}{2\Delta_{\alpha\beta}(k)}\left[e^{\lambda_k\beta} + \frac{1}{\lambda_k}C_{1k}(\beta)\right] - \frac{\psi_k}{2\Delta_{\alpha\beta}(k)}\left[\cos\lambda_k\alpha - \sin\lambda_k\alpha + \frac{1}{\lambda_k}C_{2k}(-\alpha)\right], \tag{23}$$

при условии, что при всех $k \in N$

$$\Delta_{\alpha\beta}(k) = \sin\lambda_k\alpha\,\mathrm{ch}\,\lambda_k\beta + \mathrm{sh}\,\lambda_k\beta\cos\lambda_k\alpha + \frac{1}{\lambda_k}\left[C_{1k}(\beta)\sin\lambda_k\alpha + C_{2k}(-\alpha)\,\mathrm{sh}\,\lambda_k\beta\right] \neq 0\,. \tag{24}$$

Подставляя (22) и (23) в (19) найдем окончательный вид функций

$$v_k(y) = \begin{cases} v_k^+(y) = \dfrac{1}{\Delta_{\alpha\beta}(k)}\left[\lambda_k^{-1}\psi_k A_{y\beta}(k) + \varphi_k\Delta_{\alpha y}(k)\right], \quad y > 0, \\ v_k^-(y) = \dfrac{1}{\Delta_{\alpha\beta}(k)}\left[\psi_k\Delta_{-y\beta}(k) + \lambda_k^{-1}\varphi_k B_{\alpha y}(k)\right], \quad y < 0, \end{cases} \tag{25}$$

где

$$\Delta_{\alpha y}(k) = \sin\lambda_k\alpha\,\mathrm{ch}\,\lambda_k y + \mathrm{sh}\,\lambda_k y\cos\lambda_k\alpha + \frac{1}{\lambda_k}\left[C_{1k}(y)\sin\lambda_k\alpha + C_{2k}(-\alpha)\,\mathrm{sh}\,\lambda_k y\right],$$

$$A_{y\beta}(k) = C_{1k}(y)\,\mathrm{sh}\,\lambda_k\beta - C_{1k}(\beta)\,\mathrm{sh}\,\lambda_k y + \lambda_k\,\mathrm{sh}\,[\lambda_k(\beta - y)],$$

$$\Delta_{-y\beta}(k) = \sin\lambda_k y \operatorname{ch}\lambda_k\beta + \operatorname{sh}\lambda_k\beta\cos\lambda_k y - \frac{1}{\lambda_k}\left[C_{1k}(\beta)\sin\lambda_k y + C_{2k}(y)\operatorname{sh}\lambda_k\beta\right],$$

$$B_{y\alpha}(k) = C_{2k}(y)\sin\lambda_k\alpha + C_{2k}(-\alpha)\sin\lambda_k y + \lambda_k\sin\lambda_k(\alpha+y).$$

Аналогично $v_k(y)$ получим, что функция $u_0(y)$ удовлетворяет условиям:

$$u_0''(y) - b^2u_0(y) = -C_1(y)u_0(0), \quad y>0, \tag{26}$$

$$u_0''(y) + b^2u_0(y) = C_2(y)u_0(0), \quad y<0, \tag{27}$$

$$u_0(+0) = u_0(-0), \quad u_0'(+0) = u_0'(-0), \tag{28}$$

$$u_0(\beta) = 4\int_0^1 \varphi(x)(1-x)dx = \varphi_{10}, \quad u_0(-\alpha) = 4\int_0^1 \psi(x)(1-x)dx = \psi_{10}. \tag{29}$$

Единственное решение задачи (26)-(29) определяется формулой

$$u_0(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta_{\alpha\beta}(0)}\left[b^{-1}\psi_0 A_{y\beta}(0) + \varphi_0\Delta_{\alpha y}(0)\right], & y>0, \\ \dfrac{1}{\Delta_{\alpha\beta}(0)}\left[\psi_0\Delta_{-y\beta}(0) + b^{-1}\varphi_0 B_{\alpha y}(0)\right], & y<0, \end{cases} \tag{30}$$

где

$$\Delta_{\alpha y}(0) = \sin b\alpha \operatorname{ch} by + \operatorname{sh} by\cos b\alpha + \frac{1}{b}\left[C_{10}(y)\sin b\alpha + C_{20}(-\alpha)\operatorname{sh} by\right],$$

$$A_{y\beta}(0) = C_{10}(y)\operatorname{sh} b\beta - C_{10}(\beta)\operatorname{sh} by + b\operatorname{sh}[b(\beta-y)],$$

$$\Delta_{-y\beta}(0) = \sin by \operatorname{ch} b\beta + \operatorname{sh} b\beta\cos by - \frac{1}{b}\left[C_{10}(\beta)\sin by + C_{20}(y)\operatorname{sh} b\beta\right],$$

$$B_{y\alpha}(0) = C_{20}(y)\sin b\alpha + C_{20}(-\alpha)\sin by + b\sin b(\alpha+y),$$

$$C_{10}(y) = \int_0^y C_1(t)\operatorname{sh}[b(t-y)]dt, \quad C_{20}(y) = \int_y^0 C_2(t)\sin[b(y-t)]dt.$$

Повторяя те же действия над функцией $u_k(y)$, что и для $v_k(y)$, получаем неоднородные дифференциальные уравнения

$$u_k''(y) - \lambda_k^2 u_k(y) = -4\pi k v_k^+(y) - C_1(y)u_k(0), \quad y>0, \tag{31}$$

$$u_k''(y) + \lambda_k^2 u_k(y) = 4\pi k v_k^-(y) + C_2(y)u_k(0), \quad y<0, \tag{32}$$

с соответствующими граничными условиями

$$u_k(\beta) = 4\int_0^1 \varphi(x)(1-x)\cos 2\pi kx dx = \varphi_{1k}, \tag{33}$$

$$u_k\,(-\alpha) = 4\int\limits_0^1 \psi\,(x)\,(1-x)\cos 2\pi kxdx = \psi_{1k}\,. \tag{34}$$

и условиями сопряжения

$$u_k(+0) = u_k(-0), \quad u'_k(0+0) = u'_k(-0). \tag{35}$$

На основании метода вариации произвольных постоянных найдём решение задачи (31)-(35), которое определяется по формуле

$$u_k(y) = \begin{cases} v_k^+(y) + \dfrac{1}{\Delta_{\alpha\beta}(k)}\left[\lambda_k^{-1}A_{y\beta}(k)V_k^-(-\alpha) - \Delta_{\alpha y}(k)V_k^+(\beta)\right], & y > 0\,, \\ v_k^-(y) + \dfrac{1}{\Delta_{\alpha\beta}(k)}\left[\Delta_{-y\beta}(k)V_k^-(-\alpha) - \lambda_k^{-1}B_{\alpha y}(k)V_k^+(\beta)\right], & y < 0\,, \end{cases} \tag{36}$$

$$V_k^-(-\alpha) = \int\limits_{-\alpha}^0 v_k^-(s)\sin[\lambda_k(\alpha+s)]ds, \quad V_k^+(\beta) = \int\limits_0^\beta v_k^+(s)\,\mathrm{sh}[\lambda_k(s-\beta)]ds\,. \tag{37}$$

При условии (24) из формул (25), (30), (36) следует единственность решения задачи (2)-(5), так как если $\varphi(x) \equiv 0$, $\psi(x) \equiv 0$ па $|0{,}1|$, то $u_k(y) \equiv 0, u_0(y) \equiv 0, v_k(y) \equiv 0$ для $k = 0, 1, 2,\ \ldots$ на $[-\alpha, \beta]$. Тогда из (8)-(10) имеем:

$$4\int\limits_0^1 u(x,y)(1-x)\cos 2\pi kxdx = 0\,, \quad 2\int\limits_0^1 (1-x)u(x,y)dx = 0\,,$$

$$4\int\limits_0^1 u(x,y)\sin 2\pi kxdx = 0\,,\ k = 1, 2,\ \ldots\,.$$

Отсюда в силу полноты системы корневых функций (7) в пространстве $L_2[0,1]$ следует, что функция $u(x,y) = 0$ почти всюду на $[0,1]$ при любом $y \in [-\alpha, \beta]$. В силу (2) функция $u(x,y)$ непрерывна на $\overline{D}$, поэтому $u(x,y) \equiv 0$ на $\overline{D}$.

Пусть при некоторых α, β, $C_1\,(y)$, $C_2\,(y)$ и $k = p \in N$ нарушено условие (24), т.е.

$$\Delta_{\alpha\beta}\,(p) = \sin\lambda_p\alpha\,\mathrm{ch}\,\lambda_p\beta + \mathrm{sh}\,\lambda_p\beta\cos\lambda_p\alpha +$$

$$+\frac{1}{\lambda_p}\left[C_{1p}\,(\beta)\sin\lambda_p\alpha + C_{2p}\,(-\alpha)\,\mathrm{sh}\,\lambda_p\beta\right] = 0\,. \tag{38}$$

Для нахождения нулей выражения $\Delta_{\alpha\beta}\,(p)$ относительно α представим его в следующем виде:

$$\Delta_{\alpha\beta}\,(p) = K_p(\beta)\sin\left(\lambda_p\alpha + \gamma_p\right) + \frac{\mathrm{sh}\,\lambda_p\beta\cdot C_{2p}\,(-\alpha)}{\lambda_p}\,, \tag{39}$$

где

$$K_p(\beta) = \sqrt{\left[\frac{C_{1p}(\beta)}{\lambda_p} + \operatorname{ch}\lambda_p\beta\right]^2 + \operatorname{sh}^2\lambda_p\beta}\,, \quad \gamma_p = \arcsin\frac{\operatorname{sh}\lambda_p\beta}{K_p(\beta)}\,.$$

Из соотношения (39) имеем

$$\sin(\lambda_p\alpha + \gamma_p) = -\frac{\operatorname{sh}\lambda_p\beta \cdot C_{2p}(-\alpha)}{\lambda_p K_p(\beta)}\,. \tag{40}$$

Отсюда при условии

$$\left|\frac{\operatorname{sh}\lambda_p\beta \cdot C_{2p}(-\alpha)}{\lambda_p K_p(\beta)}\right| \le \frac{|C_{2p}(-\alpha)|}{\lambda_p} \le 1$$

уравнение (40) равносильно следующему уравнению:

$$\alpha = \frac{(-1)^{n+1}}{\lambda_p}\arcsin\frac{\operatorname{sh}\lambda_p\beta \cdot C_{2p}(-\alpha)}{\lambda_p K_p(\beta)} + \frac{\pi n}{\lambda_p} - \frac{\gamma_p}{\lambda_p} = f(\alpha)\,,\ n \in N\,. \tag{41}$$

Если $C_{2p}(-\alpha) = 0$, то из выражения (41) следует, что

$$\alpha = \frac{\pi n}{\lambda_p} - \frac{\gamma_p}{\lambda_p}\,,\ n \in N\,.$$

Если $C_2(y) = C_2 = \mathrm{const} \ne 0$, то $C_{2p}(-\alpha) = C_2(\cos\lambda_p\alpha - 1)/\lambda_p$ и из формулы (38) получим, что $\Delta_{\alpha\beta}(p) = 0$ только тогда, когда $|C_2| \le \lambda_p^2$ и

$$\alpha = \frac{(-1)^n}{\lambda_p}\arcsin\frac{C_2\operatorname{sh}\lambda_p\beta}{\lambda_p^2 T_p(\beta)} + \frac{\pi n}{\lambda_p} - \frac{\theta_p}{\lambda_p}\,,\ n \in N\,.$$

Здесь

$$\theta_p = \arcsin\frac{(C_2 + \lambda_p^2)\operatorname{sh}\lambda_p\beta}{\lambda_p^2 T_p(\beta)}\,, \quad T_p(\beta) = \sqrt{\left[\frac{C_{1p}(\beta)}{\lambda_p} + \operatorname{ch}\lambda_p\beta\right]^2 + \left[\frac{C_2\operatorname{sh}\lambda_p\beta}{\lambda_p^2} + \operatorname{sh}\lambda_p\beta\right]^2}\,.$$

Для разрешимости нелинейного уравнения (41) достаточно потребовать, чтобы производная $|f'(\alpha)| \le d < 1$. Последнее выполнено, когда $\alpha < \sqrt{2}\pi/||C_2||$, $||C_2|| = \max\limits_{-\alpha \le y \le 0}|C_2(y)|$.

Тогда однородная задача (2)-(5) (где $\varphi(x) \equiv 0$, $\psi(x) \equiv 0$) имеет нетривиальное решение

$$u_p(x, y) = u_p(y)\cos\lambda_p x\,, \tag{42}$$

здесь функция $u_p(y)$ определяется по формуле

$$u_p(y) = \begin{cases} \dfrac{2b_p\Delta_{\alpha y}(p)}{\sin\lambda_p\alpha - \cos\lambda_p\alpha - \lambda_p^{-1}C_{2p}(-\alpha)}\,, & y > 0\,, \\[2ex] \dfrac{2b_p\Delta_{-y\beta}(p)}{e^{\lambda_p\beta} + \lambda_p^{-1}C_{1p}(\beta)}\,, & y < 0\,, \end{cases} \tag{43}$$

где $b_p \neq 0$ – произвольная постоянная.

Таким образом, нами установлен следующий критерий единственности.

Теорема 1. *Если существует решение задачи, то для его единственности необходимо и достаточно, чтобы при всех $k \in N$ выполнялись условия* (24).

3. Теорема существования. Решение задачи (2)-(5) при условии (24) будем искать в виде суммы ряда

$$u(x,y) = u_0(y) + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(y)\cos(2\pi kx) + \sum_{k=1}^{\infty} v_k(y)x\sin(2\pi kx)\,, \tag{44}$$

где функции $u_0\,(y)$, $u_k\,(y)$ и $v_k\,(y)$ определяются соответственно по формулам (30), (36), (25).

Поскольку α, β – любые числа из промежутков задания, то при достаточно больших k выражение $\Delta_{\alpha\beta}(k)$, которое входит в знаменатели коэффициентов ряда (44) может стать достаточно малым, т.е. возникает проблема «малых знаменателей» [11], [5]. Для обоснования существования решения (44) данной задачи необходимо показать существование чисел α, β и функций $C_i\,(y)$, $i = 1,\ 2$ таких, что выражение $\Delta_{\alpha\beta}\,(k)$ отделено от нуля.

Лемма 1. *Если выполнено одно из следующих условий*: 1) $\alpha = p$ – *натуральное число*; 2) $\alpha = \dfrac{p}{q} \notin \mathbb{N}$, *где* $p,\ q \in \mathbb{N}$, $(p,q) = 1$, $(q,4) = 1$, *то существуют положительные постоянные* $k_0 \in \mathbb{N}$ *и* C_0 *такие, что при любом фиксированном* $\beta > 0$ *и всех* $k > k_0$ *справедлива оценка*

$$|\Delta_{\alpha\beta}(k)| \geq C_0 e^{2\pi k\beta} > 0\,; \tag{45}$$

3) *если* α *является любым иррациональным алгебраическим числом степени* 2, $C_1(y) \geq 0$ *монотонно возрастает на* $[0,\beta]$, $C_2(y) \geq 0$ *монотонно убывает на* $[-\alpha, 0]$, *то существуют положительные постоянные* k_0, b_0 *и* C_0, *вообще говоря, зависящие от* α, β *и* b, *такие, что при всех* $b < b_0$, $k > k_0$ *справедлива оценка*

$$|\Delta_{\alpha\beta}(k)| \geq e^{2\pi k\beta}\frac{C_0}{k}\ . \tag{46}$$

□ Представим $\Delta_{\alpha\beta}\,(k)$ в следующем виде:

$$\Delta_{\alpha\beta}\,(k) = e^{\lambda_k\beta}A_k\,(\beta)\sin\left(\lambda_k\alpha + \varphi_k\right) + \frac{e^{\lambda_k\beta}}{\lambda_k}\omega_k\,(\alpha,\beta)\,, \tag{47}$$

где $\varphi_k = \arcsin\left(\operatorname{sh}\lambda_k\beta/\sqrt{\operatorname{ch}2\lambda_k\beta}\right) \to \pi/4$ при $k \to +\infty$,

$$A_k\,(\beta) = \sqrt{\frac{1+e^{-4\lambda_k\beta}}{2}}\ , \tag{48}$$

$$\omega_k\,(\alpha,\beta) = \frac{\sin\lambda_k\alpha}{e^{\lambda_k\beta}}C_{1k}\,(\beta) + \frac{C_{2k}\,(-\alpha)\left(1-e^{-2\lambda_k\beta}\right)}{2}\ . \tag{49}$$

Отметим, что при любом фиксированном $\beta > 0$ и $k \in \mathbb{N}$ выражение (48) ограничено:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < A_k(\beta) < 1\,, \tag{50}$$

Для оценки $\omega_k(\alpha,\beta)$ воспользуемся формулой (49). Если $C_1(y) \geq 0$ монотонно возрастает па $[0,\beta]$, $C_2(y) \geq 0$ монотонно убывает на $[-\alpha,0]$, то воспользовавшись формулами Бонне или второй теоремой о среднем значении, получим

$$|\,\omega_k(\alpha,\beta)| < \frac{|C_1(\beta)| + |C_2(-\alpha)|}{2\lambda_k} = \frac{M_1}{k}\,, \tag{51}$$

где M_i – здесь и далее положительные постоянные, вообще говоря, зависящие от α или β.

Из представления (47) в силу оценок (51) достаточно оценить выражение

$$\delta_{\alpha\beta}(k) = \sin(\lambda_k\alpha + \varphi_k)\,. \tag{52}$$

При $k > k_1 > b/2\pi \geq 0$ имеет место следующее равенство:

$$\lambda_k = \sqrt{(2\pi k)^2 + b^2} = 2\pi k\left[1 + \left(\frac{b}{2\pi k}\right)^2\right]^{1/2} =$$

$$= 2\pi k\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{b}{2\pi k}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{b}{2\pi k}\right)^4 + \ldots\right] = 2\pi k + \theta_k\,, \tag{53}$$

при этом для остатка ряда справедлива оценка

$$\frac{b^2}{4\pi k} < \theta_k < \frac{b^2}{2\pi k}\,. \tag{54}$$

Тогда из (52) и (53), обозначая $\tilde{\theta}_k = \theta_k\alpha$, получим

$$|\delta_{\alpha\beta}(k)| = \left|\sin\left(2\pi k\alpha + \tilde{\theta}_k + \varphi_k\right)\right|\,. \tag{55}$$

При $\alpha = p \in N$ существует номер k_2, такой, что при всех $k > k_2$ имеем следующую оценку:

$$\left|\sin\left(2\pi kp + \tilde{\theta}_k + \varphi_k\right)\right| = \left|\sin\left(\tilde{\theta}_k + \varphi_k\right)\right| > \frac{1}{2}\left|\sin\frac{\pi}{4}\right| = M_2 > 0\,. \tag{56}$$

Пусть $\alpha = p/q$, где p и q – взаимно-простые числа. Разделим $2kp$ на q с остатком: $2kp = sq + r$, где s, $r \in N \cup \{0\}$, $0 \leq r < q$. Тогда выражение (55) примет вид

$$|\delta_{\alpha\beta}(k)| = \left|\sin\left(\pi\frac{2kp}{q} + \tilde{\theta}_k + \varphi_k\right)\right| = \left|\sin\left(\frac{\pi r}{q} + \tilde{\theta}_k + \varphi_k\right)\right|\,. \tag{57}$$

Если $r = 0$, то данный случай сводится к уже рассмотренному выше $\alpha = p \in N$. Пусть $r > 0$. Тогда ясно, что $1 \le r \le q-1$, $q \ge 2$, и из (57) получим

$$|\,\delta_{\alpha\beta}\,(k)\,| = \left|\sin\left(\frac{\pi r}{q} + \tilde{\theta}_k + \frac{\pi}{4} - \varepsilon_k\right)\right|, \quad \varepsilon_k > 0 \text{ и } \varepsilon_k \to 0\,.$$

Тогда существует натуральное число k_3, такое, что из последнего соотношения при всех $k > k_3$ следует неравенство

$$|\,\delta_{\alpha\beta}\,(k)\,| > \frac{1}{2}\left|\sin\left(\frac{\pi r}{q} + \frac{\pi}{4}\right)\right| \ge M_3 > 0.$$

Пусть α – алгебраическое иррациональное число степени 2. В этом случае выражение (55) можно представить в виде

$$|\,\delta_{\alpha\beta}\,(k)| = \left|\sin\left(2\pi k\alpha - \pi n + \tilde{\theta}_k + \varphi_k\right)\right|\,, \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{58}$$

Для всякого $k \in N$ можно подобрать $n \in \mathbb{N}$ [11], такое, что имеет место неравенство

$$\left|\alpha - \frac{n}{2k}\right| < \frac{1}{4k}\,. \tag{59}$$

Из теории чисел известно (см. теорему Лиувилля ([6], с.60]), что для любого иррационального алгебраического числа α степени 2 существует положительное число δ такое, что при любых целых n, k $(k > 0)$ справедливо неравенство

$$\left|\alpha - \frac{n}{2k}\right| > \frac{\delta}{4k^2}\,. \tag{60}$$

Из (59) и (60) получим

$$\frac{\pi\delta}{2k} < \left|2\pi k\left(\alpha - \frac{n}{2k}\right)\right| < \frac{\pi}{2}\,. \tag{61}$$

Из (54) найдем

$$\frac{b^2\alpha}{8\pi k} < \tilde{\theta}_k < \frac{b^2\alpha}{4\pi k}\,. \tag{62}$$

Потребуем, чтобы $\tilde{\theta}_k < \dfrac{\pi}{8}$, которое имеет место при всех $k > k_4 \ge 2b^2\alpha/\pi^2$. Следовательно, $\tilde{\theta}_k + \varphi_k < \dfrac{3\pi}{8}$. Тогда для аргумента выражения (58) имеем оценку:

$$0 < |2\pi k\alpha - \pi n + \tilde{\theta}_k + \varphi_k| < \frac{7\pi}{8}\,.$$

Рассмотрим два случая. Если

$$\frac{\pi}{2} < |2\pi k\alpha - \pi n + \tilde{\theta}_k + \varphi_k| < \frac{7\pi}{8}\,,$$

то

$$|\delta_{\alpha\beta}(k)| = \left|\sin\left(2\pi k\alpha - \pi n + \tilde{\theta}_k + \varphi_k\right)\right| > \sin\frac{7\pi}{8}\,. \tag{63}$$

Если $0 < |2\pi k\alpha - \pi n + \tilde{\theta}_k + \varphi_k| < \pi/2$, тогда с учетом неравенства $\sin x > (2/\pi)x$, $0 < x < \pi/2$, и оценок (61) и (62) будем иметь

$$|\delta_{\alpha\beta}(k)| = \left|\sin\left(2\pi k\alpha - \pi n + \tilde{\theta}_k + \varphi_k\right)\right| > \frac{2}{\pi}\left|2\pi k\alpha - \pi n + \tilde{\theta}_k + \varphi_k\right| =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left|2\pi k\left(\alpha - \frac{4n-1}{8k}\right) + \tilde{\theta}_k - \varepsilon_k\right| \geq \frac{2}{\pi}\left(2\pi k\left|\alpha - \frac{4n-1}{8k}\right| - |\tilde{\theta}_k| - |\varepsilon_k|\right).$$

Применяя формулу разности арксинусов

$$\arcsin x - \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right), \qquad xy > 0,$$

оцепим

$$\varepsilon_k = \frac{\pi}{4} - \varphi_k = \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} - \arcsin\frac{\operatorname{sh}\lambda_k\beta}{\sqrt{\operatorname{ch}2\lambda_k\beta}} =$$

$$= \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\operatorname{ch}\lambda_k\beta - \operatorname{sh}\lambda_k\beta}{\sqrt{\operatorname{ch}2\pi k\beta}}\right) = \arcsin\frac{1}{e^{2\lambda k\beta}\sqrt{1+e^{-4\lambda_k\beta}}}\,.$$

Отсюда, с учетом неравенства $|\arcsin x| < (\pi/2)|x|$, $0 < |x| < 1$, получим

$$\arcsin\frac{1}{e^{2\lambda_k\beta}\sqrt{1+e^{-4\lambda_k\beta}}} < \frac{\pi}{2e^{2\lambda_k\beta}\sqrt{1+e^{-4\lambda_k\beta}}} < \frac{\pi}{2e^{2\lambda_k\beta}} < \frac{\pi}{2e^{4\pi k\beta}}\,. \tag{64}$$

Поскольку $e^{4\pi k\beta} > (4\pi k\beta)^2$ при всех $k \in N$, то из (64) следует неравенство

$$|\varepsilon_k| < \frac{1}{32\pi(k\beta)^2}\,. \tag{65}$$

С учетом (60), (62) и (65) при всех $b < \pi\sqrt{\dfrac{\delta}{2\alpha}} = b_0$ и $k > k_5 \geq \dfrac{1}{2M_4(\pi\beta)^2}$, где $M_4 = \delta - \dfrac{2b^2\alpha}{\pi^2}$, выполнено

$$|\delta_{\alpha\beta}(k)| > \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi\delta}{8k} - \frac{b^2\alpha}{4\pi k} - \frac{1}{32\pi(k\beta)^2}\right) > \frac{\delta}{16k}\,. \tag{66}$$

Из выражения (47) в силу оценок (50), (51), (63) и (66)

$$|\Delta_{\alpha\beta}(k)| = \left|e^{\lambda_k\beta}A_k(\beta)\sin(\lambda_k\alpha + \varphi_k) + \frac{e^{\lambda_k\beta}}{\lambda_k}\omega_k(\alpha,\beta)\right| \geq$$

$$\geq e^{\lambda_k\beta}|A_k(\beta)|\,|\sin(\lambda_k\alpha + \varphi_k)| - \frac{e^{\lambda_k\beta}}{\lambda_k}|\omega_k(\alpha,\beta)| \geq \frac{e^{\lambda_k\beta}}{k}\left[\frac{\delta}{16\sqrt{2}} - \frac{M_1}{k}\right] \geq e^{\lambda_k\beta}\frac{C_0}{k}$$

при всех $k > k_0 = \max\limits_{1\le i\le 6} k_i$, $b < b_0$ и $k_6 > \dfrac{16\sqrt{2}M_1}{\delta}$. ■

Замечание. Доказательство леммы 1 отлично от доказательства, приведенного в работе [2]. Примечательно оно тем, что снято условие малости норм $||C_1||$ и $||C_2||$.

Лемма 2. *Пусть выполнена оценка* (45) *при* $k > k_0$. *Тогда для таких* k *и при любом* $y \in [-\alpha, \beta]$ *справедливы оценки*:

$$|v_k\,(y)\,| \le A_1\,(|\varphi_k| + |\psi_k|)\ , \tag{67}$$

$$|v'_k\,(y)\,| \le A_2 k\,(|\varphi_k| + |\psi_k|)\,, \quad |v''_k\,(y)\,| \le A_3 k^2\,(|\varphi_k| + |\psi_k|)\ , \tag{68}$$

$$|u_k\,(y)\,| \le A_4\,(|\varphi_k| + |\psi_k|)\,, \quad |u'_k\,(y)\,| \le A_5 k\,(|\varphi_k| + |\psi_k|)\ , \tag{69}$$

$$|u''_k\,(y)\,| \le A_6 k^2\,(|\varphi_k| + |\psi_k|)\ , \tag{70}$$

где A_i — здесь и далее положительные постоянные, зависящие, вообще говоря, от α, β, $\|C_1\|$ и $\|C_2\|$.

□ Справедливость оценки из (67) непосредственно следует из формулы (25) и оценки (45). Исходя из (25) вычислим производные $v'_k\,(y)$ и $v''_k\,(y)$:

$$v'_k(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta_{\alpha\beta}(k)}\left[\lambda_k^{-1}\psi_k A'_{y\beta}(k) + \varphi_k \Delta'_{\alpha y}(k)\right]\,, & y > 0\,, \\ \dfrac{1}{\Delta_{\alpha\beta}(k)}\left[\psi_k \Delta'_{-y\beta}(k) + \lambda_k^{-1}\varphi_k B'_{\alpha y}(k)\right]\,, & y < 0\,, \end{cases} \tag{71}$$

$$A'_{y\beta}\,(k) = C'_{1k}(y)\,\mathrm{sh}\,\lambda_k\beta - \lambda_k C_{1k}(\beta)\,\mathrm{ch}\,\lambda_k y - \lambda_k^2\,\mathrm{ch}[\lambda_k(\beta - y)],$$

$$\Delta'_{\alpha y}\,(k) = \lambda_k \sin\lambda_k\alpha\,\mathrm{sh}\,\lambda_k y + +\lambda_k\,\mathrm{ch}\,\lambda_k y\cos\lambda_k\alpha + \frac{C'_{1k}\,(y)\sin\lambda_k\alpha + \lambda_k C_{2k}\,(-\alpha)\,\mathrm{ch}\,\lambda_k y}{\lambda_k}\ ,$$

$$\Delta'_{-y\beta}\,(k) = \lambda_k\cos\lambda_k y\,\mathrm{ch}\,\lambda_k\beta - \lambda_k\,\mathrm{sh}\,\lambda_k\beta\sin\lambda_k y - \frac{\lambda_k C_{1k}\,(\beta)\cos\lambda_k y + C'_{2k}\,(y)\,\mathrm{sh}\,\lambda_k\beta}{\lambda_k}\ ,$$

$$B'_{\alpha y}\,(k) = C'_{2k}(y)\sin\lambda_k\alpha + \lambda_k C_{2k}(-\alpha)\cos\lambda_k y + +\lambda_k^2\cos[\lambda_k(\alpha + y)],$$

$$C'_{1k}\,(y) = \lambda_k\int\limits_0^y C_1\,(t)\,\mathrm{ch}\,[\lambda_k\,(y - t)]dt\,,$$

$$C'_{2k}\,(y) = \lambda_k\int\limits_y^0 C_2\,(t)\cos\,[\lambda_k\,(y - t)]dt\,.$$

Для вычисления второй производной функции воспользуемся формулами (14) и (15), получим

$$v''_k\,(y) = \begin{cases} \lambda_k^2 v_k(y) - C_1(y)v_k(0)\,, & y > 0\,, \\ -\lambda_k^2 v_k(y) + C_2(y)v_k(0)\,, & y < 0\,, \end{cases} \tag{72}$$

Тогда из равенств (71) и (72) на основании (45) и оценки из (67), убеждаемся в справедливости оценки (68). Аналогичным образом доказываются оценки (69), (70) для функции $u_k(y)$. ■

Лемма 3. *Пусть выполнена оценка (46) при всех $k \geq k_0$. Тогда при любом $y \in [-\alpha, \beta]$ и для таких k справедливы оценки:*

$$|v_k(y)| \leq A_7 k\left(|\varphi_k| + |\psi_k|\right), \tag{73}$$

$$|v'_k(y)| \leq A_8 k^2\left(|\varphi_k| + |\psi_k|\right), \quad |v''_k(y)| \leq A_9 k^3\left(|\varphi_k| + |\psi_k|\right), \tag{74}$$

$$|u_k(y)| \leq A_{10} k\left(|\varphi_k| + |\psi_k|\right), \tag{75}$$

$$|u'_k(y)| \leq A_{11} k^2\left(|\varphi_k| + |\psi_k|\right), |u''_k(y)| \leq A_{12} k^3\left(|\varphi_k| + |\psi_k|\right). \tag{76}$$

□ Справедливость оценки (73) непосредственно следует из формулы (25) и оценки (45). Из равенств (71) и (72) на основании (46) и (73), убеждаемся в справедливости оценок (74). Аналогично получаем оценки (75) и (76). ■

Лемма 4. *Пусть $\varphi(x), \psi(x) \in C^3[0,1]$, $\varphi(0) = \varphi(1)$, $\psi(0) = \psi(1)$, $\varphi'(0) = 0$, $\psi'(0) = 0$, $\varphi''(0) = \varphi''(1)$, $\psi''(0) = \psi''(1)$, то справедливы оценки:*

$$|\varphi_k| \leq \frac{A_{13}|g_k|}{k^3}, \quad |\psi_k| \leq \frac{A_{15}|\widetilde{g}_k|}{k^3}, \tag{77}$$

$$|\varphi_{1k}| \leq A_{14}\left(\frac{|r_k| + |g_{1k}|}{k^3}\right), |\psi_{1k}| \leq A_{16}\left(\frac{|\widetilde{r}_k| + |\widetilde{g}_{1k}|}{k^3}\right), \tag{78}$$

где

$$g_k = 4\int_0^1 \varphi'''(x)\cos(2\pi kx)dx, \qquad r_k = 4\int_0^1 \varphi''(x)\sin(2\pi kx)dx,$$

$$g_{1k} = 4\int_0^1 \varphi'''(x)(1-x)\sin(2\pi kx)dx,$$

$$\widetilde{g}_k = 4\int_0^1 \psi'''(x)\cos(2\pi kx)dx, \qquad \widetilde{r}_k = \int_0^1 \psi''(x)\sin(2\pi kx)dx,$$

$$\widetilde{g}_{1k} = 4\int_0^1 \psi'''(x)(1-x)\sin(2\pi kx)dx,$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} g_k^2 < +\infty, \sum_{k=1}^{+\infty} r_k^2 < +\infty, \sum_{k=1}^{+\infty} g_{1k}^2 < +\infty, \sum_{k=1}^{+\infty} \widetilde{g}_k^2 < +\infty, \sum_{k=1}^{+\infty} \widetilde{r}_k^2 < +\infty, \sum_{k=1}^{+\infty} \widetilde{g}_{1k}^2 < +\infty. \tag{79}$$

□ Интегрируя по частям три раза в интегралах из (20), (21), (33) и (34), с учетом условий леммы, получим представления (77) и (78). Обоснование сходимости рядов (79) проводится аналогично [7]. ■

Поскольку системы функций (6) и (7) образуют базис Рисса, то если $\varphi(x)$, $\psi(x) \in L_2[0,1]$, тогда функцию $u(x,y)$ можно представить в виде биортогонального ряда (44), который сходится в $L_2[0,1]$ при любом $y \in [-\alpha, \beta]$. В силу лемм 2 и 4 ряд (44) при любом (x,y) из $\overline{D}$ мажорируется сходящимся рядом

$$A_{17} \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \left(|g_k| + |g_{1k}| + |r_k| + |\widetilde{g}_k| + |\widetilde{r}_k| + |\widetilde{g}_{1k}|\right),$$

поэтому ряд (44) и ряды производных u_x и u_y в силу признака Вейерштрасса сходятся абсолютно и равномерно на замкнутой области $\overline{D}$. Следовательно, сумма $u(x,y)$ ряда (44) принадлежит классу $C^1(\overline{D})$. Ряды из производных второго порядка на $\overline{D}_+$ и $\overline{D}_-$ мажорируются также сходящимся числовым рядом

$$A_{18} \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} \frac{1}{k} \left(|g_k| + |g_{1k}| + |r_k| + |\widetilde{g}_k| + |\widetilde{r}_k| + |\widetilde{g}_{1k}|\right).$$

Поэтому сумма $u(x,y)$ ряда (44) принадлежит пространству $C^2(\overline{D}_+ \cup \overline{D}_-)$ и удовлетворяет уравнению (1) на множестве $D_+ \cup D_-$.

Лемма 5. *Если* $\varphi(x)$, $\psi(x) \in C^4[0,1]$, $\varphi(0) = \varphi(1)$, $\psi(0) = \psi(1)$, $\varphi'(0) = 0$, $\psi'(0) = 0$, $\varphi''(0) = \varphi''(1)$, $\psi''(0) = \psi''(1)$, $\varphi'''(0) = 0$, $\psi'''(0) = 0$, *то*

$$|\varphi_k| \le \frac{A_{17}|z_k|}{k^4}, \quad |\psi_k| \le \frac{A_{18}|\widetilde{z}_k|}{k^4}, \quad |\varphi_{1k}| \le A_{19}\left(\frac{|h_k| + |z_{1k}|}{k^4}\right), |\psi_{1k}| \le A_{20}\left(\frac{|\widetilde{h}_k| + |\widetilde{z}_{1k}|}{k^4}\right),$$

где

$$z_k = 4\int_0^1 \varphi^{(4)}(x)\sin(2\pi kx)dx\,, \quad h_k = 4\int_0^1 \varphi'''(x)\cos(2\pi kx)dx\,,$$

$$z_{1k} = 4\int_0^1 \varphi^{(4)}(x)(1-x)\cos(2\pi kx)dx\,,$$

$$\widetilde{z}_k = 4\int_0^1 \psi^{(4)}(x)\sin(2\pi kx)dx\,, \quad \widetilde{h}_k = \int_0^1 \psi'''(x)\cos(2\pi kx)dx\,,$$

$$\widetilde{z}_{1k} = 4\int_0^1 \psi^{(4)}(x)(1-x)\cos(2\pi kx)dx\,,$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} z_k^2 < +\infty, \sum_{k=1}^{+\infty} h_k^2 < +\infty, \sum_{k=1}^{+\infty} z_{1k}^2 < +\infty, \sum_{k=1}^{+\infty} \widetilde{z}_k^2 < +\infty, \sum_{k=1}^{+\infty} \widetilde{h}_k^2 < +\infty, \sum_{k=1}^{+\infty} \widetilde{z}_{1k}^2 < +\infty.$$

□ Проводится аналогично лемме 4. ■

Пусть выполнены условия пункта 3 леммы 1, тогда ряд (44) в силу леммы 3 и 5 мажорируется числовым рядом

$$A_{21}\sum_{k=k_0+1}^{+\infty}\frac{1}{k^3}\left(|z_k|+|z_{1k}|+|h_k|+|\widetilde{z}_k|+|\widetilde{h}_k|+|\widetilde{z}_{1k}|\right).$$

Далее аналогично приведенному выше доказательству убеждаемся, что функция $u(x,y)$, определенная рядом (44), удовлетворяет условиям (2) и (3).

Таким образом, нами доказаны следущие утверждения.

Теорема 1. *Пусть функции* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *удовлетворяют условиям леммы* 4, $C_1(y)\in C[0,\beta]$, $C_2(y)\in C[-\alpha,0]$ *и выполнена оценка* (45) *при всех* $k>k_0$. *Тогда если* $\Delta_{\alpha\beta}(k)\neq 0$ *при всех* $k=\overline{1,k_0}$, *то задача* (2) – (5) *имеет единственное решение, которое определяется рядом* (44).

Теорема 2. *Пусть функции* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *удовлетворяют условиям леммы* 5, $C_1(y)\in C[0,\beta]$, $C_2(y)\in C[-\alpha,0]$, $C_1(y)\geq 0$ *монотонно возрастает на* $[0,\beta]$, $C_2(y)\geq 0$ *монотонно убывает на* $[-\alpha,0]$, *и выполнена оценка* (46). *Тогда задача* (2)-(5) *имеет единственное решение, которое определяется рядом* (44).

Отметим, что если для чисел α, указанных в лемме 1, при некоторых $k=k_1<k_2<\ldots<k_m\leq k_0$, $m\in\mathbb{N}$, выражение $\Delta_{\alpha\beta}(k)=0$, то в этом случае задача (2)-(5) условно разрешима, т.е. имеет решение при выполнении условий ортогональности $\varphi_k=\psi_k=0$, $k=k_1,k_2,\ldots,k_m$.

Литература

1. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение / М.: Наука, 2012. – 232 с.
2. Сабитов К.Б., Мелишева Е.П. Задача Дирихле для нагруженного уравнения смешанного типа в прямоугольной области // Изв.вузов.Матем. – 2013. – №7. – С.62-76.
3. Моисеев Е.И. О решении спектральным методом одной нелокальной краевой задачи // Дифференциальные уравнения. – 1999. – 35, №8. – С.1094-1100.
4. Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области // Докл. РАН. – 2007. – 413, №1. – С.23-26.
5. Арнольд В.И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механики // УМН. – 1963. – Т.XVIII, вып.6(114). – С.91-192.
6. Хинчин А.Я. Ценные дроби / М.: Наука, 1978. – 112 с.
7. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. – 1977. – 13, №2. – С.294-304.

BOUNDARY-VALUE PROBLEM WITH NONLOCAL CONDITION FOR A MIXED TYPE EQUATION IN RECTANGULAR AREA

Y.K. Sabitova

Sterlitamak department of Bashkir State Univercity

Institute of researches, Odesskya St., 68, Sterlitamak, 453103, Russia, e-mail: sabitovauk@rambler.ru

Abstract. Boundary-value nonlocal problem for an equation of mixed elliptic-hyperbolic type is studied. Criterion of solution uniqueness is found by spectral analysis. The solution is built as the sum of biortogonal series.