

MSC 74F15

## МЕТОД ОТРАЖЕНИЙ В ОПИСАНИИ ИЗЛУЧЕНИЯ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ НА ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ СФЕРЕ

В.В. Сыщенко, Э.А. Ларикова

Белгородский государственный университет,  
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия

**Аннотация.** Рассмотрено излучение, возникающее при падении равномерно движущейся нерелятивистской заряженной частицы на идеально проводящую сферу. С помощью метода электростатических изображений получены формулы, описывающие характеристики переходного излучения.

**Ключевые слова:** переходное излучение, метод изображений.

**Введение.** При пересечении заряженной частицей границы раздела двух сред с различными электромагнитными свойствами возникает так называемое переходное излучение. С математической точки зрения, причина его возникновения заключается в том, что удовлетворить граничным условиям для создаваемых частицей в этих двух средах полей возможно лишь, добавив к общему решению уравнений Максвелла решение свободных уравнений (уравнений без зарядов и токов), представляющее собой электромагнитные волны, составляющие поле излучения (см., например, [1]).

В некоторых простейших случаях найти решение уравнений Максвелла, удовлетворяющее граничным условиям, можно с помощью так называемого метода изображений, основанного на теореме единственности (см., например, [2]). В частности, излучение, возникающее при падении заряженной частицы на идеально проводящую плоскость, может трактоваться как излучение, возникающее при мгновенном исчезновении заряда и его «отражения», движущихся навстречу друг другу. Именно такой подход к описанию переходного излучения был использован в пионерской работе В.Л. Гинзбурга и И.М. Франка [3].

В настоящей статье мы используем метод изображений для нахождения спектра переходного излучения, возникающего при пролете нерелятивистской заряженной частицы сквозь идеально проводящую сферу. Ранее данный подход был использован в [4] для исследования дифракционного излучения, возникающего при пролете частицы мимо такой сферы.

**Метод исследования.** Спектрально-угловая плотность излучения заряженной частицы описывается формулой [5]

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega d\Omega} = \frac{1}{4\pi^2 c} |[\mathbf{k}, \mathbf{I}]|^2, \quad (1)$$



где  $\mathbf{k}$  — волновой вектор излученной волны,  $c$  — скорость света в вакууме

$$\mathbf{I} = \int_{-\infty}^{\infty} e \mathbf{v}(t) e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}(t))} dt, \quad (2)$$

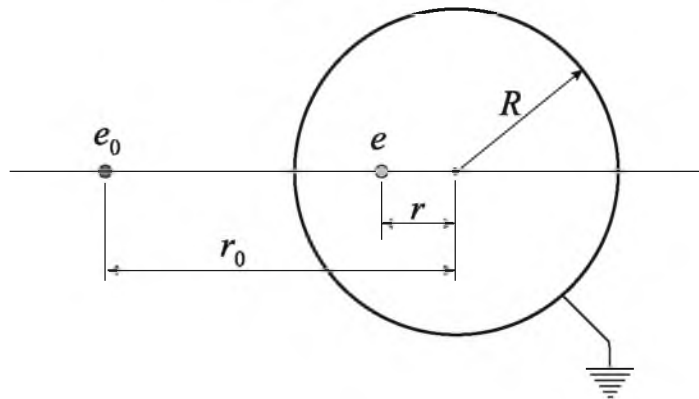


Рис. 1. К методу отражений: положения реального заряда  $e_0$  и его «отражения»  $e$  относительно заземленной проводящей сферы радиуса  $R$ .

$e$  — заряд частицы,  $\mathbf{r}(t)$  — её траектория,

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

Рассмотрим излучение, возникающее при падении прямолинейно равномерно движущейся нерелятивистской заряженной частицы на идеально проводящую сферу. Причиной возникновения переходного излучения является неоднородность среды, сквозь которую движется частица, в данном случае — наличие проводящей сферы. Найти решение уравнений поля, удовлетворяющее граничным условиям на сфере, можно с помощью следующего формального приёма, основанного на теореме единственности [2].

Электрическое поле, создаваемое точечным зарядом  $e_0$ , помещенным на расстоянии  $r_0$  от центра идеально проводящей заземленной сферы радиуса  $R$  оказывается (в наружной области сферы) эквивалентным суперпозиции кулоновских полей заряда  $e_0$  и фиктивного заряда  $e$ , помещенного на прямой, соединяющей реальный заряд  $e_0$  и центр сферы, на расстоянии  $r$  от центра сферы (рис. 1), причем

$$r = \frac{R^2}{r_0}, \quad e = -e_0 \sqrt{\frac{r}{r_0}} = -e_0 \frac{R}{r_0}. \quad (3)$$

Легко проверить, что в этом случае потенциал, создаваемый двумя зарядами на поверхности сферы, будет равен нулю. В случае не заземленной, а изолированной сферы следует добавить еще фиктивный заряд величиной  $-e$  в центр сферы.

Введем систему координат, в которой начало координат совпадает с центром сферы, ось  $z$  направлена вдоль скорости налетающей частицы  $\mathbf{v}_0$ , а ось  $x$  лежит в плоскости, содержащей траекторию налетающей частицы и центр сферы (рис. 2), так что расстояние между пролетающей частицей и центром сферы будет равно

$$r = \sqrt{b^2 + v_0^2 t^2},$$

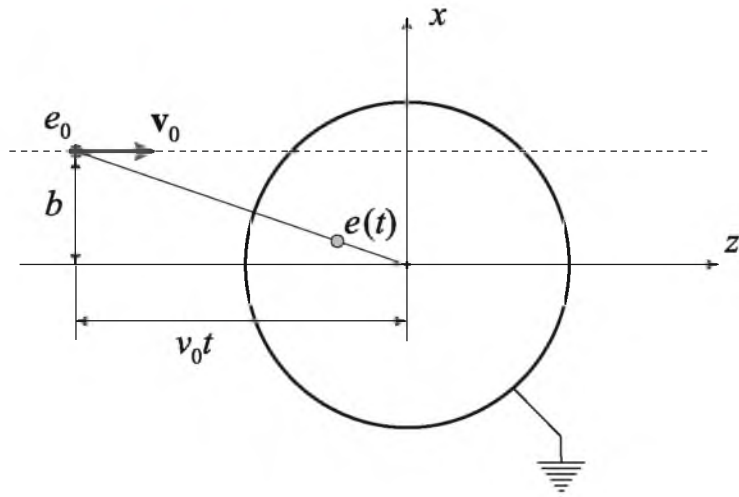


Рис. 2. Заряд  $e_0$ , проникающий сквозь сферу под прицельным параметром  $b$ , и его «отражение».

где момент времени  $t = 0$  соответствует наибольшему сближению частицы с центром сферы. Тогда, согласно (3), величина и координаты фиктивного заряда будут определяться соотношениями

$$e(t) = -e_0 \frac{R}{\sqrt{b^2 + v_0^2 t^2}}, \quad x(t) = \frac{R^2 b}{b^2 + v_0^2 t^2}, \quad z(t) = \frac{R^2 v_0 t}{b^2 + v_0^2 t^2}. \quad (4)$$

Компоненты скорости фиктивного заряда, согласно (4), будут равны

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = -\frac{2R^2 b v_0^2 t}{(b^2 + v_0^2 t^2)^2}, \quad v_z(t) = \frac{dz}{dt} = \frac{R^2 v_0 (b^2 - v_0^2 t^2)}{(b^2 + v_0^2 t^2)^2}. \quad (5)$$

Излучение, возникающее при прохождении равномерно движущегося заряда сквозь сферу, будет описываться формулами (1) и (2) с учетом вклада обоих зарядов — реального и фиктивного (легко показать, что описывающие излучение формулы (1) и (2) остаются справедливыми и для заряда переменной величины):

$$\begin{aligned} \mathbf{I} = & \int_{-\infty}^{-t_0} e_0 \mathbf{v}_0 e^{i(\omega t - k_z v_0 t)} dt + \int_{t_0}^{\infty} e_0 \mathbf{v}_0 e^{i(\omega t - k_z v_0 t)} dt + \\ & + \int_{-\infty}^{-t_0} e(t) \mathbf{v}(t) e^{i(\omega t - \mathbf{kr}(t))} dt + \int_{t_0}^{\infty} e(t) \mathbf{v}(t) e^{i(\omega t - \mathbf{kr}(t))} dt, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $t_0 = \sqrt{R^2 - b^2}/v_0$  — момент времени пересечения частицей поверхности сферы.

Подстановка формул (4) и (5) в (6) дает следующие выражения для компонент вектора  $\mathbf{I}$ :

$$I_x = 2e_0 b R^3 v_0^2 \int_{-\infty}^{-t_0} \frac{t}{(b^2 + v_0^2 t^2)^{5/2}} \exp \left\{ i \left[ \omega t - \frac{k_x R^2 b}{b^2 + v_0^2 t^2} - \frac{k_z R^2 v_0 t}{b^2 + v_0^2 t^2} \right] \right\} dt +$$



$$+ 2e_0 b R^3 v_0^2 \int_{t_0}^{\infty} \frac{t}{(b^2 + v_0^2 t^2)^{5/2}} \exp \left\{ i \left[ \omega t - \frac{k_x R^2 b}{b^2 + v_0^2 t^2} - \frac{k_z R^2 v_0 t}{b^2 + v_0^2 t^2} \right] \right\} dt, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} I_z = & e_0 v_0 \int_{-\infty}^{-t_0} e^{i(\omega t - k_z v_0 t)} dt + e_0 v_0 \int_{t_0}^{\infty} e^{i(\omega t - k_z v_0 t)} dt - \\ & - e_0 R^3 v_0 \int_{-\infty}^{-t_0} \frac{b^2 - v_0^2 t^2}{(b^2 + v_0^2 t^2)^{5/2}} \exp \left\{ i \left[ \omega t - \frac{k_x R^2 b}{b^2 + v_0^2 t^2} - \frac{k_z R^2 v_0 t}{b^2 + v_0^2 t^2} \right] \right\} dt - \\ & - e_0 R^3 v_0 \int_{t_0}^{\infty} \frac{b^2 - v_0^2 t^2}{(b^2 + v_0^2 t^2)^{5/2}} \exp \left\{ i \left[ \omega t - \frac{k_x R^2 b}{b^2 + v_0^2 t^2} - \frac{k_z R^2 v_0 t}{b^2 + v_0^2 t^2} \right] \right\} dt. \end{aligned} \quad (8)$$

Учитывая, что  $|\mathbf{k}| = \omega/c$ , для нерелятивистского заряда и длинноволнового предела ( $\lambda \gg R$ ) мы можем пренебречь всеми слагаемыми в показателях экспонент по сравнению с первым. В этом случае

$$I_x = 2e_0 b R^3 v_0^2 \int_{-\infty}^{-t_0} \frac{t}{(b^2 + v_0^2 t^2)^{5/2}} \exp \{i\omega t\} dt + 2e_0 b R^3 v_0^2 \int_{t_0}^{\infty} \frac{t}{(b^2 + v_0^2 t^2)^{5/2}} \exp \{i\omega t\} dt, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} I_z = & e_0 v_0 \int_{-\infty}^{-t_0} e^{i\omega t} dt + e_0 v_0 \int_{t_0}^{\infty} e^{i\omega t} dt - \\ & - e_0 R^3 v_0 \int_{-\infty}^{-t_0} \frac{b^2 - v_0^2 t^2}{(b^2 + v_0^2 t^2)^{5/2}} \exp \{i\omega t\} dt - e_0 R^3 v_0 \int_{t_0}^{\infty} \frac{b^2 - v_0^2 t^2}{(b^2 + v_0^2 t^2)^{5/2}} \exp \{i\omega t\} dt. \end{aligned} \quad (10)$$

Легко видеть, что величина  $I_x$  является чисто мнимой, а величина  $I_z$  — вещественной. С учетом этого, подстановка в (1) дает

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{d\omega d\Omega} &= \frac{1}{4\pi^2 c} \left\{ \frac{\omega^2}{c^2} \left( |I_x|^2 + |I_z|^2 \right) - |k_x I_x + k_z I_z|^2 \right\} = \\ &= \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^3} \left\{ |I_x|^2 + |I_z|^2 - |\varkappa_x I_x + \varkappa_z I_z|^2 \right\} = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^3} \left\{ (1 - \varkappa_x^2) |I_x|^2 + \varkappa_{\perp}^2 |I_z|^2 \right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\varkappa = \mathbf{k}/k$ ,  $\varkappa_{\perp}^2 = \varkappa_x^2 + \varkappa_y^2$ . Интегрируя (11) по углам с учетом того, что

$$\int (1 - \varkappa_x^2) d\Omega = 4\pi - \frac{4}{3}\pi = \frac{8}{3}\pi,$$

$$\int \varkappa_{\perp}^2 d\Omega = \frac{8}{3}\pi,$$

получим выражение для спектральной плотности излучения:

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} = \frac{2\omega^2}{3\pi c^3} \left\{ |I_x|^2 + |I_z|^2 \right\}. \quad (12)$$



**Результаты исследования.** Точное вычисление входящих в (9), (10) интегралов возможно только в случае  $b = 0$  (прохождение частицы через центр сферы). В остальных случаях оказывается возможным лишь приближенное их вычисление после разложения по малому параметру. При малых  $b$  таким малым параметром оказывается величина  $b/v_0t$ . В этом случае

$$\frac{b}{v_0t_0} \ll 1 \tag{13}$$

вычисления дают

$$I_x/e_0 = iP \cos(\omega t_0) - iQ \sin(\omega t_0) + iSci(\omega t_0), \tag{14}$$

$$I_z/e_0 = -2\frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t_0) + F \cos(\omega t_0) - G \sin(\omega t_0) + Hci(\omega t_0), \tag{15}$$

где

$$P = R^3 \frac{\omega^2}{v_0^2} \hat{P}, \quad \tilde{P} = \frac{2}{3} \frac{b/v_0 \omega}{t_0^2} \left[ 1 - \frac{3}{4} \frac{b^2}{v_0^2 t_0^2} + \frac{1}{8} b^2 \frac{\omega^2}{v_0^2} \right],$$

$$Q = R^3 \frac{\omega^2}{v_0^2} \tilde{Q}, \quad \tilde{Q} = \frac{2}{3} \frac{b/v_0}{t_0} \left[ 1 - \frac{2}{t_0^2 \omega^2} + 3 \frac{b^2}{v_0^2 \omega^2 t_0^4} - \frac{1}{4} \frac{b^2}{v_0^2 t_0^2} + \frac{1}{8} b^2 \frac{\omega^2}{v_0^2} \right],$$

$$S = R^3 \frac{\omega^2}{v_0^2} \tilde{S}, \quad \tilde{S} = \frac{2}{3} b \frac{\omega}{v_0} \left[ 1 + \frac{1}{8} b^2 \frac{\omega^2}{v_0^2} \right],$$

$$F = R^3 \frac{\omega^2}{v_0^2} \tilde{F}, \quad \tilde{F} = \frac{1}{\omega^2 t_0^2} \left[ 1 - \frac{7}{4} \frac{b^2}{v_0^2 t_0^2} + \frac{7}{24} b^2 \frac{\omega^2}{v_0^2} \right],$$

$$G = R^3 \frac{\omega^2}{v_0^2} \tilde{G}, \quad \tilde{G} = \frac{1}{\omega t_0} \left[ 1 - \frac{7}{12} \frac{b^2}{v_0^2 t_0^2} + \frac{7}{24} b^2 \frac{\omega^2}{v_0^2} \right],$$

$$H = R^3 \frac{\omega^2}{v_0^2} \tilde{H}, \quad \tilde{H} = \left[ 1 + \frac{7}{24} b^2 \frac{\omega^2}{v_0^2} \right],$$

Специальная функция – интегральный косинус в этих формулах определяется как

$$ci(\omega x) = - \int_x^\infty \frac{\cos(\omega t)}{t} dt.$$

В области больших частот, таких, что  $\omega t_0 \gg 1$ , выражения (14), (15) можно существенно упростить, воспользовавшись асимптотикой интегрального косинуса [6]

$$ci(x) \approx \frac{\sin x}{x} \left( 1 - \frac{2!}{x^2} + \frac{4!}{x^4} - \dots \right) - \frac{\cos x}{x} \left( \frac{1!}{x} - \frac{3!}{x^3} + \frac{5!}{x^5} - \dots \right) \quad \text{при } x \gg 1.$$

В этом случае

$$I_x/e_0 \approx 4i \frac{R^3 b}{\omega v_0^3 t_0^4} \cos(\omega t_0) \left( 1 - \frac{5}{2} \frac{b^2}{v_0^2 t_0^2} \right),$$

$$I_z/e_0 \approx -2 \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t_0) - 2 \frac{R^3}{v_0^2 \omega t_0^3} \sin(\omega t_0) \left( 1 - \frac{7}{2} \frac{b^2}{v_0^2 t_0^2} \right).$$



При значениях  $b$ , близких к  $R$ , в роли малого параметра выступает величина  $v_0 t_0 / b$ . В случае

$$\frac{v_0 t_0}{b} \ll 1 \quad (16)$$

приближенные вычисления интегралов в (9), (10) приводят к следующему результату:

$$I_x / e_0 = iQ_1 - iA \sin(\omega t_0) + iB \cos(\omega t_0),$$

$$I_z / e_0 = -2 \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t_0) - Q_2 + D \sin(\omega t_0) - C \cos(\omega t_0),$$

где

$$Q_1 = \frac{4}{3} R^3 \frac{\omega^2}{v_0^2} K_1 \left( \frac{\omega}{v_0} b \right),$$

$$Q_2 = \frac{2}{3} R^3 \frac{\omega^2}{v_0^2} \left[ 2K_0 \left( \frac{\omega}{v_0} b \right) + \frac{v_0}{\omega b} K_1 \left( \frac{\omega}{v_0} b \right) \right],$$

$$A = \frac{4R^3}{b^2} \frac{v_0^2}{\omega^2 b^2} \left[ 1 - \frac{15}{2} \left( \frac{R^2}{b^2} - 1 \right) + 15 \frac{v_0^2}{\omega^2 b^2} \right],$$

$$B = \frac{4R^3}{b^2} \frac{v_0}{\omega b} \sqrt{\frac{R^2}{b^2} - 1} \left[ 1 - \frac{5}{2} \left( \frac{R^2}{b^2} - 1 \right) + 15 \frac{v_0^2}{\omega^2 b^2} \right],$$

$$D = \frac{2R^3}{b^2} \frac{v_0}{\omega b} \left[ 1 - \frac{7}{2} \left( \frac{R^2}{b^2} - 1 \right) + 7 \frac{v_0^2}{\omega^2 b^2} \right],$$

$$C = \frac{14R^3}{b^2} \frac{v_0^2}{\omega^2 b^2} \sqrt{\frac{R^2}{b^2} - 1},$$

$K_0(x)$  и  $K_1(x)$  — модифицированные функции Бесселя третьего рода (функции Макдональда).

Спектры излучения, рассчитанные по данным формулам, представлены на рис. 3. Подчеркнем, что условие (13) выполняется для гораздо более широкого интервала значений прицельного параметра, чем условие (16).

Угловое распределение интенсивности излучения, согласно (11), будет определяться балансом вкладов  $|I_x|^2$  и  $|I_z|^2$ . В области малых прицельных параметров определяющим будет вклад  $|I_z|^2$ , поэтому угловое распределение будет описываться функцией  $\varkappa_{\perp}^2 = \sin^2 \theta$ , где угол  $\theta$  отсчитывается от направления движения налетающей частицы (направления оси  $z$ , рис. 3, слева), с небольшими искажениями за счет вклада  $|I_x|^2$ . Вклад  $|I_x|^2$  в угловое распределение излучения описывается функцией  $1 - \varkappa_x^2$ , имеющей такую же геометрическую форму, но с осью симметрии, параллельной оси  $x$ . Соотношение величин  $|I_x|^2$  и  $|I_z|^2$  может быть различным в зависимости от значений параметров  $b$ ,  $R$ ,  $v_0$  и  $\omega$ . Вид углового распределения излучения при «скользящем» падении частицы на сферу при одном конкретном значении этих параметров показан на рис. 3, справа.

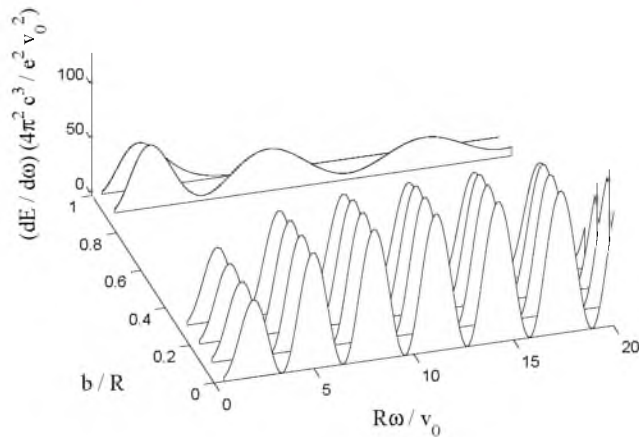


Рис. 3. Спектральная плотность переходного излучения при различных значениях прицельного параметра.

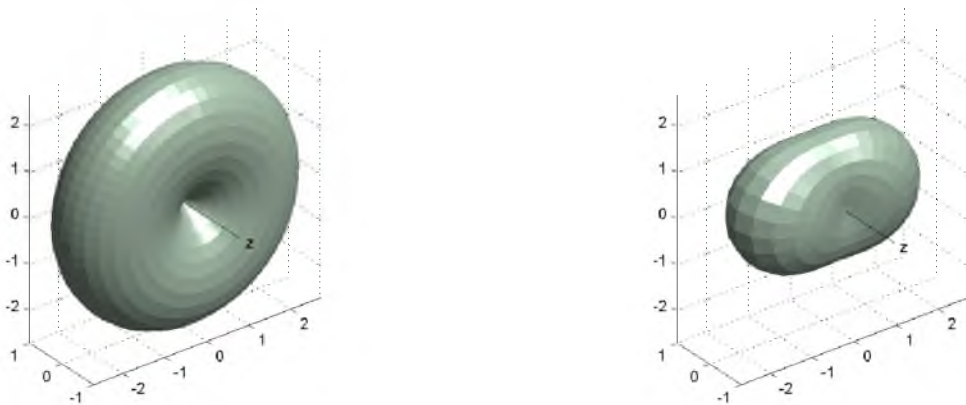


Рис. 4. Диаграмма направленности переходного излучения (безразмерная величина  $(dE/d\omega d\Omega)(4\pi^2c^3/c_0^2R^2\omega^2)$ ) для случаев  $b = 0$  (слева) и  $b = 0.9R$  (справа),  $R\omega/v_0 = 1$  в обоих случаях.

**Заключение.** В статье рассмотрено излучение, возникающее при прохождении равномерно и прямолинейно движущейся нерелятивистской заряженной частицы через идеально проводящую сферу. Найдены формулы, описывающие спектрально-угловую и спектральную плотности переходного излучения в области малых частот излучения (или больших длин волн, намного превышающих радиус сферы). Полученные результаты могут быть использованы при разработке новых методов мониторинга пучков заряженных частиц.



### Литература

1. Гинзбург В.Л., Цытович В.Н. Переходное излучение и переходное рассеяние (некоторые вопросы теории) / М.: Наука, 1984. – 360 с.
2. Левич В.Г. Курс теоретической физики. Т.1 / М.: Наука, 1969. – 912 с.
3. Гинзбург В.Л., Франк И.М. // ЖЭТФ. – 1946. – 16. – С.15.
4. Сыщенко В.В., Ларикова Э.А. Дифракционное излучение нерелятивистской заряженной частицы на идеально проводящей сфере // Belgorod State University Scientific Bulletin Mathematics & Physics. – 2013. – 26 (169); 33. – С.51-56.
5. Ахиезер А.И., Шульга Н.Ф. Электродинамика высоких энергий в веществе / М.: Наука, 1993. – 344 с.
6. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции (Формулы, графики, таблицы) / М.: Наука, 1968. – 344 с.

### DESCRIPTION OF CHARGED PARTICLE RADIATION ON IDEALLY CONDUCTING SPHERE BY THE METHOD OF IMAGES

V.V. Syshchenko, E.A. Larikova

Belgorod State National Research University,  
Studencheskya St., 14, Belgorod, 308007, Russia

**Abstract.** Radiation generated uniformly moving non-relativistic particle on ideally conducting sphere is under consideration. Formulae of transition radiation characteristics are obtained using the electrostatic images method.

**Key words:** transition radiation, method of images.