MSC 30E05

МУЛЬТИПЛИКАТИВНАЯ СТРУКТУРА РЕЗОЛЬВЕНТНЫХ МАТРИЦ УПОРЯДОЧЕННЫХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕВАНЛИННОВСКИХ ФУНКЦИЙ

Ю.М. Дюкарев

Белгородская государственная сельскохозяйственная академия им. В.Я. Горина,
ул. Вавилова, 1, Майский, Белгородский р-н, Белгородская обл., 308503, Россия,
e-mail: yu.dyukarev@karazin.ua

Аннотация. В этой статье исследована мультипликативная структура резольветных матриц упорядоченных интерполяционных задач для неванлинновских функций. Приведен алгоритм пошагового решения упорядоченных интерполяционных задач. Общие построения проиллюстрированы на примерах задачи Неванлинны-Пика и проблемы моментов Гамбургера.

Ключевые слова: неванлинновские функции, упорядоченные интерполяционные задачи, факторизация резольвентных матриц, пошаговое решение интерполяционных задач.

1. Введение. Интерполяционная задача Неванлинны-Пика впервые была рассмотрена в статьях [1]- [3]. Эти исследования были продолжены в работах многих авторов. Особо отметим статью [4], в которой впервые было получено разложение резольвентной матрицы в произведение матричных множителей Бляшке-Потапова. В статье [4] были использованы идеи и методы В.П. Потапова в мультипликативной теории J-растягивающих матриц-функций [5]. После статьи [4] появилось большое количество работ, в которых были исследованы мультипликативные структуры резольвентных матриц различных интерполяционных задач для неванлинновских функций и их аналогов (см., например, [6]- [9]). Современное состояние теории интерполяционных задач изложено в монографии [10].

В работах [8], [9], [11] были поставлены и решены обобщённые интерполяционные задачи, которые содержат в себе основные примеры интерполяционных задач для неванлинновских функций и их аналогов. Однако в этих построениях отсутствуют структуры, которые позволяют ввести в рассмотрение пошаговое решение интерполяционных задач, мультипликативные разложения резольвентных матриц, ортонормированные семейства функций и связанные с этими объектами проблемы теории интерполяции и ее приложений. Для включения этих вопросов в контекст интерполяционных задач в статьях [12], [13], [14] были введены упорядоченные последовательности обобщённых интерполяционных задач для неванлинновских и стилтьесовских функций. Основными результатами этой статьи являются мультипликативное разложение резольвентных матриц последовательности обобщённых интерполяционных задач для неванлинновских функций (теорема 2) и пошаговое решение упорядоченных обобщённых интерполяционных задач (теорема 3). В качестве примеров рассмотрены задача Неванлинны-Пика и проблема моментов Гамбургера.

2. Основные определения и обозначения. Для верхней и нижней полуплоскости введем обозначения $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ и $\mathbb{C}_- = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\}$ соответственно и пусть $\mathbb{C}_\pm = \mathbb{C}_+ \bigcup \mathbb{C}_-$. Через $\{\mathcal{H}, \mathcal{G}\}$ обозначим множество ограниченных линейных операторов, действующих из конечномерного гильбертова пространства $\mathcal{H}$ в сепарабельное гильбертово пространство $\mathcal{G}$, а через $\{\mathcal{G}\}$ обозначим множество ограниченных операторов в $\mathcal{G}$. Множество ограниченных эрмитовых операторов в $\mathcal{G}$ обозначим через $\{\mathcal{G}\}_H$. Эрмитов оператор $A \in \{\mathcal{G}\}_H$ называется неотрицательным, если $(f, Af) \geq 0$, $\forall f \in \mathcal{G}$. Множество неотрицательных операторов в $\mathcal{G}$ обозначим через $\{\mathcal{G}\}_\geq$. Неотрицательный оператор $A \in \{\mathcal{G}\}_\geq$ называется положительным, если он обратим и $A^{-1} \in \{\mathcal{G}\}$. Множество положительных операторов в $\mathcal{G}$ обозначим через $\{\mathcal{G}\}_>$. Для эрмитовых операторов $A, B \in \{\mathcal{G}\}_H$ неравенство $A \geq B$ (соотв. $A > B$) означает, что $A - B \in \{\mathcal{G}\}_\geq$ (соотв. $A - B \in \{\mathcal{G}\}_>$).

Тождественный и нулевой операторы в гильбертовом пространстве $\mathcal{G}$ обозначим через $I_\mathcal{G}$ и $O_\mathcal{G}$. Нулевой оператор, действующий из гильбертова пространства $\mathcal{G}_1$ в гильбертово пространство $\mathcal{G}_2$, обозначим через $O_{\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2}$. Для упрощения записи мы часто будем опускать нижние индексы у тождественного и нулевого операторов.

Пусть операторы $K \in \{\mathcal{G}\}_\geq$, $T \in \{\mathcal{G}\}$, $u, v \in \{\mathcal{H}, \mathcal{G}\}$ удовлетворяют Основному Тождеству (ОТ)

$$TK - KT^* = vu^* - uv^* \,. \tag{1}$$

И пусть, далее, оператор-функция (ОФ) $R_T(z) = (I_\mathcal{G} - zT)^{-1}$ мероморфна в $\mathbb{C}$. Множество особых точек ОФ $R_T(z)$ обозначим через $\mathcal{Z}$, а множество комплексно сопряжённых точек обозначим через $\overline{\mathcal{Z}} = \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in \mathcal{Z}\}$.

Определение 1. *ОФ $w : \mathbb{C}_+ \to \{\mathcal{H}\}$ называется неванлинновской, если она голоморфна в $\mathbb{C}_+$ и $\{w(z) - w^*(z)\}/2i \geq O_\mathcal{H}$, $\forall z \in \mathbb{C}_+$.*

Класс всех неванлинновских ОФ обозначим $\mathcal{R}$.

Определение 2. *Обобщённой интерполяционной задачей с масштабными пространствами $\mathcal{H}$ и $\mathcal{G}$ называется упорядоченный набор операторов*

$$\mathcal{P} = \{K, T, u, v\} \,, \tag{2}$$

удовлетворяющий ОТ (1).

ОФ $w \in \mathcal{R}$ называется решением интерполяционной задачи (2), *если она удовлетворяет следующему Основному Матричному Неравенству (ОМН) В.П. Потапова*

$$\begin{pmatrix} K & R_T(z)\,\{\,vw(z) - u\,\} \\ \{\,vw(z) - u\,\}^*\,R_T^*(z) & \{w(z) - w^*(z)\}/\{z - \bar{z}\} \end{pmatrix} \geq O_{\mathcal{G}\oplus\mathcal{H}}, \ z \in \mathbb{C}_+ \setminus \mathcal{Z}. \tag{3}$$

Типичными обобщёнными интерполяционными задачами для неванлинновских ОФ являются задача Неванлинны-Пика, задача Каратеодори, проблема моментов Гамбургера и другие интерполяционные задачи для неванлинновских функций (см. [4]- [6]). Современное состояние теории интерполяционных задач для неванлинновских функций имеется в монографии [10].

Определение 3. *Обобщённая интерполяционная задача $\mathcal{P} = \{K, T, u, v\}$ называется вполне неопределённой, если*

$$K \in \{\mathcal{G}\}_>, \qquad vh = 0 \Leftrightarrow h = 0 \,. \tag{4}$$

Далее в этой статье мы будем рассматривать только вполне неопределённые обобщённые интерполяционные задачи. Множество всех решений обобщённой интерполяционной задачи (2) обозначим через $\mathcal{F}$. Известно (см. [8]- [9]), что при сделанных предположениях множество $\mathcal{F}$ не пусто.

Пусть дана бесконечная последовательность гильбертовых пространств $\left\{\mathfrak{h}^{(j)}\right\}_{j=1}^{\infty}$. Рассмотрим ортогональные суммы этих пространств

$$\mathcal{G}^{(l)} = \mathfrak{h}^{(1)} \oplus \mathfrak{h}^{(2)} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{h}^{(l)} . \tag{5}$$

Каждое из пространств $\mathcal{G}^{(k)}$ можно рассматривать и как подпространство в любом пространстве $\mathcal{G}^{(l)}$ при $l > k$. Мы будем отождествлять векторы $(x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$ из $\mathcal{G}^{(l)}$ с векторами $(x_1, \ldots, x_k)$ из $\mathcal{G}^{(k)}$. Сужения операторов в пространстве $\mathcal{G}^{(l)}$ на подпространство $\mathcal{G}^{(k)}$ мы тоже будем отождествлять с операторами в пространстве $\mathcal{G}^{(k)}$.

Пусть теперь для всех $l \geq 1$ определены обобщённые вполне неопределённые интерполяционные задачи

$$\mathcal{P}^{(l)} = \{K^{(l)}, T^{(l)}, u^{(l)}, v^{(l)}\} \tag{6}$$

с масштабными пространствами $\mathcal{G}^{(l)}$, $\mathcal{H}$.

Пусть произвольные натуральные числа l и k удовлетворяют неравенствам $1 \leq k < l$. Рассмотрим ортогональное разложение масштабных пространств интерполяционной задачи (6)

$$\mathcal{G}^{(l)} = \mathcal{G}^{(k)} \oplus \left(\mathcal{G}^{(l)} \ominus \mathcal{G}^{(k)}\right). \tag{7}$$

Определение 4. *Пусть дана последовательность обобщённых интерполяционных задач (6) и матричные представления операторов интерполяционной задачи $\mathcal{P}^{(l)}$, построенные по разложению (7), имеют вид*

$$K^{(l)} = \begin{pmatrix} \tilde{K}^{(k)} & B^{(l,k)} \\ B^{(l,k)*} & C^{(l,k)} \end{pmatrix}, \quad T^{(l)} = \begin{pmatrix} \tilde{T}^{(k)} & O_{\mathcal{G}^{(l)}\ominus\mathcal{G}^{(k)}\mathcal{G}^{(k)}} \\ T_{21}^{(l,k)} & T_{22}^{(l,k)} \end{pmatrix},$$

$$v^{(l)} = \begin{pmatrix} \tilde{v}^{(k)} \\ \check{v}^{(l,k)} \end{pmatrix}, \quad u^{(l)} = \begin{pmatrix} \tilde{u}^{(k)} \\ \check{u}^{(l,k)} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Последовательность интерполяционных задач (6) называется упорядоченной, если операторы $\tilde{K}^{(k)}$, $\tilde{T}^{(k)}$, $\tilde{v}_1^{(k)}$, $\tilde{u}^{(k)}$, рассматриваемые как операторы в пространствах $\mathcal{G}^{(k)}$ и $\mathcal{H}$, совпадают с операторами $K^{(k)}$, $T^{(k)}$, $v^{(k)}$, $u^{(k)}$ интерполяционной задачи $\mathcal{P}^{(k)}$.

Для упрощения записи в формулах (8) мы будем обозначать $\tilde{K}^{(l)}$ через $K^{(l)}$ и т.д. Упорядоченную последовательность обобщённых интерполяционных задач обозначим через $\left\{\mathcal{P}^{(l)}\right\}_{l\in\mathbb{N}}$. В этом контексте обобщённые интерполяционные задачи $\mathcal{P}^{(l)}$ называются *усеченными интерполяционными задачами.* В обозначения объектов, связанных с усечённой задачей $\mathcal{P}^{(l)}$, введем верхний индекс (l). Имеют место включения $\mathcal{F}^{(l+1)} \subset \mathcal{F}^{(l)}$. Упорядоченные последовательности интерполяционных задач были введены для неванлинновских функций в статье [12], а для стилтьесовских функций – в статье [13].

Рассмотрим упорядоченную последовательность обобщённых интерполяционных задач $\{\mathcal{P}^{(l)}\}_{l\in\mathbb{N}}$. Резольвентной матрицей для усечённой задачи $\mathcal{P}^{(l)}$ называется

$$U^{(l)}(z)=\begin{pmatrix}\alpha^{(l)}(z) & \beta^{(l)}(z)\\ \gamma^{(l)}(z) & \delta^{(l)}(z)\end{pmatrix}=I_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}}+z\begin{pmatrix}v^{(l)^*}\\ u^{(l)^*}\end{pmatrix}R_{T^{(l)*}}(z)K^{(l)^{-1}}\begin{pmatrix}u^{(l)} & -v^{(l)}\end{pmatrix}. \qquad (9)$$

Пара мероморфных в $\mathbb{C}_+$ ОФ $\begin{pmatrix}p(z)\\ q(z)\end{pmatrix}$, принимающих значения в $\{\mathcal{H}\}$, называется неванлинновской, если

$$p(z)p^*(z)+q(z)q^*(z)>O,\quad i\big(-p^*(z)q(z)+q^*(z)p(z)\big)\geq O\,.$$

Две неванлинновские пары $\begin{pmatrix}p_1(z)\\ q_1(z)\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}p_2(z)\\ q_2(z)\end{pmatrix}$ называются эквивалентными, если существует мероморфная и мероморфно обратимая в $\mathbb{C}_+$ ОФ $Q(z)$ такая, что

$$\begin{pmatrix}p_1(z)\\ q_1(z)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_2(z)\\ q_2(z)\end{pmatrix}Q(z)\,.$$

Классы эквивалентности неванлинновских ОФ обозначим через $\overline{\mathcal{R}}$.

Теорема 1. *Пусть операторы $\alpha^{(l)}(z)$, $\beta^{(l)}$, $\gamma^{(l)}(z)$, $\delta^{(l)}(z)$ являются блоками резольвентной матрицы из представления* (9). *Тогда формула*

$$w(z)=\big(\gamma^{(l)}(z)p(z)+\delta^{(l)}(z)q(z)\big)\cdot\big(\alpha^{(l)}(z)p(z)+\beta^{(l)}(z)q(z)\big)^{-1} \qquad (10)$$

устанавливает биективное соответствие между $\mathcal{F}^{(l)}$ и $\overline{\mathcal{R}}$.

Доказательство этой теоремы имеется, например, в статьях [6], [8], [9].

3. Мультипликативная структура резольвентной матрицы. Пусть в представлении масштабных пространств (7) $k=l-1$. Тогда

$$\mathcal{G}^{(l)}=\mathcal{G}^{(l-1)}\oplus\mathfrak{h}^{(l)}\,,\qquad l\geq 2\,.$$

Для этого представления введем блочные обозначения для операторов

$$K^{(l)}=\begin{pmatrix}K^{(l-1)} & B^{(l)}\\ B^{(l)^*} & C^{(l)}\end{pmatrix},\quad v^{(l)}=\begin{pmatrix}v^{(l-1)}\\ \check{v}^{(l)}\end{pmatrix},\quad u^{(l)}=\begin{pmatrix}u^{(l-1)}\\ \check{u}^{(l)}\end{pmatrix}. \qquad (11)$$

И пусть подпространство $\mathcal{G}^{(l-1)}\subset\mathcal{G}^{(l)}$ является инвариантным для оператора $T^{(l)}\in\{\mathcal{G}^{(l)}\}$. Тогда имеют место представления

$$T^{(l)}=\begin{pmatrix}T^{(l-1)} & O\\ T^{(l)}_{21} & \widehat{T}^{(l)}\end{pmatrix},\quad R_{T^{(l)}}(z)=\begin{pmatrix}R_{T^{(l-1)}}(z) & O\\ zR_{\widehat{T}^{(l)}}(z)T^{(l)}_{21}R_{T^{(l-1)}}(z) & R_{\widehat{T}^{(l)}}(z)\end{pmatrix}. \qquad (12)$$

Здесь $R_{T^{(l)}}(z)=(I-zT^{(l)})^{-1}$, $\quad R_{T^{(l-1)}}(z)=(I-zT^{(l-1)})^{-1}$, $\quad R_{\widehat{T}^{(l)}}(z)=(I-z\widehat{T}^{(l)})^{-1}$.

Легко видеть, что выполнены равенства

$$K^{(l)} = \begin{pmatrix} I & O \\ B^{(l)^*} K^{(l-1)^{-1}} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^{(l-1)} & O \\ O & \widehat{K}^{(l)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & K^{(l-1)^{-1}} B^{(l)} \\ O & I \end{pmatrix} > O. \tag{13}$$

Здесь

$$\widehat{K}^{(l)} = C^{(l)} - B_r^{(l)^*} K^{(l-1)^{-1}} B^{(l)} > O, \quad l > 1.$$

Отсюда

$$K^{(l)^{-1}} = \begin{pmatrix} K^{(l-1)^{-1}} & O \\ O & O \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -K^{(l-1)^{-1}} B^{(l)} \\ I \end{pmatrix} \widehat{K}^{(l)^{-1}} \begin{pmatrix} -B^{(l)^*} K^{(l-1)^{-1}} & I \end{pmatrix}. \tag{14}$$

И пусть, далее,

$$\widehat{v}^{(l)} = -B^{(l)^*} K^{(l-1)^{-1}} v^{(l-1)} + \check{v}^{(l)}, \quad \widehat{u}^{(l)} = -B^{(l)^*} K^{(l-1)^{-1}} u^{(l-1)} + \check{u}^{(l)}, \quad l > 1. \tag{15}$$

Подставим в ОТ (1) блочные представления (11) - (13). Получим

$$\begin{pmatrix} T^{(l-1)} & O \\ T_{21}^{(l)} & \widehat{T}^{(l)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & O \\ B^{(l)^*} K^{(l-1)^{-1}} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^{(l-1)} & O \\ O & \widehat{K}^{(l)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & K^{(l-1)^{-1}} B^{(l)} \\ O & I \end{pmatrix}$$
$$- \begin{pmatrix} I & O \\ B^{(l)^*} K^{(l-1)^{-1}} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^{(l-1)} & O \\ O & \widehat{K}^{(l)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & K^{(l-1)^{-1}} B^{(l)} \\ O & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{(l-1)^*} & T_{21}^{(l)^*} \\ O & \widehat{T}^{(l)^*} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} v^{(l-1)} \\ \check{v}^{(l)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{(l-1)^*} & \check{u}^{(l)^*} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u^{(l-1)} \\ \check{u}^{(l)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^{(l-1)^*} & \check{v}^{(l)^*} \end{pmatrix}.$$

Умножим это равенство слева и справа соответственно на операторы

$$\begin{pmatrix} I & O \\ -B^{(l)^*} K^{(l-1)^{-1}} & I \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} I & -K^{(l-1)^{-1}} B^{(l)} \\ O & I \end{pmatrix}.$$

С учётом (15) получим

$$\begin{pmatrix} I & O \\ -B^{(l)^*} K^{(l-1)^{-1}} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{(l-1)} & O \\ T_{21}^{(l)} & \widehat{T}^{(l)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & O \\ B^{(l)^*} K^{(l-1)^{-1}} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^{(l-1)} & O \\ O & \widehat{K}^{(l)} \end{pmatrix}$$
$$- \begin{pmatrix} K^{(l-1)} & O \\ O & \widehat{K}^{(l)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & K^{(l-1)^{-1}} B^{(l)} \\ O & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{(l-1)^*} & T_{21}^{(l)^*} \\ O & \widehat{T}^{(l)^*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & K^{(l-1)^{-1}} B^{(l)} \\ O & I \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} v^{(l-1)} \\ \widehat{v}^{(l)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{(l-1)^*} & \widehat{u}^{(l)^*} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u^{(l-1)} \\ \widehat{u}^{(l)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^{(l-1)^*} & \widehat{v}^{(l)^*} \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{pmatrix} T^{(l-1)} & O \\ Y^{(l)} & \widehat{T}^{(l)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^{(l-1)} & O \\ O & \widehat{K}^{(l)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} K^{(l-1)} & O \\ O & \widehat{K}^{(l)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{(l-1)^*} & Y^{(l)^*} \\ O & \widehat{T}^{(l)^*} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} v^{(l-1)} u^{(l-1)^*} & v^{(l-1)} \widehat{u}^{(l)^*} \\ \widehat{v}^{(l)} u^{(l-1)^*} & \widehat{v}^{(l)} \widehat{u}^{(l)^*} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u^{(l-1)} v^{(l-1)^*} & u^{(l-1)} \widehat{v}^{(l)^*} \\ \widehat{u}^{(l)} v^{(l-1)^*} & \widehat{u}^{(l)} \widehat{v}^{(l)^*} \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Здесь

$$Y^{(l)} = -B^{(l)^*} K^{(l-1)^{-1}} T^{(l-1)} + T_{21}^{(l)} + \widehat{T}^{(l)} B^{(l)^*} K^{(l-1)^{-1}}. \tag{17}$$

Рассмотрим ОФ

$$\begin{aligned} b^{(1)}(z) &= U^{(1)}(z), \\ b^{(l)}(z) &= I_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} + z \begin{pmatrix} \widehat{v}^{(l)^*} \\ \widehat{u}^{(l)^*} \end{pmatrix} R_{\widehat{T}^{(l)^*}}(z) \widehat{K}^{(l)^{-1}} \begin{pmatrix} \widehat{u}^{(l)} & -\widehat{v}^{(l)} \end{pmatrix}, \ l > 1. \end{aligned} \tag{18}$$

Теорема 2. *Пусть дана упорядоченная последовательность обобщённых вполне неопределённых интерполяционных задач для неванлиниовских функций* $(\mathcal{P}^{(l)})_{l=1}^{\infty}$ *и для всех* $l \geq 2$ *подпространства* $\mathcal{G}^{(l-1)} \subset \mathcal{G}^{(l)}$ *являются инвариантными для операторов* $T^{(l)} \in \{\mathcal{G}^{(l)}\}$. *Тогда резольвентные матрицы* (9) *допускают представления*

$$U^{(l)}(z) = b^{(1)}(z) \cdot b^{(2)}(z) \cdot \ldots \cdot b^{(l)}(z), \qquad l \geq 1. \tag{19}$$

Здесь ОФ $b^{(l)}(z)$ *определены формулами* (18).

□ Доказательство формул (19) проведем индукцией по l. При $l = 1$ формула (19) очевидна. Пусть формулы (19) выполнены для всех $l < n$. Тогда для $l = n$ имеем

$$\begin{aligned} U^{(l)}(z) &= I + z \begin{pmatrix} v^{(l)^*} \\ u^{(l)^*} \end{pmatrix} R_{T^{(l)^*}}(z) K^{(l)^{-1}} \begin{pmatrix} u^{(l)} & -v^{(l)} \end{pmatrix} \\ &= I + z \begin{pmatrix} v^{(l)^*} \\ u^{(l)^*} \end{pmatrix} R_{T^{(l)^*}}(z) \begin{pmatrix} K^{(l-1)^{-1}} & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{(l-1)} & -v^{(l-1)} \\ \check{u}^{(l)} & -\check{v}^{(l)} \end{pmatrix} \\ &+ z \begin{pmatrix} v^{(l)^*} \\ u^{(l)^*} \end{pmatrix} R_{T^{(l)^*}}(z) \begin{pmatrix} -K^{(l-1)^{-1}} B^{(l)} \\ I \end{pmatrix} \widehat{K}^{(l)^{-1}} \begin{pmatrix} -B^{(l)^*} K^{(l-1)^{-1}} & I \end{pmatrix} \\ &\qquad \times \begin{pmatrix} u^{(l-1)} & -v^{(l-1)} \\ \check{u}^{(l)} & -\check{v}^{(l)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= I + z \begin{pmatrix} v^{(l)^*} \\ u^{(l)^*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{T^{(l-1)^*}}(z) & z R_{T^{(l-1)^*}}(z) T_{21}^{(l)^*} R_{\widehat{T}^{(l)^*}}(z) \\ O & R_{\widehat{T}^{(l)^*}}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^{(l-1)^{-1}} \\ O \end{pmatrix} \\ &\qquad \times \begin{pmatrix} u^{(l-1)} & -v^{(l-1)} \end{pmatrix} \\ &+ z \begin{pmatrix} v^{(l)^*} \\ u^{(l)^*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{T^{(l-1)^*}}(z) & z R_{T^{(l-1)^*}}(z) T_{21}^{(l)^*} R_{\widehat{T}^{(l)^*}}(z) \\ O & R_{\widehat{T}^{(l)^*}}(z) \end{pmatrix} \\ &\qquad \times \begin{pmatrix} -K^{(l-1)^{-1}} B^{(l)} \\ I \end{pmatrix} \widehat{K}^{(l)^{-1}} \begin{pmatrix} \widehat{u}^{(l-1)} & -\widehat{v}^{(l-1)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= I + z \begin{pmatrix} v^{(l-1)^*} & \check{v}^{(l)^*} \\ u^{(l-1)^*} & \check{u}^{(l)^*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{T^{(l-1)^*}}(z) K^{(l-1)^{-1}} \\ O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{(l-1)} & -v^{(l-1)} \end{pmatrix} \\ &+ z \begin{pmatrix} v^{(l)^*} \\ u^{(l)^*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{T^{(l-1)^*}}(z) & z R_{T^{(l-1)^*}}(z) T_{21}^{(l)^*} R_{\widehat{T}^{(l)^*}}(z) \\ O & R_{\widehat{T}^{(l)^*}}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -K^{(l-1)^{-1}} B^{(l)} \\ I \end{pmatrix} \\ &\qquad \times \widehat{K}^{(l)^{-1}} \begin{pmatrix} \widehat{u}^{(l-1)} & -\widehat{v}^{(l-1)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= U^{(l-1)}(z) + z \begin{pmatrix} v^{(l-1)^*} & \check{v}^{(l)^*} \\ u^{(l-1)^*} & \check{u}^{(l)^*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{T^{(l-1)^*}}(z) & zR_{T^{(l-1)^*}}(z)T_{21}^{(l)^*} R_{\widehat{T}^{(l)^*}}(z) \\ O & R_{\widehat{T}^{(l)^*}}(z) \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} -K^{(l-1)^{-1}} B^{(l)} \\ I \end{pmatrix} \widehat{K}^{(l)^{-1}} \begin{pmatrix} \widehat{u}^{(l-1)} & -\widehat{v}^{(l-1)} \end{pmatrix}$$

$$= U^{(l-1)}(z) + z \begin{pmatrix} v^{(l-1)^*} & \check{v}^{(l)^*} \\ u^{(l-1)^*} & \check{u}^{(l)^*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{T^{(l-1)^*}}(z) & zR_{T^{(l-1)^*}}(z)T_{21}^{(l)^*} R_{\widehat{T}^{(l)^*}}(z) \\ O & O \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} -K^{(l-1)^{-1}} B^{(l)} \\ I \end{pmatrix} \widehat{K}^{(l)^{-1}} \begin{pmatrix} \widehat{u}^{(l-1)} & -\widehat{v}^{(l-1)} \end{pmatrix}$$

$$+ z \begin{pmatrix} v^{(l-1)^*} & \check{v}^{(l)^*} \\ u^{(l-1)^*} & \check{u}^{(l)^*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & O \\ O & R_{\widehat{T}^{(l)^*}}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -K^{(l-1)^{-1}} B^{(l)} \\ I \end{pmatrix} \widehat{K}^{(l)^{-1}} \begin{pmatrix} \widehat{u}^{(l-1)} & -\widehat{v}^{(l-1)} \end{pmatrix}$$

$$= U^{(l-1)}(z) + z \begin{pmatrix} v^{(l-1)^*} \\ u^{(l-1)^*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{T^{(l-1)^*}}(z) & zR_{T^{(l-1)^*}}(z)T_{21}^{(l)^*} R_{\widehat{T}^{(l)^*}}(z) \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} -K^{(l-1)^{-1}} B^{(l)} \\ I \end{pmatrix} \widehat{K}^{(l)^{-1}} \begin{pmatrix} \widehat{u}^{(l-1)} & -\widehat{v}^{(l-1)} \end{pmatrix}$$

$$+ z \begin{pmatrix} \check{v}^{(l)^*} \\ \check{u}^{(l)^*} \end{pmatrix} R_{\widehat{T}^{(l)^*}}(z) \widehat{K}^{(l)^{-1}} \begin{pmatrix} \widehat{u}^{(l-1)} & -\widehat{v}^{(l-1)} \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$U^{(l)}(z) = U^{(l-1)}(z) + z \begin{pmatrix} v^{(l-1)^*} \\ u^{(l-1)^*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{T^{(l-1)^*}}(z) & zR_{T^{(l-1)^*}}(z)T_{21}^{(l)^*} R_{\widehat{T}^{(l)^*}}(z) \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} -K^{(l-1)^{-1}} B^{(l)} \\ I \end{pmatrix} \widehat{K}^{(l)^{-1}} \begin{pmatrix} \widehat{u}^{(l-1)} & -\widehat{v}^{(l-1)} \end{pmatrix}$$

$$+ z \begin{pmatrix} \check{v}^{(l)^*} \\ \check{u}^{(l)^*} \end{pmatrix} R_{\widehat{T}^{(l)^*}}(z) \widehat{K}^{(l)^{-1}} \begin{pmatrix} \widehat{u}^{(l-1)} & -\widehat{v}^{(l-1)} \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Далее имеем

$$U^{(l-1)}(z) b^{(l)}(z) = U^{(l-1)}(z)$$

$$\times \left\{ \begin{pmatrix} I & O \\ O & I \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \widehat{v}^{(l)^*} R_{\widehat{T}^{(l)^*}}(z) \widehat{K}^{(l)^{-1}} \widehat{u}^{(l)} & -\widehat{v}^{(l)^*} R_{\widehat{T}^{(l)^*}}(z) \widehat{K}^{(l)^{-1}} \widehat{v}^{(l)} \\ \widehat{u}^{(l)^*} R_{\widehat{T}^{(l)^*}}(z) \widehat{K}^{(l)^{-1}} \widehat{u}^{(l)} & -\widehat{u}^{(l)^*} R_{\widehat{T}^{(l)^*}}(z) \widehat{K}^{(l)^{-1}} \widehat{v}^{(l)} \end{pmatrix} \right\}$$

$$= U^{(l-1)}(z) + z U^{(l-1)}(z) \begin{pmatrix} \widehat{v}^{(l)^*} R_{\widehat{T}^{(l)^*}}(z) \widehat{K}^{(l)^{-1}} \widehat{u}^{(l)} & -\widehat{v}^{(l)^*} R_{\widehat{T}^{(l)^*}}(z) \widehat{K}^{(l)^{-1}} \widehat{v}^{(l)} \\ \widehat{u}^{(l)^*} R_{\widehat{T}^{(l)^*}}(z) \widehat{K}^{(l)^{-1}} \widehat{u}^{(l)} & -\widehat{u}^{(l)^*} R_{\widehat{T}^{(l)^*}}(z) \widehat{K}^{(l)^{-1}} \widehat{v}^{(l)} \end{pmatrix}$$

$$= U^{(l-1)}(z) + z \begin{pmatrix} \widehat{v}^{(l)^*} R_{\widehat{T}^{(l)^*}}(z) \widehat{K}^{(l)^{-1}} \widehat{u}^{(l)} & -\widehat{v}^{(l)^*} R_{\widehat{T}^{(l)^*}}(z) \widehat{K}^{(l)^{-1}} \widehat{v}^{(l)} \\ \widehat{u}^{(l)^*} R_{\widehat{T}^{(l)^*}}(z) \widehat{K}^{(l)^{-1}} \widehat{u}^{(l)} & -\widehat{u}^{(l)^*} R_{\widehat{T}^{(l)^*}}(z) \widehat{K}^{(l)^{-1}} \widehat{v}^{(l)} \end{pmatrix}$$

$$+ z^2 \begin{pmatrix} v^{(l-1)^*} R_{T^{(l-1)^*}}(z) K^{(l-1)^{-1}} u^{(l-1)} & -v^{(l-1)^*} R_{T^{(l-1)^*}}(z) K^{(l-1)^{-1}} v^{(l-1)} \\ u^{(l-1)^*} R_{T^{(l-1)^*}}(z) K^{(l-1)^{-1}} u^{(l-1)} & -u^{(l-1)^*} R_{T^{(l-1)^*}}(z) K^{(l-1)^{-1}} v^{(l-1)} \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} \widehat{v}^{(l)^*} R_{\widehat{T}^{(l)^*}}(z) \widehat{K}^{(l)^{-1}} \widehat{u}^{(l)} & -\widehat{v}^{(l)^*} R_{\widehat{T}^{(l)^*}}(z) \widehat{K}^{(l)^{-1}} \widehat{v}^{(l)} \\ \widehat{u}^{(l)^*} R_{\widehat{T}^{(l)^*}}(z) \widehat{K}^{(l)^{-1}} \widehat{u}^{(l)} & -\widehat{u}^{(l)^*} R_{\widehat{T}^{(l)^*}}(z) \widehat{K}^{(l)^{-1}} \widehat{v}^{(l)} \end{pmatrix}$$

$$
= U^{(l-1)}(z) + z \begin{pmatrix} \widehat{v}^{(l)^*} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z)\widehat{K}^{(l)^{-1}}\widehat{u}^{(l)} & -\widehat{v}^{(l)^*} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z)\widehat{K}^{(l)^{-1}}\widehat{v}^{(l)} \\ \widehat{u}^{(l)^*} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z)\widehat{K}^{(l)^{-1}}\widehat{u}^{(l)} & -\widehat{u}^{(l)^*} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z)\widehat{K}^{(l)^{-1}}\widehat{v}^{(l)} \end{pmatrix}
$$

$$
+ z^2 \begin{pmatrix} v^{(l-1)^*} R_{T^{(l-1)*}}(z)K^{(l-1)^{-1}} & O \\ O & u^{(l-1)^*} R_{T^{(l-1)*}}(z)K^{(l-1)^{-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{(l-1)} & -v^{(l-1)} \\ u^{(l-1)} & -v^{(l-1)} \end{pmatrix}
$$

$$
\times \begin{pmatrix} \widehat{v}^{(l)^*} & -\widehat{v}^{(l)^*} \\ \widehat{u}^{(l)^*} & -\widehat{u}^{(l)^*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z)\widehat{K}^{(l)^{-1}}\widehat{u}^{(l)} & O \\ O & R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z)\widehat{K}^{(l)^{-1}}\widehat{v}^{(l)} \end{pmatrix}
$$

$$
= U^{(l-1)}(z) + z \begin{pmatrix} \widehat{v}^{(l)^*} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z)\widehat{K}^{(l)^{-1}}\widehat{u}^{(l)} & -\widehat{v}^{(l)^*} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z)\widehat{K}^{(l)^{-1}}\widehat{v}^{(l)} \\ \widehat{u}^{(l)^*} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z)\widehat{K}^{(l)^{-1}}\widehat{u}^{(l)} & -\widehat{u}^{(l)^*} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z)\widehat{K}^{(l)^{-1}}\widehat{v}^{(l)} \end{pmatrix}
$$

$$
+ z^2 \begin{pmatrix} v^{(l-1)^*} R_{T^{(l-1)*}}(z)K^{(l-1)^{-1}} & O \\ O & u^{(l-1)^*} R_{T^{(l-1)*}}(z)K^{(l-1)^{-1}} \end{pmatrix}
$$

$$
\times \begin{pmatrix} u^{(l-1)}\widehat{v}^{(l)^*} - v^{(l-1)}\widehat{u}^{(l)^*} & -u^{(l-1)}\widehat{v}^{(l)^*} + v^{(l-1)}\widehat{u}^{(l)^*} \\ u^{(l-1)}\widehat{v}^{(l)^*} - v^{(l-1)}\widehat{u}^{(l)^*} & -u^{(l-1)}\widehat{v}^{(l)^*} + v^{(l-1)}\widehat{u}^{(l)^*} \end{pmatrix}
$$

$$
\times \begin{pmatrix} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z)\widehat{K}^{(l)^{-1}}\widehat{u}^{(l)} & O \\ O & R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z)\widehat{K}^{(l)^{-1}}\widehat{v}^{(l)} \end{pmatrix}
$$

$$
= U^{(l-1)}(z) + z \begin{pmatrix} \widehat{v}^{(l)^*} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z)\widehat{K}^{(l)^{-1}}\widehat{u}^{(l)} & -\widehat{v}^{(l)^*} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z)\widehat{K}^{(l)^{-1}}\widehat{v}^{(l)} \\ \widehat{u}^{(l)^*} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z)\widehat{K}^{(l)^{-1}}\widehat{u}^{(l)} & -\widehat{u}^{(l)^*} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z)\widehat{K}^{(l)^{-1}}\widehat{v}^{(l)} \end{pmatrix}
$$

$$
+ z^2 \begin{pmatrix} v^{(l-1)^*} R_{T^{(l-1)*}}(z)K^{(l-1)^{-1}} & O \\ O & u^{(l-1)^*} R_{T^{(l-1)*}}(z)K^{(l-1)^{-1}} \end{pmatrix}
$$

$$
\times \begin{pmatrix} K^{(l-1)}Y^{(l)^*} & -K^{(l-1)}Y^{(l)^*} \\ K^{(l-1)}Y^{(l)^*} & -K^{(l-1)}Y^{(l)^*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z)\widehat{K}^{(l)^{-1}}\widehat{u}^{(l)} & O \\ O & R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z)\widehat{K}^{(l)^{-1}}\widehat{v}^{(l)} \end{pmatrix}
$$

$$
= U^{(l-1)}(z) + z \begin{pmatrix} \widehat{v}^{(l)^*} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z)\widehat{K}^{(l)^{-1}}\widehat{u}^{(l)} & -\widehat{v}^{(l)^*} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z)\widehat{K}^{(l)^{-1}}\widehat{v}^{(l)} \\ \widehat{u}^{(l)^*} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z)\widehat{K}^{(l)^{-1}}\widehat{u}^{(l)} & -\widehat{u}^{(l)^*} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z)\widehat{K}^{(l)^{-1}}\widehat{v}^{(l)} \end{pmatrix}
$$

$$
+ z^2 \begin{pmatrix} v^{(l-1)^*} R_{T^{(l-1)*}}(z) & O \\ O & u^{(l-1)^*} R_{T^{(l-1)*}}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ I \end{pmatrix} Y^{(l)^*} \begin{pmatrix} I & -I \end{pmatrix}
$$

$$
\times \begin{pmatrix} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z)\widehat{K}^{(l)^{-1}}\widehat{u}^{(l)} & O \\ O & R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z)\widehat{K}^{(l)^{-1}}\widehat{v}^{(l)} \end{pmatrix}
$$

$$
= U^{(l-1)}(z) + z \begin{pmatrix} \widehat{v}^{(l)^*} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z)\widehat{K}^{(l)^{-1}}\widehat{u}^{(l)} & -\widehat{v}^{(l)^*} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z)\widehat{K}^{(l)^{-1}}\widehat{v}^{(l)} \\ \widehat{u}^{(l)^*} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z)\widehat{K}^{(l)^{-1}}\widehat{u}^{(l)} & -\widehat{u}^{(l)^*} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z)\widehat{K}^{(l)^{-1}}\widehat{v}^{(l)} \end{pmatrix}
$$

$$
+ z^2 \begin{pmatrix} v^{(l-1)^*} R_{T^{(l-1)*}}(z) \\ u^{(l-1)^*} R_{T^{(l-1)*}}(z) \end{pmatrix} Y^{(l)^*} \begin{pmatrix} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z)\widehat{K}^{(l)^{-1}}\widehat{u}^{(l)} & -R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z)\widehat{K}^{(l)^{-1}}\widehat{v}^{(l)} \end{pmatrix}.
$$

Здесь шестое равенство следует из (16). Таким образом,

$$
U^{(l-1)}(z)b^{(l)}(z) = U^{(l-1)}(z) + z \begin{pmatrix} \widehat{v}^{(l)^*} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z)\widehat{K}^{(l)^{-1}}\widehat{u}^{(l)} & -\widehat{v}^{(l)^*} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z)\widehat{K}^{(l)^{-1}}\widehat{v}^{(l)} \\ \widehat{u}^{(l)^*} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z)\widehat{K}^{(l)^{-1}}\widehat{u}^{(l)} & -\widehat{u}^{(l)^*} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z)\widehat{K}^{(l)^{-1}}\widehat{v}^{(l)} \end{pmatrix} +
$$

$$+ z^2 \begin{pmatrix} v^{(l-1)^*} R_{T^{(l-1)^*}}(z) \\ u^{(l-1)^*} R_{T^{(l-1)^*}}(z) \end{pmatrix} Y^{(l)^*} \begin{pmatrix} R_{\widehat{T}^{(l)^*}}(z)\widehat{K}^{(l)^{-1}}\widehat{u}^{(l)} & -R_{\widehat{T}^{(l)^*}}(z)\widehat{K}^{(l)^{-1}}\widehat{v}^{(l)} \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Из формул (20) и (21) имеем

$$U^{(l-1)}(z)b_l(z) - U^{(l)}(z) = U^{(l-1)}(z) + z\begin{pmatrix} \widehat{v}^{(l)^*} \\ \widehat{u}^{(l)^*} \end{pmatrix} R_{\widehat{T}^{(l)^*}}(z)\widehat{K}^{(l)^{-1}} \begin{pmatrix} \widehat{u}^{(l-1)} & -\widehat{v}^{(l-1)} \end{pmatrix}$$

$$+ z^2 \begin{pmatrix} v^{(l-1)^*} \\ u^{(l-1)^*} \end{pmatrix} R_{T^{(l-1)^*}}(z) Y^{(l)^*} R_{\widehat{T}^{(l)^*}}(z)\widehat{K}^{(l)^{-1}} \begin{pmatrix} \widehat{u}^{(l)} & -\widehat{v}^{(l)} \end{pmatrix}$$

$$- U^{(l-1)}(z) - z\begin{pmatrix} v^{(l-1)^*} \\ u^{(l-1)^*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{T^{(l-1)^*}}(z) & zR_{T^{(l-1)^*}}(z)T_{21}^{(l)^*}R_{\widehat{T}^{(l)^*}}(z) \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} -K^{(l-1)^{-1}}B^{(l)} \\ I \end{pmatrix} \widehat{K}^{(l)^{-1}} \begin{pmatrix} \widehat{u}^{(l-1)} & -\widehat{v}^{(l-1)} \end{pmatrix}$$

$$- z\begin{pmatrix} \check{v}^{(l)^*} \\ \check{u}^{(l)^*} \end{pmatrix} R_{\widehat{T}^{(l)^*}}(z)\widehat{K}^{(l)^{-1}} \begin{pmatrix} \widehat{u}^{(l-1)} & -\widehat{v}^{(l-1)} \end{pmatrix}$$

$$= z\begin{pmatrix} \widehat{v}^{(l)^*} - \check{v}^{(l)^*} \\ \widehat{u}^{(l)^*} - \check{u}^{(l)^*} \end{pmatrix} R_{\widehat{T}^{(l)^*}}(z)\widehat{K}^{(l)^{-1}} \begin{pmatrix} \widehat{u}^{(l-1)} & -\widehat{v}^{(l-1)} \end{pmatrix}$$

$$+ z^2 \begin{pmatrix} v^{(l-1)^*} \\ u^{(l-1)^*} \end{pmatrix} R_{T^{(l-1)^*}}(z) Y^{(l)^*} R_{\widehat{T}^{(l)^*}}(z)\widehat{K}^{(l)^{-1}} \begin{pmatrix} \widehat{u}^{(l)} & -\widehat{v}^{(l)} \end{pmatrix}$$

$$- z\begin{pmatrix} v^{(l-1)^*} \\ u^{(l-1)^*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{T^{(l-1)^*}}(z) & zR_{T^{(l-1)^*}}(z)T_{21}^{(l)^*}R_{\widehat{T}^{(l)^*}}(z) \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} -K^{(l-1)^{-1}}B^{(l)} \\ I \end{pmatrix} \widehat{K}^{(l)^{-1}} \begin{pmatrix} \widehat{u}^{(l-1)} & -\widehat{v}^{(l-1)} \end{pmatrix}$$

$$= -z\begin{pmatrix} v^{(l-1)^*} \\ u^{(l-1)^*} \end{pmatrix} K^{(l-1)^{-1}}B^{(l)} R_{\widehat{T}^{(l)^*}}(z)\widehat{K}^{(l)^{-1}} \begin{pmatrix} \widehat{u}^{(l-1)} & -\widehat{v}^{(l-1)} \end{pmatrix}$$

$$+ z^2 \begin{pmatrix} v^{(l-1)^*} \\ u^{(l-1)^*} \end{pmatrix} R_{T^{(l-1)^*}}(z) Y^{(l)^*} R_{\widehat{T}^{(l)^*}}(z)\widehat{K}^{(l)^{-1}} \begin{pmatrix} \widehat{u}^{(l)} & -\widehat{v}^{(l)} \end{pmatrix}$$

$$- z\begin{pmatrix} v^{(l-1)^*} \\ u^{(l-1)^*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{T^{(l-1)^*}}(z) & zR_{T^{(l-1)^*}}(z)T_{21}^{(l)^*}R_{\widehat{T}^{(l)^*}}(z) \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} -K^{(l-1)^{-1}}B^{(l)} \\ I \end{pmatrix} \widehat{K}^{(l)^{-1}} \begin{pmatrix} \widehat{u}^{(l-1)} & -\widehat{v}^{(l-1)} \end{pmatrix}$$

$$= -z\begin{pmatrix} v^{(l-1)^*} \\ u^{(l-1)^*} \end{pmatrix} R_{T^{(l-1)^*}}(z)$$

$$\times \left\{ R^{(-1)}_{T^{(l-1)^*}}(z)K^{(l-1)^{-1}}B^{(l)} - zY^{(l)^*} + \begin{pmatrix} I & zT_{21}^{(l)^*}R_{\widehat{T}^{(l)^*}}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -K^{(l-1)^{-1}}B^{(l)} \\ I \end{pmatrix} R^{-1}_{\widehat{T}^{(l)^*}}(z) \right\}$$

$$\times R_{\widehat{T}^{(l)^*}}(z)\widehat{K}^{(l)^{-1}} \begin{pmatrix} \widehat{u}^{(l-1)} & -\widehat{v}^{(l-1)} \end{pmatrix}$$

$$= -z\begin{pmatrix} v^{(l-1)^*} \\ u^{(l-1)^*} \end{pmatrix} R_{T^{(l-1)^*}}(z)$$

$$\times \Big\{(I - zT^{(l-1)^*})K^{(l-1)^{-1}}B^{(l)} - z\Big(-T^{(l-1)^*}K^{(l-1)^{-1}}B^{(l)} + T_{21}^{(l)^*} + K^{(l-1)^{-1}}B^{(l)}\widehat{T}^{(l)^*}\Big)$$
$$- K^{(l-1)^{-1}}B^{(l)}(I - z\widehat{T}^{(l)^*}) + zT_{21}^{(l)^*}\Big\}R_{\widehat{T}^{(l)^*}}(z)\widehat{K}^{(l)^{-1}} \begin{pmatrix} \widehat{u}^{(l-1)} & -\widehat{v}^{(l-1)} \end{pmatrix}$$
$$= -z\begin{pmatrix} v^{(l-1)^*} \\ u^{(l-1)^*} \end{pmatrix} R_{T^{(l-1)^*}}(z)$$
$$\times \Big\{K^{(l-1)^{-1}}B^{(l)} - zT^{(l-1)^*}K^{(l-1)^{-1}}B^{(l)} + zT^{(l-1)^*}K^{(l-1)^{-1}}B^{(l)} - zT_{21}^{(l)^*} - zK^{(l-1)^{-1}}B^{(l)}\widehat{T}^{(l)^*}$$
$$- K^{(l-1)^{-1}}B^{(l)} + zK^{(l-1)^{-1}}B^{(l)}\widehat{T}^{(l)^*} + zT_{21}^{(l)^*}\Big\}R_{\widehat{T}^{(l)^*}}(z)\widehat{K}^{(l)^{-1}} \begin{pmatrix} \widehat{u}^{(l-1)} & -\widehat{v}^{(l-1)} \end{pmatrix} = O.$$

Здесь третье равенство следует из (15). Следовательно, $U^{(l)}(z) = U^{(l-1)}(z)b_l(z)$. Отсюда и из предположения индукции вытекает формула (19). ■

Сравнивая 22-блоки в левой и правой части (16) получим индуцированные ОТ

$$\widehat{T}^{(l)}\widehat{K}^{(l)} - \widehat{K}^{(l)}\widehat{T}^{(l)^*} = \widehat{v}^{(l)}\widehat{u}^{(l)^*} - \widehat{u}^{(l)}\widehat{v}^{(l)^*}, \quad l > 1. \tag{22}$$

Отсюда и из неравенства $\widehat{K}^{(l)} > O$ следует, что для всех $l > 1$ определены обобщённые интерполяционные задачи

$$\widehat{\mathcal{P}}^{(l)} = \{\widehat{K}^{(l)},\ \widehat{T}^{(l)},\ \widehat{u}^{(l)},\ \widehat{v}^{(l)}\} \tag{23}$$

с масштабными пространствами $\widehat{\mathcal{G}}^{(l)}$, $\mathcal{H}$. Будем считать, что $\widehat{v}^{(l)}h = 0 \Leftrightarrow h = 0$. Тогда все задачи (23) являются вполне неопределёнными.

ОФ $b^{(l)}(z)$, $l > 1$ являются резольвентными матрицами для вполне неопределённых задач (23) и ОФ $b^{(1)}(z) = U^{(1)}(z)$ является резольвентной матрицей для вполне неопределённой задачи $\mathcal{P}^{(1)} = \{K^{(1)}, T^{(1)}, u^{(1)}, v^{(1)}\}$. По теореме 1 при всех $l \geq 1$ корректно определены дробно-линейные преобразования

$$b^{(l)}(z)\big\{p(z), q(z)\big\} = \big(c^{(l)}(z)p(z) + d^{(l)}(z)q(z)\big)\cdot\big(a^{(l)}(z)p(z) + b(l)(z)q(z)\big)^{-1}$$

над произвольной неванлинновской парой $\binom{p(z)}{q(z)}$. Здесь введены естественные блочные представления

$$b^{(l)}(z) = \begin{pmatrix} a^{(l)}(z) & b^{(l)}(z) \\ c^{(l)}(z) & d^{(l)}(z) \end{pmatrix}, \quad l \geq 1.$$

Дробно-линейное преобразование над неванлинновской парой $\binom{I}{w(z)}$ обозначим через

$$b^{(l)}(z)\big\{w(z)\big\} = \big(c^{(l)}(z) + d^{(l)}(z)w(z)\big)\cdot\big(a^{(l)}(z) + b(l)(z)w(z)\big)^{-1}.$$

Из сделанных выше замечаний следует, что для любой неванлинновской пары $\binom{p(z)}{q(z)}$ корректно определена суперпозиция дробно-линейных преобразований

$$w(z) = b^{(1)}(z)\big\{\ldots b^{(l-1)}(z)\big\{b^{(l)}(z)\big\{p(z), q(z)\big\}\big\}\ldots\big\}. \tag{24}$$

Здесь ОФ $w(z)$ является неванлинновской.

Суперпозиция дробно-линейных преобразований (24) снова является дробно-линейным преобразованием с матрицей $b^{(1)}(z)\cdot b^{(2)}(z)\cdot\ldots\cdot b^{(l)}(z)$. Таким образом, имеем

$$b^{(1)}(z)\cdot b^{(2)}(z)\cdot\ldots\cdot b^{(l)}(z)\{p(z),q(z)\}=b^{(1)}(z)\{\ldots b^{(l-1)}(z)\{b^{(l)}(z)\{p(z),q(z)\}\}\ldots\}.$$

Отсюда и из (19) следует, что

$$U^{(l)}(z)\{p(z),q(z)\}=b^{(1)}(z)\{\ldots b^{(l-1)}(z)\{b^{(l)}(z)\{p(z),q(z)\}\}\ldots\}.$$

Из этой формулы и теоремы 1 немедленно следует такая теорема.

Теорема 3. *Пусть дана упорядоченная последовательность обобщённых вполне неопределённых интерполяционных задач для неванлинновских функций $(\mathcal{P}^{(l)})_{l=1}^{\infty}$ и для всех $l\geq 2$ подпространства $\mathcal{G}^{(l-1)}\subset\mathcal{G}^{(l)}$ являются инвариантными для операторов $T^{(l)}\in\{\mathcal{G}^{(l)}\}$. И пусть, далее, ОФ $b^{(l)}(z)$ определены формулами (18). Тогда формула*

$$w(z)=b^{(1)}(z)\{\ldots b^{(l-1)}(z)\{b^{(l)}(z)\{p(z),q(z)\}\}\ldots\}\tag{25}$$

устанавливает биективное соответствие между $\mathcal{F}^{(l)}$ и $\overline{\mathcal{R}}$.

Последняя формула показывает, что множество всех решений $\mathcal{F}^{(l)}$ интерполяционной задачи $\mathcal{P}^{(l)}$ может быть описано как формулой (10), так и формулой (25). Описание множества всех решений интерполяционной задачи $\mathcal{P}^{(l)}$ суперпозицией дробно-линейных преобразований (25) называется *обобщённым пошаговым алгоритмом Шура решения упорядоченных интерполяционных задач.*

4. Примеры. В этом разделе мы рассмотрим примеры интерполяционных задач для неванлинновских функций, резольвентные матрицы которых допускают представление в виде произведения простейших множителей Бляшке-Потапова. Таким задачам соответствуют упорядоченные последовательности интерполяционных задач специального вида. А именно, пусть в представлении (5) все пространства $\mathfrak{h}^{(l)}$ совпадают с $\mathcal{H}$, т.е.

$$\mathcal{G}^{(l)}=\underbrace{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}\oplus\ldots\oplus\mathcal{H}}_{l\text{ слагаемых}}.\tag{26}$$

И пусть, далее, существует последовательность комплексных чисел $(\zeta_l)_{l=1}^{\infty}\subset\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ такая, что операторы T_1 и $\widehat{T}_l$, $l>1$ (см. (12)) имеют вид

$$T_1=\zeta_1 I_{\mathcal{H}},\quad \widehat{T}_l=\zeta_l I_{\mathcal{H}},\quad l>1.\tag{27}$$

Отсюда следует, что

$$T_1^*=\bar\zeta_1 I_{\mathcal{H}},\quad R_{T_1^*}(z)=\frac{1}{1-\bar\zeta_1 z}I_{\mathcal{H}},\quad \widehat{T}_i^*=\bar\zeta_l I_{\mathcal{H}},\quad R_{\widehat{T}_l^*}(z)=\frac{1}{1-\bar\zeta_l z}I_{\mathcal{H}},\quad l>1.\tag{28}$$

Теорема 4. *При сделанных предположениях операторы $v^{(1)}$, $u^{(1)}$, $\widehat{v}^{(l)}$, $\widehat{u}^{(l)}$, $l>1$ обратимы. Резольвентные матрицы (9) допускают мультипликативное разложение*

$$U^{(l)}(z)=b_1(z)\cdot b_2(z)\cdot\ldots\cdot b_l(z),\qquad l\geq 1.\tag{29}$$

ОФ $b^{(l)}(z)$, $l \geq 1$ называются множителями Бляшке-Потапова и задаются формулами

$$b^{(l)}(z) = I + \frac{z}{1-\bar{\zeta}_l z}\begin{pmatrix} I \\ w^{(l)^*} \end{pmatrix}\left(\frac{w^{(l)} - w^{(l)^*}}{\zeta_l - \bar{\zeta}_l}\right)^{-1}\begin{pmatrix} -w^{(l)} & I \end{pmatrix}, \quad l \geq 1. \tag{30}$$

Здесь операторы $w^{(l)}$ имеют вид

$$w^{(1)} = v^{(1)^{-1}} u^{(1)}, \quad w^{(l)} = \widehat{v}^{(l)^{-1}} \widehat{u}^{(l)}, \quad l > 1 \tag{31}$$

и называются параметрами Шура.

□ В силу (22) и (28) имеем $(\zeta_l - \bar{\zeta}_l)\widehat{K}^{(l)} = \widehat{v}^{(l)}\widehat{u}^{(l)^*} - \widehat{u}^{(l)}\widehat{v}^{(l)^*}$, $l > 1$. Отсюда следует, что

$$\widehat{K}^{(l)} = \frac{\widehat{v}^{(l)}\widehat{u}^{(l)^*} - \widehat{u}^{(l)}\widehat{v}^{(l)^*}}{\zeta_l - \bar{\zeta}_l}. \tag{32}$$

Пусть, например, $(\zeta_l - \bar{\zeta}_l)/2i > 0$. Отсюда, из неравенств $\widehat{K}^{(l)} > O$, и из (32) следует, что $(\widehat{v}^{(l)}\widehat{u}^{(l)^*} - \widehat{u}^{(l)}\widehat{v}^{(l)^*})/2i > O$, т.е. $\mathrm{Im}(\widehat{v}^{(l)}\widehat{u}^{(l)^*}) > O$. Поэтому произведение операторов $\widehat{v}^{(l)}\widehat{u}^{(l)^*}$ обратимо и, следовательно, обратимы операторы $\widehat{v}^{(l)}$, $\widehat{u}^{(l)}$, $l > 1$. Обратимость операторов $v^{(1)}$, $u^{(1)}$ доказывается аналогичным образом.

Для $l > 1$ имеем

$$\begin{aligned} b^{(l)}(z) &= I + z\begin{pmatrix} \widehat{v}^{(l)^*} \\ \widehat{u}^{(l)^*} \end{pmatrix} R_{\widehat{T}^{(l)^*}}(z)\widehat{K}^{(l)^{-1}}\begin{pmatrix} \widehat{u}^{(l)} & -\widehat{v}^{(l)} \end{pmatrix} \\ &= I + \frac{z}{1-\bar{\zeta}_l z}\begin{pmatrix} I \\ \widehat{u}^{(l)^*}\widehat{v}^{(l)^{*-1}} \end{pmatrix}\widehat{v}^{(l)^*}\left(\frac{\widehat{v}^{(l)}\widehat{u}^{(l)^*} - \widehat{u}^{(l)}\widehat{v}^{(l)^*}}{\zeta_l - \bar{\zeta}_l}\right)^{-1}\widehat{v}^{(l)}\begin{pmatrix} \widehat{v}^{(l)^{(-1)}}\widehat{u}^{(l)} & -I \end{pmatrix} \\ &= I + \frac{z}{1-\bar{\zeta}_l z}\begin{pmatrix} I \\ \widehat{u}^{(l)^*}\widehat{v}^{(l)^{*-1}} \end{pmatrix}\left(\frac{\widehat{u}^{(l)^*}\widehat{v}^{(l)^{*-1}} - \widehat{v}^{(l)^{-1}}\widehat{u}^{(l)}}{\zeta_l - \bar{\zeta}_l}\right)^{-1}\begin{pmatrix} \widehat{v}^{(l)^{(-1)}}\widehat{u}^{(l)} & -I \end{pmatrix} \\ &= I + \frac{z}{1-\bar{\zeta}_l z}\begin{pmatrix} I \\ w^{(l)^*} \end{pmatrix}\left(\frac{w^{(l)} - w^{(l)^*}}{\zeta_l - \bar{\zeta}_l}\right)^{-1}\begin{pmatrix} -w^{(l)} & I \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Формулы (30) доказаны для $l > 1$. Для $l = 1$ формула (30) доказывается аналогичным образом. ■

Пример 1. Задача Неванлинны-Пика. В задаче Неванлинны-Пика задана бесконечная последовательность попарно различных комплексных чисел из верхней полуплоскости $z_1, z_2, \ldots, z_k, \ldots$ и бесконечная последовательность операторов $w_1, w_2, \ldots, w_k, \ldots$, действующих в пространстве в $\mathcal{H}$. Требуется описать множество ОФ $w : \mathbb{C}_+ \to \{\mathcal{H}\}$ таких, что

$$w(z_k) = w_k, \ \forall k \in \mathbb{N}, \ w \in \mathcal{R}. \tag{33}$$

Вместе с задачей (33) с бесконечным числом узлов интерполяции будем рассматривать и усеченные задачи Неванлинны-Пика. В таких задачах фиксируется число $l \in \mathbb{N}$ и требуется описать множество ОФ $w : \mathbb{C}_+ \to \{\mathcal{H}\}$ таких, что

$$w(z_j) = w_j, \ 1 \leq j \leq l, \ w \in \mathcal{R}. \tag{34}$$

Покажем, что усеченную задачу (34) можно рассматривать как обобщённую интерполяционную задачу неванлииновской типа. В качестве масштабных пространств выберем пространства

$$\mathcal{G}^{(l)} = \underbrace{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \ldots \oplus \mathcal{H}}_{l \text{ слагаемых}}, \quad \mathcal{H}.$$

Операторы $K^{(l)}, T^{(l)}, v^{(l)}, u^{(l)}$ зададим естественными матричными представлениями

$$\begin{aligned} T^{(l)} &= \operatorname{diag}\{z_1^{-1} I_{\mathcal{H}}, \ldots, z^{(l)^{-1}} I_{\mathcal{H}}\} \in \{\mathcal{G}^{(l)}\}, \\ K^{(l)} &= T^{(l)^{-1}} \cdot \left\{ \frac{w_i - w_j^*}{z_i - \bar{z}_j} \right\}_{i,j=1,\ldots,l} \cdot T^{(l)^{-1*}} \in \{\mathcal{G}^{(l)}\}, \\ v^{(l)} &= \operatorname{col}\{I_{\mathcal{H}}, \ldots, I_{\mathcal{H}}\} \in \{\mathcal{H}, \mathcal{G}^{(l)}\}, \\ u^{(l)} &= \operatorname{col}\{w_1, \ldots, w_l\} \in \{\mathcal{H}, \mathcal{G}^{(l)}\}. \end{aligned}$$

Очевидно, что выполнено ОТ (1). В [4] показано, что условием вполне неопределённости задачи (34) является неравенства $K^{(l)} > O_{\mathcal{G}^{(l)}}$. Более того (см. [4]), ОФ $w \in \mathcal{R}$ является решением усечённой задачи (34) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет ОМН (3). Таким образом, множество решений интерполяционной задачи (34) совпадает с множеством решений следующей обобщённой интерполяционной задачи неванлинновской типа

$$\mathcal{P}^{(l)} = \{K^{(l)}, T^{(l)}, v^{(l)}, u^{(l)}\}. \tag{35}$$

Из (4) следует, что задача (35) является вполне неопределённой тогда и только тогда, когда вполне неопределённой является усеченная задача Неванлинны-Пика (34). Таким образом, усеченная вполне неопределённая задача Неванлинны-Пика (34) эквивалентна обобщённой интерполяционной задаче (35). Из блочной структуры операторов $K^{(l)}, T^{(l)}, v^{(l)}, u^{(l)}$ следует упорядоченность последовательности обобщённых интерполяционных задач $\left(\mathcal{P}^{(l)}\right)_{l=1}^{\infty}$. Итак, последовательность усечённых внолне неопределённых задач Неванлинны-Пика (34) является примером последовательности вполне неопределённых обобщённых интерполяционных задач для неванлинновских функций.

Легко видеть, что в рассматриваемой задаче операторы $T_1, \widehat{T}_l,\ l \geq 2$ имеют вид (28) с $\zeta_l = 1/z_l$. Следовательно, формулы (29) задают мультипликативное представления резольвентных матриц усечённых задач, формулы (31) явно выражают параметры Шура через данные интерполяционных задач и формула (25) задаёт пошаговое решение усечённых задач Неванлинны-Пика.

В задаче Неванлинны-Пика множители Бляшке-Потапова (30) допускают представления

$$b^{(l)}(z) = I + \frac{(\bar{z}_l - z_l)z}{|z_l|^2(1 - \bar{z}_l^{-1} z)} \mathcal{P}^{(l)}, \tag{36}$$

в которых операторы $\mathcal{P}^{(l)}$ выражаются через параметры Шура по формулам

$$\mathcal{P}^{(l)} = \begin{pmatrix} I \\ w^{(l)^*} \end{pmatrix} \left(\frac{w^{(l)} - w^{(l)^*}}{i} \right)^{-1} \begin{pmatrix} I & w^{(l)} \end{pmatrix} \mathcal{J}, \qquad \mathcal{J} = \begin{pmatrix} O & -iI \\ iI & O \end{pmatrix} \tag{37}$$

и удовлетворяют условиям

$$\mathcal{P}^{(l)^2} = -\mathcal{P}^{(l)}, \quad \mathcal{P}^{(l)}\mathcal{J} \geq \mathcal{O}; \tag{38}$$

Эти множители Бляшке-Потапова допускают представление, часто встречающееся в математической литературе

$$b_l(z) = I + \frac{(\bar{z}_l - z_l)z}{|z_l|^2(1-\bar{z}_l^{-1}z)}\mathcal{P}^{(l)} = I + \mathcal{P}^{(l)} + \left(\frac{(\bar{z}_l - z_l)z}{|z_l|^2(1-\bar{z}_l^{-1}z)} - 1\right)\mathcal{P}^{(l)}$$
$$= I + \mathcal{P}^{(l)} - \frac{\bar{z}_l}{z_l}\cdot\frac{z-z_l}{z-\bar{z}_l}\mathcal{P}^{(l)} = I + \mathcal{P}^{(l)} + b_{z_l}(z)\mathcal{P}^{(l)}.$$

Здесь скалярный множитель Бляшке $b_{z_l}(z) = -\frac{\bar{z}_l}{z_l}\cdot\frac{z-z_l}{z-\bar{z}_l}$ отличается от простейшего множителя Бляшке для верхней полуплоскости $\frac{z-z_l}{z-\bar{z}_l}$ лишь равным но модулю единице множителем $-\frac{\bar{z}_l}{z_l}$.

Пример 2. Проблема моментов Гамбургера. В проблеме моментов Гамбургера по заданной последовательности операторов $s_0, \ldots, s_k, \cdots \in \{\mathcal{H}\}_H$ требуется описать множество монотонно возрастающих ОФ $\sigma : \mathbb{R} \to \{\mathcal{H}\}_H$ таких, что

$$s_k = \int_{-\infty}^{+\infty} t^k d\sigma(t),\ \forall k \in \mathbb{N}\cup\{0\}. \tag{39}$$

Можем считать, не изменяя значений интегралов, что ОФ σ удовлетворяет следующим условиям нормировки: $\sigma(t)$ непрерывна слева при всех t и $\sigma(t) \to O_{\mathcal{H}}$ при $t \to -\infty$. Множество нормированных решений σ проблемы моментов (5.40) обозначим символом $\mathcal{M}_\infty$. С каждой $\sigma \in \mathcal{M}_\infty$ свяжем ОФ

$$w(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{t-z}. \tag{40}$$

ОФ w определена и голоморфна в $\mathbb{C}_+$ и называется *ассоциированной* с проблемой моментов (39). Множество ОФ w, ассоциированных с проблемой (39), обозначим символом $\mathcal{F}_\infty$. Из формулы обращения Стилтьеса следует, что соответствие, устанавливаемое между $\mathcal{F}_\infty$ и $\mathcal{M}_\infty$ формулой (40), является взаимно однозначным. Поэтому, вместо описания множества $\mathcal{M}_\infty$, мы можем ограничиться описанием множества $\mathcal{F}_\infty$.

Вместе с бесконечной проблемой моментов (39) будем рассматривать и усеченные проблемы моментов. В таких проблемах фиксируется целое число $l \geq 0$ и требуется описать все нормированные монотонно возрастающие ОФ $\sigma : \mathbb{R} \to \{\mathcal{H}\}_H$ и операторы $M \in \{\mathcal{H}\}_\geq$ такие, что

$$s_j = \int_{-\infty}^{+\infty} t^j d\sigma(t), \quad 0 \leq j \leq 2n-1, \quad s_{2n} = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n} d\sigma(t) + M. \tag{41}$$

Проблема моментов (41) называется n-ой усечённой проблемой моментов, а множество её нормированных решений σ обозначим через $\mathcal{M}_n$. Как и в случае проблемы моментов (5.40), с каждой $\sigma \in \mathcal{M}_n$ свяжем ассоциированную ОФ w вида (40). Множество всех ОФ w, ассоциированных с проблемой (41), обозначим через $\mathcal{F}_n$.

Покажем, что задачу описания ассоциированных ОФ усечённых проблем моментов можно рассматривать как обобщенную интерполяционную задачу для неванлинновских функций. В качестве масштабных пространств выберем пространства $\mathcal{G}_n = \underbrace{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \ldots \oplus \mathcal{H}}_{n+1}$, $\mathcal{H}$. Операторы K_n, T_n, v_n, u_n зададим естественными матричными представлениями

$$K_n = \begin{pmatrix} s_0 & \ldots & s_{n-1} & s_n \\ s_1 & \ldots & s_n & s_{n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ s_n & \ldots & s_{2n-1} & s_{2n} \end{pmatrix}, \quad T_n = \begin{pmatrix} O_{\mathcal{H}} & \ldots & O_{\mathcal{H}} & O_{\mathcal{H}} \\ I_{\mathcal{H}} & \ldots & O_{\mathcal{H}} & O_{\mathcal{H}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O_{\mathcal{H}} & \ldots & I_{\mathcal{H}} & O_{\mathcal{H}} \end{pmatrix},$$

$$v_n = \begin{pmatrix} I_{\mathcal{H}} \\ O_{\mathcal{H}} \\ \vdots \\ O_{\mathcal{H}} \end{pmatrix}, \quad u_n = -\begin{pmatrix} O_{\mathcal{H}} \\ s_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Непосредственно проверяем, что определённые выше операторы удовлетворяют ОТ (1). В [6] показано, что необходимым и достаточным условием разрешимости проблемы моментов (41) является неравенство $K_n \geq O_{\mathcal{G}_n}$. Более того (см. [6]), ОФ $w \in \mathcal{F}_n$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет ОМН (3). Таким образом, множество $\mathcal{F}_n$ совпадает со множеством решений обобщённой интерполяционной задачи

$$\mathcal{P}_n = \{K_n, T_n, v_n, u_n\}. \tag{42}$$

Условием полной неопределённости проблемы моментов (41) является условие $K_n > O_{\mathcal{G}_n}$. Легко видеть, что при этом все условия в (4) выполнены, т.е. задача (42) является вполне неопределённой. Будем считать, что задачи (42) являются вполне неопределёнными при всех $n \geq 0$.

Из блочной структуры операторов K_n, T_n, v_n, u_n следует упорядоченность последовательности обобщённых интерполяционных задач $\left(\mathcal{P}_n\right)_{n=1}^{\infty}$. Более того, из блочной структуры операторов T_n следует, что $T_0 = O_{\mathcal{H}}$, $\widehat{T}_n = O_{\mathcal{H}}$, $n \geq 1$. По теореме 2 резольвентные матрицы усечённых проблем допускают мультипликативное представление вида

$$U^{(n)}(z) = b_0(z) \cdot b_1(z) \cdot \ldots \cdot b_n(z), \qquad n \geq 0.$$

Здесь ОФ $b_j(z)$, $j \geq 0$ определены формулами (18) и, с учетом равенств $R_{T_0}(z) = I_{\mathcal{H}}$, $R_{T_j}(z) = I_{\mathcal{H}}$, $j \geq 1$, имеют вид

$$b_0(z) = I_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} + z \begin{pmatrix} I_{\mathcal{H}} \\ O_{\mathcal{H}} \end{pmatrix} s_0^{-1} \begin{pmatrix} O_{\mathcal{H}} & -I_{\mathcal{H}} \end{pmatrix},$$

$$b_j(z) = I_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} + z \begin{pmatrix} \widehat{v}^{(j)^*} \\ \widehat{u}^{(j)^*} \end{pmatrix} \widehat{K}^{(j)^{-1}} \begin{pmatrix} \widehat{u}^{(j)} & -\widehat{v}^{(j)} \end{pmatrix}, \ j \geq 1.$$

Легко видеть, что эти множители Бляшке-Потапова можно записать в виде

$$b_j(z) = I_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} + iz\mathcal{E}_j, \; j \geq 0.$$

Здесь введены операторы

$$\mathcal{E}_0 = \begin{pmatrix} I_{\mathcal{H}} \\ O_{\mathcal{H}} \end{pmatrix} s_0^{-1} \begin{pmatrix} I_{\mathcal{H}} & O_{\mathcal{H}} \end{pmatrix} \mathcal{J}, \qquad \mathcal{E}_j = \begin{pmatrix} \widehat{v}^{(j)*} \\ \widehat{u}^{(j)*} \end{pmatrix} \widehat{K}^{(j)^{-1}} \begin{pmatrix} \widehat{v}^{(j)} & \widehat{u}^{(j)} \end{pmatrix} \mathcal{J}, \qquad j \geq 1,$$

которые удовлетворяют условиям

$$\mathcal{E}_j \mathcal{J} \geq O, \quad \mathcal{E}_j^2 = O.$$

Последнее равенство очевидно при $j = 0$. При $j > 0$ оно следует из индуцированного тождества (22), которое для проблемы моментов имеет вид

$$O_{\mathcal{H}} = \widehat{v}^{(j)}\widehat{u}^{(j)*} - \widehat{u}^{(j)}\widehat{v}^{(j)*}, \quad j > 0.$$

Литература

1. Pick G. Über die Beschränkungen analytischer Funktionen, welche durch vorgegebene Funktionswerte bewirkt werden // Math. Ann. – 1916. – 77. – P.17-23.
2. Nevanlinna R. Über beschränkte Functionen, die in gegebenen Punkten vorgeschriebene Werte annehmen // Ann. Acad. Sci. Fenn. – 1919. – A 13;1. – P.1-71.
3. Nevanlinna R. Über beschränkte analitische Functionen // Ann. Acad. Sci. Fenn. – 1929. – A 32;7. – P.1-75.
4. Ковалишина И.В., Потапов В.П. Индефинитная метрика в проблеме Неванлинны-Пика // ДАН Арм. ССР. – 1974. – 59;1. – С.17-22.
5. Потапов В.П. Мультипликативная структура J-растягивающих матриц-функций // Труды ММО. – 1955. – 4. – С.125-236.
6. Ковалишина И.В. Аналитическая теория одного класса интерполяционных задач // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1983. – 47;3. – С.455-497.
7. Нудельман А.А. Об одной проблеме тина проблемы моментов // Докл. АН СССР. – 1977. – 233;5. – С.79-795.
8. Иванченко Т.С., Сахнович Л.А. Операторный подход к схеме В.П. Потапова исследования интерполяционных задач // Укр. мат. журн. – 1987. – 39;5. – С. 573-578.
9. Ivanchenko T.S., Sakhnovich L.A An operator approach to the Potapov scheme for the solution of interpolation problems // Operator Theory: Advances and Applications. – 1994. – 72. – P.48-86.
10. Arov D.Z., Dym H. J-contractive matrix valued functions and related topics / Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 116.: Cambridge University Press, 2008. – 565 c.
11. Кацнельсон В.Э., Хейфец А.Я., Юдицкий П.М. Абстрактная интерполяционная проблема и теория расширений изометрических операторов / Операторы в функциональных пространствах и вопросы теории функций. Сб. науч. тр.(изд. Марченко В.А.). К.: Наукова думка, 1987. – С.83-96.
12. Дюкарев Ю.М. О неопределённости интерполяционных задач для неванлинновских функций // Известия высших учебных заведений. Серия «Математика». – 2004. – 507;8. – С.26-38.

13. Дюкарев Ю.М. О неопределённости интерполяционных задач в классе Стилтьеса // Математический сборник. – 2005. – 196;3. – С.61-88.
14. Дюкарев Ю. М. Обобщённый критерий Стилтьеса полной неопределённости интерполяционных задач // Матем. заметки. – 2008. – 84;1. – С.23-39.

MULTIPLICATIVE STRUCTURE OF THE ORDERED INTERPOLATION PROBLEM RESOLVENT MATRICES FOR NEVANLINNA's FUNCTIONS

Yu. M. Dyukarev

Belgorod State Agricultural Academy by V.Ya. Gorin,
Vavilova St., 1, Maiskiy, Belgorod Reg., 308503, Russia, e-mail: yu.dyukarev@karazin.ua

Abstract. Multiplicative structure of the ordered interpolation problem resolvent matrices for Nevanlinna's functions is studied. An algorithm for step by step solution of ordered interpolation problems is obtained. General constructions are illustrated by examples of the Nevanlinna-Pick problem and the Hamburger moment problem.

Key words: Nevanlinna's functions, ordered interpolation problems, factorization of resolvent matrix, step by step solution of interpolation problems.