MSC 42A99

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИЯХ

А.А. Рыжкова, И.А. Тришина

Воронежский государственный университет,
Университетская пл.,1, Воронеж, Воронежская область, 394036, Россия,e-mail:office@main.vsu.ru

Аннотация. Введен в рассмотрение класс почти периодических на бесконечности функций. Необходимость рассмотрения таких функций связана с тем, что они возникают при рассмотрении разностных уравнений. Основные результаты статьи связаны с доказательством почти периодичности на бесконечности решений разностных уравнений.

Ключевые слова: периодические на бесконечности функции,разностные уравнения, спектральная теория.

1. Введение. Пусть $\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел и X — комплексное банахово пространство. Обозначим через $C_b = C_b(\mathbb{R}, X)$ банахово пространство ограниченных функций $x : \mathbb{R} \to X$ с нормой $\|x\|_\infty = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|$. Через $C_0(\mathbb{R}, X)$ обозначим (замкнутое) подпространство функций из C_b, убывающих на бесконечности,т.е $\lim\limits_{|t|\to\infty} \|x(t)\| = 0$, $x \in C_0(\mathbb{R}, X)$. В пространстве $C_b(\mathbb{R}, X)$ рассмотрим операторы сдвига

$$S(t) : C_b(\mathbb{R}, X) \to C_b(\mathbb{R}, X)\,, \quad (S(t)x)(\tau) = x(\tau + t)\,, \quad \tau \in \mathbb{R}\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

$x \in C_b(\mathbb{R}, X)$. Используемые результаты из гармонического анализа, функции и векторов, содержаться в работах [1-7]. Следуя [1],[6],[7], дадим определение медленно меняющейся на бесконечности функции.

Определение 1. *Функция* x $\in C_b(\mathbb{R}, X)$ *называется медленно меняющейся на бесконечности, если* $S(\tau)x - x \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R}, X)$, *т.е.*

$$\lim_{\tau\to\infty} \|x(\tau + t) - x(\tau)\| = 0$$

для любого $t \in \mathbb{R}$.

Примером медленно меняющейся на бесконечности функции является функция вида

$$x(t) = \sin(\ln(\alpha + |\,t\,|))\,, \quad t \in \mathbb{R}\,, \quad \alpha > 0\,.$$

Множество медленно меняющихся на бесконечности функций образуют замкнутое подпространство из $C_b(\mathbb{R}, X)$, которое обозначим символом $C_{sl,\infty} = C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$.

Определение 2. *Пусть* $\varepsilon > 0$. *Число* $\omega \in \mathbb{R}$ *называется* ε*-периодом функции* $x \in C_b$ *на бесконечности, если существует такое число* $\alpha \in \mathbb{R}_+$, *что* $\sup\limits_{|t|>\alpha} \|x(t + \omega) - x(t)\| < \varepsilon$. *Множество* ε*-периодов функции* x *на бесконечности обозначим через* $\Omega_\infty(x, \varepsilon)$.

Работа поддержана грантом Российского научного фонда (проект 14-21-00066, выполняемый в Воронежском государственном университете), РФФИ (проекты 13-01-00378,14-01-31196).

Определение 3. *Множество $\Omega_\infty(x,\varepsilon)$ называется относительно илотым иа $\mathbb{R}$, если существует такое $l \in \mathbb{N}$, что $[t, t+l] \cap \Omega_\infty(x,\varepsilon) \neq \varnothing$, для любого $t \in \mathbb{R}$.*

Определение 4(определепие Бора). *Функция $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$ называется почти периодической иа бесконечности, если для любого $\varepsilon > 0$ множество $\Omega_\infty(x,\varepsilon)$ относительно илотио иа $\mathbb{R}$.*

Множество почти периодических па бесконечности функций обозначим символом $AP_\infty(\mathbb{R}, X)$.

Теорема 1. *Множество $AP_\infty(\mathbb{R}, X)$ образует банахово пространство и банахову алгебру, если X — банахова алгебра.*

Отметим, что банахово пространство $AP(\mathbb{R}, X)$ почти периодических функций содержится в $AP_\infty(\mathbb{R}, X)$.

Определение 5 (аппроксимациоппое). *Функция $x \in C_b$ называется почти периодической, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют функции $x_k \in C_{sl,\infty}$ и числа $\lambda_k \in \mathbb{R}$, $1 \leq k \leq N$ такие, что*

$$\|x(t) - \sum_{k=0}^{N} x_k(t) e^{i\lambda_k t}\| < \varepsilon\,.$$

Можно доказать, что эти определения (Бора и аппроксимациоппое) эквивалентны. Ясно,что $C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X) \subset AP_\infty(\mathbb{R}, X)$.

Теорема 2. *Функция вида*

$$x(t) = \sum_{k=1}^{N} x_k(t) e^{i\lambda_k t}\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,, \qquad x : \mathbb{R} \to X\,,$$

где $\lambda_k \in \mathbb{R}, 1 \leq k \leq m$, $x_k \in C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$, $0 \leq k \leq N-1$, является почти периодической на бесконечности фуикцией($x \in AP_\infty(\mathbf{R}, X)$).

□ Как отмечалось $C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X) \subset AP_\infty(\mathbb{R}, X)$, а также $t \mapsto e^{i\lambda_k t}, 1 \leq k \leq n$, - почти периодические функции. Поскольку произведения $\gamma_k x_k, 1 \leq k \leq N$, также являются почти периодическими па бесконечности функциями, то их сумма также является почти периодической па бесконечности функцией. ■

2. О почти периодических на бесконечности решениях разностного уравнения. В банаховом пространстве $C_b(\mathbb{R}, X)$, где конечномерное банахово пространство, рассмотрим разностное уравнение

$$x(t+1) = Bx(t) + y(t)\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,, \tag{1}$$

где $y \in C_0(\mathbb{R}, X), B \in \operatorname{End} X$ со свойством $\sigma_0 = \sigma(B) \cap i\mathbb{R} = \{i\lambda_1, i\lambda_2 ..., i\lambda_m\}$ — совокупность простых собственных значений и $\sigma(B)$ обозначает спектр оператора B.

Теорема 3. *Каждое ограниченное решение $x : \mathbb{R} \to X$ уравнения (1) является почти периодической иа бесконечности функцией,которое допускает представление вида*

$$x(t) = \sum_{k=1}^{N} x_k(t) e^{i\lambda_k t}\,,$$

где $x_k \in C_{sl,\infty}$, $0 \leq \lambda_k < 2\pi$, $0 \leq k \leq N-1$.

☐ Спектр оператора B представим в виде:

$$\sigma(B) = \sigma_0 \cup \sigma_{in} \cup \sigma_{out} ,$$

где

$\sigma_0 = \sigma(B) \cap \mathbb{T} = \{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_m\}$ — совокупность собственных значений, лежащих па окружности $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = 1\}$,

$\sigma_{in} = \{\lambda \in \sigma(B) : Re\lambda < 1\}$ — совокупность собственных значений, лежащих внутри окружности.

$\sigma_{out} = \{\lambda \in \sigma(B) : \lambda > 1\}$ — совокупность собственных значений, лежащих вне окружности.

В соответствии с этим разбиением спектра рассмотрим проекторы $\mathcal{P}_0$, $\mathcal{P}_{in}$,$\mathcal{P}_{out}$, которые соответственно построены по спектральным множествам $\sigma_0, \sigma_{in}, \sigma_{out}$. Таким образом, $I = \mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_{in} + \mathcal{P}_{out}$. Эти проекторы индуцируют разложение $X = X_0 \oplus X_{in} \oplus X_{out}$ пространства X, где $X_0 = \mathrm{Im}\mathcal{P}_0, X_{in} = \mathrm{Im}\mathcal{P}_{in}, X_{out} = \mathrm{Im}\mathcal{P}_{out}$. Эти подпространства являются инвариантными для оператора B и пусть $B_0 = B|X_0, B_{in} = B|X_{in}, B_{out} = B|X_{out}$. Таким образом, $B = B_0 \oplus B_{in} \oplus B_{out}$ относительно построенного разложения пространства X. К обеим частям уравнения (1) применим проектор $\mathcal{P}_{in}$,и тогда получим последовательность $x_{in} = \mathcal{P}_{in}x$, удовлетворяющую равенству

$$S(1)x_{in}(t) = B_{in}x_{in}(t) + y_{in}(t) , \qquad y_{in} = \mathcal{P}_{in}y \in C_0 , \tag{2}$$

Из (2) следует, что

$$(I - B_{in}S(-1))x_{in} = S(-1)y_{in} . \tag{3}$$

Поскольку $\|S(-1)\| = 1$, $B_{in}S(-1)x_{in}(t) = S(-1)B_{in}x_{in}$, $n \in \mathbb{Z}$, и спектральный радиус $r(B_{in})$ оператора B_{in} меньше единицы, то оператор $I - B_{in}S(-1)$ обратим и из (3) получаем, что

$$x_{in}(t) = ((I - B_{in}S(-1))^{-1}S(-1)y_{in})(t) = \sum_{t=0}^{\infty} B_{in}^n S(-n(t+1))y_{in}(t-1) .$$

Ясно, что $x_{in} \in C_0(\mathbb{R}, X)$. Аналогичный результат получим при применении проектора $\mathcal{P}_{out}$ к уравнению (1):

$$(S(1)x_{out})(t) = B_{out}x_{out}(t) + y_{out}(t), y_{out} = \mathcal{P}_{out}y \in C_0 . \tag{4}$$

Оператор B_{out} обратим,и $\sigma(B_{out}^{-1}) = \{\lambda^{-1}; \lambda \in \sigma_{out}\}$, т.е. его спектральный радиус меньше единицы. Используя перестановочность оператора S_N с B_{out} из (4), получим равенства

$$S(1)B_{out}^{-1}x_{out}(t) = x_{out}(t) + B_{out}^{-1}y_{out}(t) , \quad t \in \mathbb{R} ,$$

или

$$(I - S(1)B_{out}^{-1})x_{out}(t) = -B_{out}^{-1}y_{out}(t) , \quad t \in \mathbb{R} .$$

Таким образом,

$$x_{out}(t) = -(I - S(1)B_{out}^{-1})^{-1}B_{out}^{-1}y_{out}(t) = -\sum_{n=0}^{\infty}(B_{out}^{-1}S(1))^k B_{out}^{-1}y_{out}(t)\,, \quad y_{out} \in C_0\,.$$

Из этой формулы следует, что $x_{out} \in C_0(\mathbb{R}, X)$. Проектор P_0 можно представить в виде

$$P_0 = P_1 + ... + P_N\,,$$

где P_k — проектор, и

$$AP_k = \gamma_k P_k\,, \quad \text{где} \quad |\,\gamma_k\,| = 1\,, \quad 1 \le k \le N\,.$$

Ввиду предполагаемой простоты собственных значений число γ_k представимо в виде $\gamma_k = e^{i\lambda_k}$, $1 \le k \le N$. Применим проектор P_0 к разностному уравнению (1) и далее применим проектор P_k

$$P_k x_0(t+1) = P_k B_0 x_0(t) + P_k y_0(t)\,,$$

где $x_0(t) = P_0 x(t)$, $x_k(t) = P_k x_0(t)$, $k = \overline{1, N}$.

Следовательно, $x_k(t+1) = \gamma_k x_k(t) + y_k(t)$, где $x_k(t) = P_k x_0(t)$, $k = \overline{1, N}, t \in \mathbb{R}$. Сделав замену $x_k(t) = e^{-i\lambda_k t}\ x_k(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $0 \le \lambda_k < 2\pi$ получим

$$\widetilde{x}_k(t+1) = \widetilde{x}_k(t) + \widetilde{y}_k(t)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

$\widetilde{x}_k$-медленно меняющаяся последовательность,а $x_k(t)$ отличается от $\widetilde{x}_k(t)$ по формуле (1) на множитель $e^{i\lambda_k t}$. Поскольку $\widetilde{y}_k \in C_0$ и $S(1)\widetilde{x}_k - \widetilde{x}_k \in C_0$. Следовательно, $\widetilde{x}_k$, где $1 \le k \le m$ — медленно меняющиеся на бесконечности последовательности. ■

Литература

1. Баскаков А.Г., Калужина Н.С. Теорема Берлинга для функций с существенным спектром из однородных пространств и стабилизация решений параболических уравнений // Матем. заметки. – 2012. – 92:5. – С.643–661.
2. Баскаков А.Г. Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов // Функциональный анализ. – 2004. – СМФН, 9, МАИ, М. – С.3–151.
3. Баскаков А.Г., Криштал И.А. Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства // Изв. РАН. Сер. матем. – 2005. – 69:3. – С.3–54.
4. Баскаков А.Г. Гармонический анализ линейных операторов / Воронеж: Издательство Воронежского гос. ун-та, 1987.
5. Дуплищева А.Ю. О периодических на бесконечности решениях разностных уравнений // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2012. – №1. – С.110-117.
6. Баскаков А.Г. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений // УМН. – 2013. – 68:1(409). – С.77–128.
7. Баскаков А.Г., Калужина Н.С., Поляков Д.М. Медленно меняющиеся на бесконечности полугруппы операторов // Известия вузов. Математика. – 2014. – №7. – С.3–14.

ABOUT PERIODIC FUNCTIONS AT INFINITY

A.A. Ryzhkova, I.A. Trishina

Voronezh State University,
Universitetskaja Sq., 1, Voronezh, 394036, Russia,e-mail: office@main.vsu.ru

Abstract. The class of almost periodic functions at infinity is introduced. Necessity of such functions related to the fact that they arise when studying difference equations. Main results of the article are related to the proof of almost periodicity at infinity of difference equations solutions.

Key words: periodicity at infinity, difference equations, spectral theory.