MSC 35G10

О РАЗРЕШИМОСТИ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ С ПАМЯТЬЮ

В.Е. Фёдоров, О.А. Стахеева

Челябинский государственный университет,
ул. Братьев Кашириных, 129, Челябинск, 454001, Россия, e-mail: kar@csu.ru, osta@csu.ru.

Аннотация. Методами теории полугрупп операторов найдены условия однозначной разрешимости задачи Коши для линейного интегро-дифференциального уравнения с памятью в банаховом пространстве в смысле классических решений на полуоси, а также в смысле более гладких решений на отрезке. С помощью этих результатов доказано существование единственного решения на полуоси задач Коши и Шоуолтера для вырожденного линейного эволюционного уравнения с памятью в банаховом пространстве. Общие результаты использованы для установления однозначной разрешимости в неограниченном по времени цилиндре начально-краевой задачи для линеаризованной интегро-дифференциальной системы уравнений Осколкова, описывающей динамику вязкоупругой жидкости.

Ключевые слова: эволюционное уравнение, полугруппа операторов, уравнение с памятью, интегро-дифференциальное уравнение, начально-краевая задача, система уравнений Осколкова.

1. Введение. В работе исследуется разрешимость задачи Коши для невырожденного линейного интегро-дифференциального уравнения

$$\dot{v}(t) = Av(t) + \int\limits_0^t \mathcal{K}(s)v(t-s)ds + f(t) \tag{1}$$

с оператором A, порождающим в банаховом пространстве (C_0)-непрерывную полугруппу, а также разрешимость начальных задач Коши и Шоуолтера для вырожденного интегро-дифференциального уравнения

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + \int\limits_0^t \mathcal{K}(s)u(t-s)ds + f(t) \tag{2}$$

с линейными операторами $L, M, \mathcal{K}(s)$, $s \geq 0$, действующими из банахова пространства $\mathfrak{U}$ в банахово пространство $\mathfrak{V}$, $\ker L \neq \{0\}$. При этом предполагается, что пара операторов L, M порождает вырожденную сильно непрерывную полугруппу операторов (т.е. выполняется условие сильной (L,p)-радиальности оператора M [1,2]). К таким задачам редуцируются начально-краевые задачи для интегро-дифференциальных уравнений в

Работа выполнена при поддержке Лаборатории квантовой топологии Челябинского госуниверситета (грант правительства РФ № 14.Z50.31.0020).

частных производных, описывающих динамику некоторых процессов с эффектами памяти, например, термомеханическое поведение полимеров [4, 4], вязкоупругих жидкостей [5] и других процессов [6–9]. Вырожденность оператора L означает, что система не разрешима относительно производной по выделенной переменной, как правило, по времени.

По сравнению с работами [10, 11], в которых рассмотрено невырожденное уравнение с оператором A, порождающим аналитическую полугруппу, здесь рассмотрен более широкий класс операторов A и более общая постановка задачи, когда заданная история системы с памятью учитывается функцией f в правой части уравнения. При этом в большинстве ситуаций доказана глобальная разрешимость задачи Коши для уравнения (1), в отличие от работ [10, 11]. В [12] рассмотрены те же начальные задачи для уравнений (1), (2), что и в настоящей работе, но при более жестких условиях на оператор A (порождение аналитической полугруппы) в случае уравнения (1) или на операторы L, M (порождение вырожденной аналитической полугруппы) в случае уравнения (2). Кроме того, в работе удалось отказаться от условий на ограниченность справа спектра оператора A или L-спектра оператора M, а также от условия ограниченности оператор-функции $\mathcal{K}$ при доказательстве существования решения на всей полуоси.

Отметим серию работ М.В. Фалалеева и С.С. Орлова [13–17], в которых исследованы интегро-дифференциальные уравнения с эффектами памяти, вообще говоря, высокого порядка, имеющие вырожденный оператор при старшей производной. В предположении фредгольмовости оператора при производной и существования полного M-жорданова набора у оператора L, либо при условии (L, p)-ограниченности оператора M (в работе [14]) доказана разрешимость задачи Коши для уравнения (2) как в смысле классических, так и в смысле обобщенных решений. Аналогичные результаты получены для уравнений высокого порядка.

Основная цель данной работы — исследовать разрешимость начальных задач для уравнения (2). Для этого в §2 сначала найдены условия однозначной разрешимости задачи Коши для уравнения (1), глобальной для классических решений и локальной в случае решений большей гладкости. Рассмотрен также случай, когда гладкость по выделенной переменной t заданных в уравнении функций $\mathcal{K}, f$ заменяется условием их непрерывности в смысле нормы графика неограниченного оператора A, что в приложениях, как правило, соответствует их большей гладкости по пространственным переменным.

Далее, в §3 формулируются условия на операторы L и M в уравнении (2) и вытекающие из этих условий и используемые в дальнейшем утверждения о порождении парой этих операторов вырожденной сильно непрерывной полугруппы, о представлении пространств, в которых эти операторы действуют, в виде прямых сумм и расщеплении действий операторов вдоль этих сумм. Это позволяет перейти в §4 к рассмотрению задач Коши и Шоуолтера для вырожденного эволюционного уравнения с памятью (2). Оно сводится к системе двух уравнений на взаимно дополняющих друг друга подпространствах. При наложении некоторых дополнительных условий на образ или ядро оператор-функции из интегральной части уравнения эту систему удается решить. При этом в одном из случаев требуется существование решения уравнения (1) повышенной гладкости, доказанное в §2.

Наконец, в §5 результаты из предыдущего раздела используются для получения условий однозначной глобальной по времени разрешимости начально-краевой задачи для интегро-дифференциальной системы уравнений Осколкова, описывающей динамику жидкости Кельвина-Фойгта. В отличие от работы [18] рассмотрен более простой случай ядра интегрального оператора, соответствующий, тем не менее, исходной модели предложенной Осколковым [5]. При этом решение найдено не в классе слабых решений, как в работе [18], а в классическом по времени смысле.

2. Невырожденное эволюционное уравнение с памятью. Обозначим через $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$ банахову алгебру линейных непрерывных операторов на банаховом пространстве $\mathfrak{X}$, через $\mathcal{C}l(\mathfrak{X})$ — множество линейных замкнутых операторов с плотной областью определения в $\mathfrak{X}$. Кроме того, через $\rho(A)$ обозначим резольвентное множество оператора A, а через D_A — область определения оператора A, снабженную нормой его графика $\|\cdot\|_{D_A} = \|\cdot\|_{\mathfrak{X}} + \|A\cdot\|_{\mathfrak{X}}$. D_A является банаховым пространством в случае замкнутого оператора A.

Рассмотрим эволюционное уравнение с эффектом памяти

$$\dot{v}(t) = Av(t) + (Jv)(t).$$

Здесь интегральный оператор памяти имеет вид

$$(Jv)(t) = \int\limits_0^\infty \mathcal{K}(s)v(t-s)ds = \int\limits_0^t \mathcal{K}(s)v(t-s)ds + \int\limits_0^\infty \mathcal{K}(t+s)v_-(-s)ds, \ \ t \geq 0,$$

при заданных оператор-функции $\mathcal{K} : [0,+\infty) \to \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ и вектор-функции $v_- : (-\infty, 0] \to \mathfrak{X}$, описывающей «историю» системы. Обозначим

$$\int\limits_0^\infty \mathcal{K}(t+s)v_-(-s)ds = f(t), \ \ t \geq 0,$$

тогда уравнение примет вид

$$\dot{v}(t) = Av(t) + \int\limits_0^t \mathcal{K}(s)v(t-s)ds + f(t), \ \ t \geq 0. \tag{3}$$

Решением задачи для уравнения (3) на отрезке $[0,T]$, где $T>0$ с условием

$$v(0) = v_0 \tag{4}$$

назовем функцию $v \in C^r([0,T];\mathfrak{X}) \cap C^{r-1}([0,T];D_A)$ при некотором $r \in \mathbb{N}$, удовлетворяющую уравнению (3) на $[0,T]$ и условию (4). Аналогично определяется решение задачи (3), (4) на полуоси $[0,+\infty)$.

Замечание 1. Решения, более гладкие, чем из класса $C^1([0,T];\mathfrak{X}) \cap C([0,T];D_A)$, понадобятся в следующем параграфе при рассмотрении вырожденного уравнения.

Обозначим при $m=0,1$ $C_0^m([0,T];\mathfrak{X}) = C^m([0,T];\mathfrak{X})$, при $r=2,3,\dots$,

$$C_0^r([0,T];\mathfrak{X}) = \{g \in C^r([0,T];\mathfrak{X}) : g^{(k)}(0)=0,\ k=0,1,\dots,r-2\}.$$

Понятно, что в таком случае $C_0^1([0,T];\mathfrak{X}) = C^1([0,T];\mathfrak{X})$.

Теорема 1. *Пусть оператор A порождает (C_0)-непрерывную полугруппу операторов, $r \in \mathbb{N}$, $v_0 \in D_{A^r}$, $\mathcal{K} \in C_0^{r-1}([0,T_1];\mathcal{L}(\mathfrak{X}))$, $f \in C_0^r([0,T_1];\mathfrak{X})$. Тогда при некотором $T \in (0,T_1]$ существует единственное решение $v \in C^r([0,T];\mathfrak{X}) \cap C^{r-1}([0,T];D_A)$ задачи* (3), (4).

□ Для операторов $V(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ полугруппы, порождаемой оператором A, при некоторых $C \geq 0$, $a \in \mathbb{R}$ выполняются неравенства [19]

$$\|V(t)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})} \leq Ce^{at}, \quad t \geq 0.$$

Поэтому

$$\max_{t\in[0,T]} \|V(t)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})} \leq C(T) \equiv \begin{cases} Ce^{aT},\ a>0; \\ C,\ a \leq 0. \end{cases}$$

Введем обозначения

$$K_k(T) = \sum_{l=0}^{k} \sup_{s\in[0,T]} \|\mathcal{K}^{(l)}(s)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})}, \quad \|g\|_k = \sum_{l=0}^{k} \sup_{t\in[0,T]} \|g^{(l)}(t)\|_{\mathfrak{X}}, \quad k=0,1,2,\dots,$$

для $\mathcal{K} \in C^k([0,T];\mathcal{L}(\mathfrak{X}))$, $g \in C^k([0,T];\mathfrak{X})$. На полуоси $[0,+\infty)$ рассмотрим числовую функцию $F(T) = T(1+T/2)C(T)K_0(T)$. Она непрерывна, неотрицательна, строго монотонно возрастает, неограничена (кроме тривиального случая $\mathcal{K} \equiv 0$, который исключается из дальнейших рассмотрений) и $F(0)=0$. Следовательно, найдется единственное число $T_0 > 0$, такое, что $F(T_0)=1$, $F(T)<1$ при любом $T \in (0,T_0)$.

Выберем $T \in (0,T_0)$, $T \leq T_1$, и рассмотрим уравнение

$$\dot{v}(t) = Av(t) + g(t). \tag{5}$$

При $v_0 \in D_{A^r}$, $g \in C_0^r([0,T];\mathfrak{X})$ решение $v \in C^r([0,T];\mathfrak{X}) \cap C^{r-1}([0,T];D_A)$ задачи (4) для уравнения (5) существует, единственно и имеет вид

$$v(t) = V(t)v_0 + \int_0^t V(t-s)g(s)ds, \quad t \in [0,T], \tag{6}$$

где $\{V(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}) : t \geq 0\}$ — порождаемая оператором A полугруппа операторов (см. [19]). Действительно,

$$v^{(r)}(t) = V(t)A^r v_0 + V(t)g^{(r-1)}(0) + \int_0^t V(t-s)g^{(r)}(s)ds.$$

Определим на $C_0^r([0,T];\mathfrak{X})$ оператор

$$[\Phi g](t) = \int_0^t \mathcal{K}(s)v(t-s)ds + f(t) = \tag{7}$$

$$= \int_0^t \mathcal{K}(s)V(t-s)v_0 ds + \int_0^t \mathcal{K}(s)\int_0^{t-s} V(t-s-\tau)g(\tau)d\tau ds + f(t),$$

где функция v является решением задачи (4) для уравнения (5) с данной функцией g в правой части. Имеем

$$\frac{d}{dt}\int_0^t \mathcal{K}(s)V(t-s)v_0 ds = \mathcal{K}(t)v_0 + \int_0^t \mathcal{K}(s)V(t-s)Av_0 ds,$$

$$\frac{d}{dt}\int_0^t \mathcal{K}(s)\int_0^{t-s} V(t-s-\tau)g(\tau)d\tau ds =$$

$$= \int_0^t \mathcal{K}(s)g(t-s)ds - \int_0^t \mathcal{K}(s)\int_0^{t-s} \frac{d}{d\tau}V(t-s-\tau)g(\tau)d\tau ds =$$

$$= \int_0^t \mathcal{K}(s)V(t-s)g(0)ds + \int_0^t \mathcal{K}(s)\int_0^{t-s} V(t-s-\tau)\dot{g}(\tau)d\tau ds =$$

$$= \int_0^t \mathcal{K}(s)\int_0^{t-s} V(t-s-\tau)\dot{g}(\tau)d\tau ds.$$

Докажем при $n < r$ равенство

$$[\Phi g]^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{K}^{(k)}(t)A^{n-1-k}v_0 + \int_0^t \mathcal{K}(s)V(t-s)A^n v_0 ds +$$

$$+ \int_0^t \mathcal{K}(s)\int_0^{t-s} V(t-s-\tau)g^{(n)}(\tau)d\tau ds + f^{(n)}(t). \tag{8}$$

Продифференцируем при $n < r-1$ правую часть этого равенства и получим

$$\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{K}^{(k+1)}(t)A^{n-1-k}v_0 + \mathcal{K}(t)A^n v_0 + \int_0^t \mathcal{K}(s)V(t-s)A^{n+1}v_0 ds +$$

$$+\int_0^t \mathcal{K}(s)\int_0^{t-s} V(t-s-\tau)g^{(n+1)}(\tau)d\tau ds + f^{(n+1)}(t) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \mathcal{K}^{(k)}(t)A^{n-k}v_0 + \int_0^t \mathcal{K}(s)V(t-s)A^{n+1}v_0 ds +$$

$$+\int_0^t \mathcal{K}(s)\int_0^{t-s} V(t-s-\tau)g^{(n+1)}(\tau)d\tau ds + f^{(n+1)}(t).$$

Тем самым, формула (8) доказана. В случае $n = r$ в правой части формулы (8) добавится еще выражение $\int\limits_0^t \mathcal{K}(s)V(t-s)g^{(r-1)}(0)ds$. Следовательно,

$$\|\Phi g\|_r \le (rK_{r-1}(T) + TC(T)K_0(T))\sum_{k=0}^{n}\|A^k v_0\|_{\mathfrak{X}} + T(1+T/2)C(T)K_0(T)\|g\|_r + \|f\|_r.$$

Поэтому имеет место действие оператора $\Phi : C_0^r([0,T];\mathfrak{X}) \to C_0^r([0,T];\mathfrak{X})$ в силу условий теоремы па $\mathcal{K}$ и f.

Для произвольных функций $g_1, g_2 \in C_0^r([0,T];\mathfrak{X})$

$$\|\Phi g_1 - \Phi g_2\|_{\mathfrak{X}} \le T(1+T/2)C(T)K_0(T)\|g_1 - g_2\|_r = F(T)\|g_1 - g_2\|_r,$$

где $F(T) < 1$ при выбранном $T > 0$. Таким образом, па полном метрическом пространстве $C_0^r([0,T];\mathfrak{X})$ оператор Φ является сжимающим. По теореме о сжимающем отображении найдется единственный элемент $g_1 \in C_0^r([0,T];\mathfrak{X})$, такой, что $g_1 = \Phi g_1$. В этом случае функция

$$v(t) = V(t)v_0 + \int_0^t V(t-s)g_1(s)ds$$

из класса $C^r([0,T];\mathfrak{X}) \cap C^{r-1}([0,T];D_A)$ является одновременно решением задач (3), (4) и (4), (5), так как $\dot v(t) - Av(t) = g_1(t) = [\Phi g_1](t)$.

Если v_1, v_2 — два решения задачи (3), (4) па некотором отрезке $[0,T]$, $T < T_0$, то функции

$$g_i(t) = \int_0^t \mathcal{K}(s)v_i(t-s)ds + f(t), \quad i = 1,2,$$

являются неподвижными точками оператора Φ, лежащими в $C_0^r([0,T];\mathfrak{X})$. Поэтому $g_1 \equiv g_2$ и при каждом $t \in [0,T]$

$$\dot w(t) - Aw(t) = 0, \quad t \in [0,T], \quad w(0) = 0,$$

где $w(s) = v_1(s) - v_2(s)$. Отсюда следует совпадение v_1 и v_2 на $[0,T]$ и единственность решения задачи (3), (4). ∎

В случае $r = 1$ можно доказать однозначную разрешимость задачи (3), (4) на всей полуоси $[0, +\infty)$.

Теорема 2. *Пусть оператор A порождает (C_0)-непрерывную полугруппу операторов, $v_0 \in D_A$, $\mathcal{K} \in C([0, +\infty); \mathcal{L}(\mathfrak{X}))$, $f \in C^1([0, +\infty); \mathfrak{X})$. Тогда существует единственное решение $v \in C^1([0, +\infty); \mathfrak{X}) \cap C([0, +\infty); D_A)$ задачи* (3), (4).

□ При $r = 1$ из прежней теоремы получаем решение $v \in C^1([0, T]; \mathfrak{X}) \cap C([0, T]; D_A)$ задачи (3), (4). Нетрудно заметить, что в проведенном доказательстве теоремы 1 ограничения на T_0 определяются только оператором A и оператор-функцией $\mathcal{K}$ и не зависят от $v_0 \in D_A$. Рассмотрим уравнение

$$\dot{v}(T+t) = Av(T+t) + \int\limits_0^{T+t} \mathcal{K}(s)v(T+t-s)ds + f(T+t),$$

при фиксированном ранее $T \in (0, T_0)$ и $t \geq 0$. Сделаем замену $v_1(t) = v(T+t)$ и получим задачу Коши

$$\dot{v}_1(t) = Av_1(t) + \int\limits_0^{t} \mathcal{K}(s)v_1(t-s)ds + f_1(t), \quad v_1(0) = v(T), \tag{9}$$

где функция

$$f_1(t) = f(T+t) + \int\limits_t^{T+t} K(s)v(T+t-s)ds,$$

как нетрудно заметить, уже определена и принадлежит пространству $C^1([0, T]; \mathfrak{X})$. Повторив рассуждения, докажем существование единственного решения задачи (9) на отрезке $[0, T]$, а значит, и решения исходной задачи на отрезке $[0, 2T]$. Повторяя процесс, получим решение этой задачи в любой момент времени $t \geq 0$. ■

Докажем в некотором смысле смежное к теореме 2 утверждение.

Теорема 3. *Пусть оператор A порождает (C_0)-непрерывную полугруппу операторов, $v_0 \in D_A$, $\operatorname{im}\mathcal{K}(s) \subset D_A$ при $s \geq 0$, $\mathcal{K} \in C([0, +\infty); \mathcal{L}(\mathfrak{X}; D_A))$, $f \in C([0, +\infty); D_A)$. Тогда существует единственное решение задачи* (3), (4) *на полуоси* $[0, +\infty)$.

□ Обозначим

$$\sup_{s\in[0,T]} \|\mathcal{K}(s)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X}; D_A)} \equiv \sup_{s\in[0,T]} \left(\|\mathcal{K}(s)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})} + \|A\mathcal{K}(s)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})}\right) \equiv K_A(T),$$

$F_A(T) = C(T)K_A(T)T^2/2$. Как и при доказательстве теоремы 1, определим $T_0 = F_A^{-1}(1)$, тогда $F(T) < 1$ при $T \in (0, T_0)$.

Зафиксируем $T \in (0, T_0)$. Для $g \in C([0, T]; D_A)$, решение $v \in C^1([0, T]; \mathfrak{X}) \cap C([0, T]; D_A)$ задачи (4), (5) существует, единственно и имеет вид (6). Зададим на $C([0, T]; D_A)$ оператор (7). Тогда

$$[A\Phi g](t) = \int\limits_0^t A\mathcal{K}(s)V(t-s)v_0 ds + \int\limits_0^t A\mathcal{K}(s) \int\limits_0^{t-s} V(t-s-\tau)g(\tau)d\tau ds + Af(t),$$

$$\|\Phi g\|_{C([0,T];D_A)} \le TC(T)K_A(T)\|v_0\|_{\mathfrak{X}} + \frac{T^2}{2}C(T)K_A(T)\|g\|_0 + \|f\|_{C([0,T];D_A)},$$

поэтому $\Phi : C([0,T];D_A) \to C([0,T];D_A)$.

Для $g_1, g_2 \in C([0,T];D_A)$ имеем

$$\|\Phi g_1 - \Phi g_2\|_{C([0,T];D_A)} \le \frac{T^2}{2}C(T)K_A(T)\|g_1 - g_2\|_{C([0,T];D_A)} = F_A(T)\|g_1 - g_2\|_{C([0,T];D_A)}.$$

Поскольку $F_A(T) < 1$ при выбранном T, то на полном метрическом пространстве $C([0,T];D_A)$ оператор Φ является сжимающим. По теореме о сжимающем отображении существует единственная неподвижная точка $g_1 \in C([0,T];D_A)$ оператора Φ. Следовательно, функция

$$v(t) = V(t)v_0 + \int\limits_0^t V(t-s)g_1(s)ds$$

является решением задач (3), (4) и (4), (5). Единственность решения и его продолжимость на всю полуось $[0,+\infty)$ доказываются так же, как в теоремах 1 и 2 соответственно. ■

3. Условия на операторы в вырожденном уравнении. Сформулируем условия на операторы, которые будут использованы в дальнейшем, и соответствующие им утверждения, которые доказаны ранее в [1, 2].

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ — банаховы пространства, оператор $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{V}$ линеен и непрерывен (для краткости обозначим $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$), а оператор $M : D_M \to \mathfrak{V}$ линеен, замкнут и плотно определен в $\mathfrak{U}$ (коротко, $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$). Введем обозначения

$$\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}, \quad \rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V};\mathfrak{U})\},$$

$$\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M), \quad R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L, \quad L^L_\mu = L(\mu L - M)^{-1}.$$

Пусть $p \in \mathbb{N}_0$. Оператор M называется *сильно (L,p)-радиальным*, если

(i) $\exists a \in \mathbb{R}\ (a,+\infty) \subset \rho^L(M)$;

(ii) $\exists K \in \mathbb{R}_+\ \forall \mu \in (a,+\infty)\ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\max\{\|(R^L_\mu(M))^{n(p+1)}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}, \|(L^L_\mu(M))^{n(p+1)}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{V})}\} \le \frac{K}{(\mu - a)^{n(p+1)}}\ ;$$

(iii) существует плотный в $\mathfrak{V}$ линеал $\overset{\circ}{\mathfrak{V}}$, такой, что при любом $\mu \in (a,+\infty)$

$$\|M(\mu L - M)^{-1}(L^L_\mu(M))^{p+1}f\|_{\mathfrak{V}} \le \frac{c(f)}{(\mu - a)^{p+2}} \quad \forall f \in \overset{\circ}{\mathfrak{V}}\ ;$$

$$\|(R^L_\mu(M))^{p+1}(\mu L - M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{V};\mathfrak{U})} \le \frac{K}{(\mu - a)^{p+2}}\ .$$

Здесь $c(f)$ – константа, зависящая от выбора элемента f.

Замечание 2. Эквивалентность условий данного определения аналогичным более сложным условиям, использованным в [1, 2], доказана в [20].

Положим $\mathfrak{U}^0 = \ker(R^L_\mu(M))^{p+1}$, $\mathfrak{V}^0 = \ker(L^L_\mu(M))^{p+1}$; $\mathfrak{U}^1$ – замыкание образа оператора $\operatorname{im}(R^L_\mu(M))^{p+1}$ в пространстве $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}^1$ – замыкание образа $\operatorname{im}(L^L_\mu(M))^{p+1}$ в пространстве $\mathfrak{V}$. Обозначим через L_k (M_k) сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^k$ $(D_{M_k} = D_M \cap \mathfrak{U}^k)$, $k = 0, 1$.

Теорема 4 [1, 2]. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален. Тогда*

(i) $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$, $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}^0 \oplus \mathfrak{V}^1$;

(ii) $L_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k; \mathfrak{V}^k)$, $M_k \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^k; \mathfrak{V}^k)$, $k = 0, 1$;

(iii) *существуют операторы* $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}^0; \mathfrak{U}^0)$ *и* $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}^1; \mathfrak{U}^1)$;

(iv) *оператор* $H = M_0^{-1}L_0$ *нильпотентен степени не больше* p;

(v) *существует сильно непрерывная полугруппа* $\{U(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}) : t \geq 0\}$, *разрешающая уравнение* $L\dot{u}(t) = Mu(t)$;

(vi) *оператор* $L_1^{-1}M_1$ *порождает* (C_0)-*непрерывную полугруппу операторов* $\{U_1(t) \equiv U(t)|_{\mathfrak{U}^1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1) : t \geq 0\}$.

Замечание 3. В случае $\ker L \neq \{0\}$ единицей $U(0)$ разрешающей полугруппы уравнения $L\dot{u}(t) = Mu(t)$ является нетривиальный проектор, при этом $\ker L \subset \ker U(0) = \mathfrak{U}^0$, $\operatorname{im} U(0) = \mathfrak{U}^1$.

Обозначим $P = U(0)$, Q – проектор на подпространство $\mathfrak{V}^1$ вдоль подпространства $\mathfrak{V}^0$, $P_0 = I - P$, $Q_0 = I - Q$.

Замечание 4. При доказательстве утверждения (ii) теоремы 4 существенную роль играют равенства $MPu = QMu$, $u \in D_M$, и $LP = QL$. Они в дальнейшем также потребуются в явном виде.

4. Вырожденное эволюционное уравнение с памятью. Рассмотрим начальные задачи Коши

$$u(0) - u_0 = 0 \tag{10}$$

и Шоуолтера

$$P(u(0) - u_0) = 0 \tag{11}$$

для вырожденного эволюционного уравнения с памятью

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + \int_0^t \mathcal{K}(s)u(t-s)ds + f(t), \tag{12}$$

где $\{\mathcal{K}(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{V}) : t \geq 0\}$ — заданное семейство оператор-функций.

Решением задачи (10), (12) (задачи (11), (12)) на отрезке $[0, T]$, $T > 0$, называется функция $u \in C^1([0, T]; \mathfrak{U}) \cap C([0, T]; D_M)$, удовлетворяющая условию (10) (условию (11)) и уравнению (12) на $[0, T]$. Аналогично определяется решение на полуоси.

Здесь подразумевается, что область определения D_M снабжена нормой графика $\|\cdot\|_{D_M} = \|\cdot\|_{\mathfrak{U}} + \|M\cdot\|_{\mathfrak{V}}$ замкнутого оператора M и поэтому является банаховым пространством.

Пусть $\ker L \neq \{0\}$, оператор M сильно (L,p)-радиален. Подействуем па обе части уравнения (12) непрерывным оператором $L_1^{-1}Q$ и получим в силу теоремы 4 и замечания 4 уравнение

$$\dot{v}(t) = L_1^{-1}M_1 v(t) + \int\limits_0^t L_1^{-1}Q\mathcal{K}(s)v(t-s)ds + \int\limits_0^t L_1^{-1}Q\mathcal{K}(s)w(t-s)ds + L_1^{-1}Qf(t), \quad (13)$$

где $Pu(t) = v(t)$, $P_0u(t) = w(t)$, $u(t) = v(t) + w(t)$. Если же па уравнение (12) подействовать непрерывным оператором $M_0^{-1}Q_0$, то получим

$$H\dot{w}(t) = w(t) + \int\limits_0^t M_0^{-1}Q_0\mathcal{K}(s)w(t-s)ds + \int\limits_0^t M_0^{-1}Q_0\mathcal{K}(s)v(t-s)ds + M_0^{-1}Q_0f(t). \quad (14)$$

Таким образом, уравнение (12) сводится к системе уравнений (13) и (14).

Рассмотрим случаи, когда второе слагаемое в правой части равенства (14) тождественно равно пулю. Например, используя условие $\operatorname{im}\mathcal{K}(t) \subset \mathfrak{V}^1$ при $t \geq 0$, нетрудно получить следующий результат.

Теорема 5. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален,* $\operatorname{im}\mathcal{K}(t) \subset \mathfrak{V}^1$ *для всех* $t \geq 0$, $\mathcal{K} \in C([0,+\infty);\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, $f \in C^1([0,+\infty);\mathfrak{V})$, $Q_0f \in C^{p+1}([0,+\infty);\mathfrak{V})$, $u_0 \in D_M$. *Тогда решение задачи* (11), (12) *существует и единственно на всей полуоси* $[0,+\infty)$. *Если к тому же выполняется условие*

$$P_0u_0 = -\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}(Q_0f)^{(k)}(0), \quad (15)$$

то существует единственное на полуоси $[0,+\infty)$ *решение задачи* (10), (12).

□ Если $\operatorname{im}\mathcal{K}(t) \subset \mathfrak{V}^1$, то $Q_0\mathcal{K}(t) \equiv 0$. В этом случае уравнение (14) принимает вид $H\dot{w}(t) = w(t) + M_0^{-1}Q_0f(t)$ и, следовательно, имеет единственное решение

$$w = -\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}(Q_0f)^{(k)} \in C^1([0,+\infty);\mathfrak{U}) \cap C([0,+\infty);D_M)$$

в силу нильпотентности оператора H. При этом задача $w(0) = P_0u_0$ для уравнения (14), а значит, и задача (10) для уравнения (12), имеет решение только в случае выполнения условия (15).

Таким образом, задача (10), (12) (или (11), (12)) сведена к задаче Коши для уравнения

$$\dot{v}(t) = L_1^{-1}M_1v(t) + \int\limits_0^t L_1^{-1}Q\mathcal{K}(s)v(t-s)ds + h(t),$$

где $h(t) = \int\limits_0^t L_1^{-1}Q\mathcal{K}(s)w(t-s)ds + L_1^{-1}Qf(t)$ принадлежит пространству $C^1([0,+\infty];\mathfrak{U}^1)$. Используя теорему 4, нетрудно убедится, что выполняются все условия теоремы 2 о разрешимости такой задачи. ■

Замечание 5. Таким образом, задача Коши для вырожденного эволюционного уравнения (12) является переопределенной в том смысле, что для ее разрешимости требуется выполнение условия (15) согласования данных задачи.

Аналогичный результат нетрудно получить с использованием теоремы 3 вместо теоремы 2 на последнем этапе доказательства.

Теорема 6. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален, для всех $t \geq 0$ $\operatorname{im} \mathcal{K}(t) \subset D_{M_1L_1^{-1}}$, $\mathcal{K} \in C\big([0,+\infty);\mathcal{L}\big(\mathfrak{U};D_{M_1L_1^{-1}}\big)\big)$, $Qf \in C\big([0,+\infty);D_{M_1L_1^{-1}}\big)$, $Q_0f \in C^{p+1}([0,+\infty);\mathfrak{V})$, $u_0 \in D_M$. Тогда решение задачи (11), (12) существует и единственно на всей полуоси $[0,+\infty)$. Если к тому же выполняется условие (15), то существует единственное на полуоси $[0,+\infty)$ решение задачи (10), (12).*

Рассмотрим теперь случай $\mathfrak{U}^0 \subset \ker \mathcal{K}(t)$ при $t \geq 0$.

Теорема 7. *Пусть оператор M сильно $(L,0)$-радиален, $\mathfrak{U}^0 \subset \ker \mathcal{K}(t)$ для всех $t \geq 0$, $\mathcal{K} \in C([0,+\infty);\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, $f \in C^1([0,+\infty);\mathfrak{V})$, $u_0 \in D_M$. Тогда решение задачи (11), (12) существует и единственно на всей полуоси $[0,+\infty)$. Если к тому же выполняется условие*

$$P_0u_0 = -M_0^{-1}Q_0f(0), \tag{16}$$

то существует единственное на полуоси $[0,+\infty)$ решение задачи (10), (12).

□ В случае, когда $\mathfrak{U}^0 \subset \ker \mathcal{K}(t)$, система (13), (14) принимает вид

$$\dot{v}(t) = L_1^{-1}M_1v(t) + \int\limits_0^t L_1^{-1}Q\mathcal{K}(s)v(t-s)ds + L_1^{-1}Qf(t), \tag{17}$$

$$H\dot{w}(t) = w(t) + \int\limits_0^t M_0^{-1}Q_0\mathcal{K}(s)v(t-s)ds + M_0^{-1}Q_0f(t). \tag{18}$$

Однозначная разрешимость задачи Коши $v(0) = Pu_0$ для уравнения (17) следует из теорем 2 и 4. Подставим найденную функцию v в уравнение (18). При $p = 0$ оператор $H = 0$ по теореме 4 (iv), поэтому функция

$$w(t) = -\int\limits_0^t M_0^{-1}Q_0\mathcal{K}(s)v(t-s)ds - M_0^{-1}Q_0f(t)$$

является решением уравнения (18). Условие (16), тогда является необходимым для разрешимости задачи Коши $w(0) = P_0u_0$ для уравнения (18). ■

С помощью теоремы 3 аналогичным образом получим утверждение.

Теорема 8. *Пусть оператор M сильно $(L,0)$-радиален, $\mathfrak{U}^0 \subset \ker \mathcal{K}(t)$ для всех $t \geq 0$, $\mathcal{K} \in C([0,+\infty);\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, $Q\mathcal{K} \in C\big([0,+\infty);\mathcal{L}\big(\mathfrak{U};D_{M_1L_1^{-1}}\big)\big)$, $Q_0f \in C^1([0,+\infty);\mathfrak{V})$, $Qf \in C\big([0,+\infty);D_{M_1L_1^{-1}}\big)$, $u_0 \in D_M$. Тогда решение задачи (11), (12) существует и единственно на всей полуоси $[0,+\infty)$. Если к тому же выполняется условие (16), то существует единственное на полуоси $[0,+\infty)$ решение задачи (10), (12).*

При произвольном $p \in \mathbb{N}$, используя теорему 1, докажем лишь локальную разрешимость рассматриваемых задач.

Теорема 9. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален, $\mathfrak{U}^0 \subset \ker \mathcal{K}(t)$ для всех $t \in [0,T_1]$, $\mathcal{K} \in C([0,T_1];\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, $Q\mathcal{K} \in C_0^p([0,T_1];\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, $f \in C^1([0,T_1];\mathfrak{V})$, $Qf \in C_0^{p+1}([0,T_1];\mathfrak{V})$, $u_0 \in D_M$, $Pu_0 \in D_{(L_1^{-1}M_1)^{p+1}}$. Тогда при некотором $T \in (0,T_1]$ решение задачи (11), (12) существует и единственно на отрезке $[0,T]$. Если к тому же выполняется условие (15), то существует единственное на полуоси $[0,+\infty)$ решение задачи (10), (12).*

□ По теореме 1 получим существование единственного решения $v \in C^{p+1}([0,T];\mathfrak{U}^1) \cap C^p\big([0,T];D_{M_1}\big)$ задачи Коши $v(0) = Pu_0$ для уравнения (17). Подставив его в уравнение (18), найдем решение $w(t) = -\sum\limits_{k=0}^{p} H^k h^{(k)}(t)$ класса $C^1([0,T];\mathfrak{U}^0)$, где функция $h(t) = \int\limits_0^t M_0^{-1}Q_0\mathcal{K}(s)v(t-s)ds + M_0^{-1}Q_0 f(t)$ имеет необходимую гладкость. ■

5. Линеаризованная интегро-дифференциальная модель Осколкова. Рассмотрим начально-краевую задачу для интегро-дифференциальной системы уравнений Осколкова

$$(1-\chi\Delta)v_t(x,t) = \nu\Delta v(x,t) - (\tilde{v}\cdot\nabla)v(x,t) - (v\cdot\nabla)\tilde{v}(x,t) - r(x,t) +$$

$$+\int\limits_0^t K(s)\Delta v(x,t-s)ds + h(x,t), \quad (x,t) \in \Omega\times[0,+\infty), \tag{19}$$

$$\nabla\cdot v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Omega\times[0,+\infty), \tag{20}$$

$$v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega\times[0,+\infty), \tag{21}$$

$$v(x,0) = v_0(x), \quad x \in \Omega. \tag{22}$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, $T > 0$. Параметр $\chi > 0$ характеризует упругие свойства жидкости, а параметр $\nu > 0$ — её вязкие свойства. Вектор-функции $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ (вектор скорости жидкости) и $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ (градиент давления) неизвестны. Вектор-функция $\tilde{v} = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \ldots, \tilde{v}_n)$, $\tilde{v}_k = \tilde{v}_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, задана и означает стационарное решение исходной системы. Также заданы функции $N : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $h : \Omega\times[0,+\infty) \to \mathbb{R}$.

Эта система моделирует в линейном приближении динамику вязкоупругой несжимаемой жидкости [5] в окрестности стационарного решения $\tilde{v}$.

Редуцируем задачу (19)–(22) к задаче Шоуолтера (11) для уравнения (12). Для этого введем обозначения $\mathbb{L}_2 = (L_2(\Omega))^n$, $\mathbb{H}^1 = (W_2^1(\Omega))^n$, $\mathbb{H}^2 = (W_2^2(\Omega))^n$. Замыкание множества $\mathcal{L} = \{v \in (C_0^\infty(\Omega))^n : \nabla\cdot v = 0\}$ по норме $\mathbb{L}_2$ обозначим через $\mathbb{H}_\sigma$, а по норме $\mathbb{H}^1$ — через $\mathbb{H}_\sigma^1$. Будем использовать также обозначение $\mathbb{H}_\sigma^2 = \mathbb{H}_\sigma^1 \cap \mathbb{H}^2$. Обозначим через $\mathbb{H}_\pi$ ортогональное дополнение к $\mathbb{H}_\sigma$ в $\mathbb{L}_2$, через $\Sigma : \mathbb{L}_2 \to \mathbb{H}_\sigma$, $\Pi = I - \Sigma$ — соответствующие ортопроекторы.

В пространстве $\mathfrak{L}$ рассмотрим оператор $A = \Sigma\Delta$, который, будучи продолженным до замкнутого оператора в пространстве $\mathbb{H}_\sigma$ с областью определения $\mathbb{H}^2_\sigma$, имеет вещественный, отрицательный, дискретный, конечнократный спектр, сгущающийся только на $-\infty$ [21]. Обозначим через $\{\lambda_k\}$ его собственные значения, занумерованные по невозрастанию с учетом кратности, а через $\{\varphi_k\}$ — ортонормированную систему соответствующих собственных функций, образующую базис в $\mathbb{H}_\sigma$.

Пусть $\tilde{v} \in \mathbb{H}^1$. Тогда формулой $Dw = \nu\Delta w - (\tilde{v}\cdot\nabla)w - (w\cdot\nabla)\tilde{v}$ зададим оператор $D \in \mathcal{L}(\mathbb{H}^2_\sigma;\mathbb{L}_2)$.

Учитывая уравнение несжимаемости (20), положим

$$\mathfrak{U} = \mathbb{H}^2_\sigma \times \mathbb{H}_\pi, \quad \mathfrak{V} = \mathbb{L}_2 = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi. \tag{23}$$

Таким образом, элемент $u \in \mathfrak{U}$ имеет вид $u = (v, r)$, а элемент $w \in \mathfrak{V}$ — вид $w = (y, z)$, где $y = \Sigma w$, $z = \Pi w$. Формулой

$$L = \begin{pmatrix} I - \chi A & \mathbb{O} \\ -\chi\Pi\Delta & \mathbb{O} \end{pmatrix} \tag{24}$$

определяется оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$. Учитывая отрицательность спектра $\sigma(A)$, имеем $\chi^{-1} \notin \sigma(A)$, поэтому $\ker L = \{0\} \times \mathbb{H}_\pi$. При заданном $\tilde{v} \in \mathbb{H}^1$ формулой

$$M = \begin{pmatrix} \Sigma D & \mathbb{O} \\ \Pi D & -I \end{pmatrix} \tag{25}$$

определяется оператор $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$.

Теорема 10 [22]. *Пусть пространства $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ определены равенствами* (23), *а операторы L и M — равенствами* (24) *и* (25) *соответственно, $\chi \neq 0$, $\chi^{-1} \notin \sigma(A)$. Тогда оператор M сильно $(L, 0)$-радиален, при этом*

$$P = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ \chi\Pi\Delta(I - \chi A)^{-1}\Sigma D + \Pi D & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ -\chi\Pi\Delta(I - \chi A)^{-1} & \mathbb{O} \end{pmatrix}.$$

Из теоремы 10 следует, что $\mathfrak{U}^0 = \ker P = \{0\} \times \mathbb{H}_\pi$. При $s \geq 0$ определим операторы $\mathcal{K}(s) : \mathbb{H}^2_\sigma \times \mathbb{H}_\pi \to \mathbb{L}_2$, $\mathcal{K}(s)(v, r) = N(s)\Delta v$. Очевидно, что $\mathfrak{U}^0 \subset \mathcal{K}(s)$ при всех $s \geq 0$, поэтому с помощью теорем 10 и 7 получим следующее утверждение.

Теорема 11. *Пусть $N \in C([0,+\infty);\mathbb{R})$, $h \in C^1([0,+\infty);\mathbb{L}_2)$, $v_0 \in \mathbb{H}^2_\sigma$. Тогда решение задачи* (19)–(22) *существует и единственно.*

□ Из условий на функцию N и построения операторов $\mathcal{K}(s)$ следует, что $\mathcal{K} \in C([0,+\infty);\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$. Из вида полученного в теореме 10 проектора P следует, что условие (22) эквивалентно условию Шоуолтера (11). ■

6. Заключение. В работе получены теоремы существования и единственности решения начальных задач для некоторых классов линейных эволюционных уравнений с эффектами памяти. Для невырожденных уравнений такого рода получены условия глобальной однозначной разрешимости задачи Коши в смысле классических решений и локальной ее разрешимости в классах решений повышенной гладкости. Для эволюционных уравнений с вырожденным оператором при производной исследована однозначная разрешимость начальных задач Коши и Шоуолтера. Полученные абстрактные результаты использованы для исследования глобальной но времени разрешимости начально-краевой задачи для системы уравнений Осколкова, описывающей динамику вязкоупругой жидкости. Аналогичным образом можно использовать полученные результаты при рассмотрении других начально-краевых задач для интегро-дифференциальных систем уравнений в частных производных

Литература

1. Федоров В.Е. Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов // Алгебра и анализ. – 2000. – Т. 12, вып. 3. – С. 173-200.
2. Свиридюк Г.А., Федоров В.Е. Линейные уравнения соболевского типа / Челябинск: Челяб. гос. ун-т, 2003. — 179 с.
3. Coleman B.D., Gurtin M. E., Angew Z. Equipresence and costitutive equations for rigid heat conductors // Math. Phys. – 1967. – Vol. 18. – P. 199-208.
4. Gurtin M.E., Pipkin A.C. A general theory of heat conduction with finite wave speeds // Arch. Rational Mech. Anal. – 1968. – Vol. 31. – P. 113-126.
5. Осколков А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина-Фойгта и жидкостей Олдройта // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – Т. 179. – С. 126-164.
6. Giorgi C., Marzocchi A. Asymptotic behavior of a semilinear problem in heat conduction with memory // Nonlinear Differ. Equ. Appl. – 1998. – Vol. 5. – P. 333–354.
7. Grasselli M., Pata V. Uniform attractors of nonautonomous dynamical systems with memory. In the book: Progress in nonlinear differential equations and their applications / Basel: Birkhäuser Verlag, 2002. – Vol. 50. – P. 155-178.
8. Gatti S., Grasselli M., Pata V., Squassina M. Robust exponential attractors for a family of nonconserved phase-field systems with memory // Discrete and Continuous Dynamical Systems. – 2005. – 12, №5. – P. 1019-1029.
9. Grasselli M., Squassina M. Exponential stability and singular limit for a linear thermoelastic plate with memory effects // Advances in Mathematical Sciences and Applications. – 2006. – 16, №1. – P. 15-31.
10. Федоров В.Е., Стахеева О.А. О локальной разрешимости линейных эволюционных уравнений с памятью // Вестник Южно-Уральского гос. ун-та. Сер. Мат. моделирование и программирование. – 2008. – 27 (127); 2. – С. 104-109.
11. Стахеева О.А. Локальная разрешимость одного класса линейных уравнений с памятью // Вестник Челябинского гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2009. – 20 (158); 11. – С. 70-76.
12. Федоров В.Е., Стахеева А.В. О разрешимости линейных уравнений соболевского типа с эффектом памяти // Неклассические уравнения математической физики: сб. науч. работ / Новосибирск: Изд-во Ин-та математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 2010. – С.245-261.
13. Орлов С.С. Вырожденное интегро-дифференциальное уравнение в банаховых пространствах и его приложения // Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. – 2010. – 3, №.1. – С. 54-60.
14. Фалалеев М.В., Орлов С.С. Вырожденные интегро-дифференциальные уравнения специального вида в банаховых пространствах и их приложения // Вестник Южно-Уральского гос. ун-та. Сер. Мат. моделирование и программирование. 2011. – 4 (211); 7. – С. 100-110.
15. Фалалеев М.В., Орлов С.С. Интегро-дифференциальные уравнения с вырождением в банаховых пространствах и их приложения в математической теории упругости // Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. – 2011. – 4, №1. – С. 118-134.

16. Фалалеев М.В., Орлов С.С. Вырожденные интегро-дифференциальные операторы в банаховых пространствах и их приложения // Изв. вузов. – 2011. – №10. – С. 68-79.
17. Фалалеев М. В. Интегро-дифференциальные уравнения с фредгольмовым оператором при старшей производной в банаховых пространствах и их приложения // Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. – 2012. – 5, №1. – С. 90-102.
18. Звягин В.Г., Турбин М.В. Исследование начально-краевых задач для математических моделей движения жидкостей Кельвина-Фойгта // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2009. – 31. – С. 3-144.
19. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы / М.: Иностр. лит., 1962. – 830 с.
20. Федоров В.Е. Свойства псевдорезольвент и условия существования вырожденных полугрупп операторов // Вестник. Челяб. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2009. – 20 (158); 11. – С. 12-19.
21. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / М.: Физматлит, 1961. – 204 с.
22. Иванова Н.Д., Федоров В.Е., Комарова К.М. Нелинейная обратная задача для системы Осколкова, линеаризованной в окрестности стационарного решения // Вестник Челяб. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2012. – 26 (280); 15. – С.49-70.

ON SOLVABILITY OF EVOLUTION EQUATIONS WITH MEMORY

V.E. Fedorov, O.A. Stakheeva

Chelyabinsk State University,
Kashirin Brothers St., 129, Chelyabinsk, 454001, Russia, e-mail: kar@csu.ru, osta@csu.ru.

Abstract. Conditions of unique solvability of the Cauchy problem to a linear integro-differential equation with memory in a Banach space are found by methods of the operator semigroup theory. Solutions are supposed in the classical sense. They are defined on the temporal semiaxis and in the sense of smoother solutions on a segment. These results are used at the proof of unique solution existence both the Cauchy problem on semiaxis and the Showalter problem to a degenerate linear evolution equation with memory in a Banach space. General results are applied to research of unique solvability of an initial-boundary value problem in an cylinder unbounded with respect to time for the linearized integro-differential Oskolkov system of equations describing dynamics of viscoelastic fluid.

Ключевые слова: evolution equation, operator semigroup, equation with memory, integro-differential equation, initial boundary value problem, Oskolkov's equations system.