MSC 17B63

О СЕРИИ АЛГЕБР ПУАССОНА С ДРОБНЫМИ ЭКСПОНЕНТАМИ

О.И. Череватенко

Ульяновский государственный педагогический университет имени И.Н. Ульянова,
пл. 100-летия рождения В.И. Ленина, 4, Ульяновск, 432700, Россия, e-mail: chai@pisem.net

Аннотация. В работе построена дискретная серия алгебр Пуассона с различными дробными экспонентами на интервале (4,5).

Ключевые слова: алгебра Пуассона, алгебра Ли, экспонента алгебры, многообразие алгебр.

На протяжение всей работы предполагается, что основное поле имеет нулевую характеристику.

Все необходимые определения и сведения из теории PI-алгебр можно найти, например, в монографии [1]. Обозначим через $K\{X\}$ (абсолютно) свободную линейную алгебру от счетного множества свободных образующих $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ над полем K. Пусть A — некоторая K-алгебра, $\mathrm{Id}(A)$ — идеал тождеств алгебры A. Для произвольного натурального n обозначим через P_n пространство в $K\{X\}$, состоящее из полилинейных элементов степени n от переменных $x_1, \ldots, x_n$. Обозначим

$$P_n(A) = P_n/(P_n \cap \mathrm{Id}(A))\,, \qquad c_n(A) = \dim\ P_n(A)\,.$$

Хорошо известно, что в случае основного поля нулевой характеристики идеал тождеств произвольной алгебры A порождается совокупностью полилинейных тождеств. Поэтому одной из важных числовых характеристик является последовательность $\{c_n(A)\}_{n\geq 1}$, которая называется *последовательностью коразмерностей* алгебры A. Если последовательность $\{c_n(A)\}_{n\geq 1}$ экспоненциально ограничена, то введем в рассмотрение *нижнюю и верхнюю экспоненты*:

$$\underline{\exp}(A) = \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)}\,, \qquad \overline{\exp}(A) = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)}\,.$$

Если $\underline{\exp}(A) = \overline{\exp}\,(A)$, то эту величину обозначим через $\exp(A)$ и будем называть *экспонентой алгебры* A.

В случае ассоциативных алгебр А. Регевым [2] показано, что рост любой PI-алгебры (алгебры с нетривиальным тождеством) экспоненциально ограничен. Опираясь на результаты А. Регева, С.А. Амицур выдвинул гипотезу о том, что для любой ассоциативной PI-алгебры экспонента существует и является целым числом. Данная гипотеза была подтверждена А. Джамбруно и М.В. Зайцевым [3].

Ничего подобного не наблюдается в неассоциативных алгебрах. В области алгебр Ли хорошо изученным многообразием сверхэкспоненциального роста является многообразие $\mathbf{AN}_2$, построенное И.Б. Воличенко [4]. Первый пример алгебр Ли с дробной экспонентой построен М.В. Зайцевым и С.П. Мищенко [5]. В области алгебр Пуассона примеры многообразий алгебр сверхэкспоненциального роста и алгебры с дробной экспонентой построены С.М. Рацеевым [6].

Пусть $\mathbf{A}^2$ – многообразие всех метабелевых алгебр Ли, определенное тождеством

$$(x_1x_2)(x_3x_4) \equiv 0.$$

Обозначим через $M_{s-1} = F_{s-1}(\mathbf{A}^2)$, $s = 3, 4, \ldots$ относительно свободную алгебру этого многообразия с множеством свободных образующих $\{z_1, z_2, \ldots, z_{s-1}\}$. Рассмотрим линейное преобразование d векторного пространства $\langle z_1, z_2, \ldots, z_{s-1}\rangle_K$, действующее по правилу $z_i d = z_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, s-2$, $z_{s-1}d = 0$. В этом случае d можно продолжить до дифференцирования алгебры M_{s-1}, которое обозначим той же буквой. Линейную оболочку этого дифференцирования $\langle d\rangle$ можно считать одномерной алгеброй Ли с нулевым умножением. Построим полупрямое произведение алгебр $L_s = M_{s-1} \leftthreetimes \langle d\rangle$.

В векторном пространстве $PL_s = L_s \oplus K$ определим операции $\cdot$ и $\{,\}$ следующим образом:

$$(a+\alpha)\cdot(b+\beta) = (\beta a + \alpha b) + \alpha\beta\,,$$
$$\{a+\alpha, b+\beta\} = [a,b]\,, \quad a,b \in L_s\,, \quad \alpha,\beta \in K\,.$$

Нетрудно проверить, что PL_s является алгеброй Пуассона. Данная конструкция получения алгебр Пуассона из любой лиевой алгебры была введена в работе [7].

Теорема. *Для экспонент алгебр Пуассона PL_s выполняются строгие неравенства:*

$$4 = \exp(PL_3) < \ldots < \exp(PL_s) < \exp(PL_{s+1}) < \ldots < 5, \;\; s = 4, 5, \ldots\,.$$

□ В работе [8] показано, что для экспонент алгебр Ли L_s выполняются такие строгие неравенства:

$$3 = \exp(L_3) < \ldots < \exp(L_s) < \exp(L_{s+1}) < \ldots < 4, \;\; s = 4, 5, \ldots\,.$$

А из теоремы 2 работы [6] следует, что если существует экспонента алгебры Ли L_s, то будет существовать и экспонента алгебры Пуассона PL_s, причем выполнено равенство $\exp(PL_s) = \exp(L_s) + 1$, $s = 3, 4, \ldots$. ■

Литература

1. Бахтурин Ю.А. Тождества в алгебрах Ли / М.: Наука, 1985.
2. Regev A. Existence of identities in $A \otimes B$ // Israel J. Math. – 1972. – 11. – P.131-152.
3. Giambruno A., Zaicev M.V. Exponential codimension growth of P.I. algebras: an exact estimate // Adv. Math. – 1999. – 142. – P.221-243.
4. Воличенко И.Б. О многообразиях алгебр Ли AN_2 над полем характеристики нуль // ДАН БССР. – 1981. – 25:12. – С.1063-1066.
5. Mishchenko S.P., Zaicev M.V. An example of a variety of Lie algebras with a fractional exponent // Journal of Mathematical Sciences (New York). – 1999. – 93:6. – P.977-982.
6. Рацеев С.М. Взаимосвязь алгебр Пуассона и алгебр Ли на языке тождеств // Матем. заметки. – 2014. – 96:4. – С.567-577.

7. Рацеев С.М. Алгебры Пуассона полиномиального роста // Сиб. матем. журн. – 2013. – 54:3. – С.700-711.
8. Malyusheva O.A., Mishchenko S.P., Verevkin A.B. Series of varieties of Lie algebras of different fractional exponents // Dokl. Bolg. AN. – 2013. – 66:3. – P.321-330.

ON SERIES OF POISSON ALGEBRAS OF DIFFERENT FRACTIONAL EXPONENTS

O.I. Cherevatenko

Ulyanovsk State I.N. Ulyanov Pedagogical University,
100th rozhdeniya V.I. Lenina pl., 4, Ulyanovsk, 432700, Russia, e-mail: chai@pisem.net

Abstract. Discrete series of Poisson algebras of different fractional exponents in interval (4,5) is built.

Key words: Poisson algebra, Lie algebra, exponent of algebra, variety of algebras.