MSC 37J05

О ЧИСЛЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ТИПОВ ОБРАТИМЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Ю.П. Вирченко, А.В. Субботин

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. Вводится понятие спектрального типа для обратимых динамических систем четной размерности, изучение которых начато в предыдущих работах авторов. Задача о перечислении этих спектральных типов сводится к перечислению спектральных типов матриц четной размерности, которые обладают «симметричным» спектральным разложением. Ставится комбинаторная задача о вычислении числа $\bar{N}_{2n}$ спектральных типов таких матриц размерности $2n$ и дается ее решение в терминах производящей функции.

Ключевые слова: обратимые динамические системы, касательная динамическая система, спектральный тип матрицы, производящая функция.

1. Введение. Пусть $\mathfrak{M}_n$ линейное многообразие $\mathfrak{M}_n$ квадратных матриц фиксированного порядка $n \in \mathbb{N}$. Каждая матрица $\mathcal{A} \in \mathfrak{M}_n$ характеризуется набором $\mathsf{n} = \langle n_1, n_2, n_3, ...\rangle$, в котором $n_j \in \mathbb{N}_+$, $j \in \mathbb{N}$ и $n_1 + 2n_2 + 3n_3 + ... = n \equiv |\mathsf{n}|$. Этот набор определяет структуру ее спектрального (канонического треугольного жорданова) представления (см., например, [1])

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{j=1}^{s} \bigoplus_{k=1}^{n_j} (\lambda_{j,k} \mathcal{I}_j + \mathcal{N}_j) , \tag{1}$$

где $\mathcal{I}_j$ – единичные матрицы порядка j, $\lambda_{j,k}$ – собственные числа (возможно, среди них есть совпадающие) матрицы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{N}_j$ – стандартные нильпотентные матрицы порядка j с тем же порядком нильпотентности, $\mathcal{N}_j^j = 0$ и $\mathcal{N}_j^{j-1} \neq 0$, $j = 1 \div s$, где s – число клеток Жордана в каноническом разложении матрицы (число ненулевых компонент в наборе n). Таким образом, каждая нильпонентная матрица порядка $m \in \mathbb{N}$ в жордановом представлении любой матрицы $\mathcal{A} \in \mathfrak{M}_n$ имеет вид

$$(\mathcal{N})_{kl} = \delta_{k+1,l} \,, \quad k, l = 1 \div m \,.$$

Введенную характеристику n назовем *типом спектрального разложения* (1) матрицы $\mathcal{A}$. Квадратные матрицы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ одинакового порядка $n \in \mathbb{N}$ эквивалентны друг другу, если имеется связывающая их неособенная матрица $\mathcal{U}$, $\det \mathcal{U} \neq 0$ такая, что $\mathcal{U}\mathcal{A}\mathcal{U}^{-1} = \mathcal{B}$. Очевидно, что необходимым условием для того, чтобы матрицы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ из $\mathfrak{M}_n$ были эквивалентны друг другу, является совпадение их типа спектрального разложения. Поэтому линейное многообразие $\mathfrak{M}_n$ представляется в виде дизъюнктивного объединения классов $\mathfrak{K}_{\mathsf{n}}$ матриц фиксированного спектрального типа n. Это является следствием классической теоремы Жордана (см., например, [1]) о приведении матриц к жорданову представлению. Будем, далее, обозначать посредством N_n число классов $\mathfrak{K}_\mathsf{n}$, составляющих это объединение. Представляет интерес оценка (вычисление) этого числа для каждого значения $n \in \mathbb{N}$.

Наряду с поставленной задачей об оценке числа N_n для нас в этом сообщении основную роль будет играть другая комбинаторная задача. Обобщим теперь понятие эквивалентности матриц следующим образом. Будем говорить, что квадратные матрицы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ одинакового порядка $n \in \mathbb{N}$ *спектрально эквивалентны* друг другу, если имеются две неособенные матрицы $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$, $\det \mathcal{U}_k \neq 0$, $k = 1, 2$ такие, что $\mathcal{U}_1 \mathcal{A} \mathcal{U}_2^{-1} = \mathcal{B}$. Введем теперь, в дополнение к типу спектрального разложения, характеристику, которая представляется набором $\mathsf{k} = \langle k_1, k_2, ...\rangle$, где каждое число k_j, $j = 1 \div s$ равно числу тех клеток Жордана в j-й компоненте разложении (1), для которых $\lambda_{j,k} = 0$. Тогда $k_j \leq n_j$, $j = 1 \div s$. Набор k будем называть *спектральной характеристикой нулевого инвариантного пространства* матрицы $\mathcal{A}$. Нетрудно доказать, что матрицы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ одинакового порядка $n \in \mathbb{N}$ *спектрально эквивалентны* друг другу в том и только в том случае, когда у них совпадают: спектральный тип и спектральный тип нулевого пространства. Аналогично указанному выше распределению матриц линейного многообразия $\mathfrak{M}_n$ по классам $\mathfrak{K}_\mathsf{n}$, каждый из этих классов разлагается дизъюнктивно на классы $\mathfrak{K}_{\mathsf{n},\mathsf{k}}$ спектрально эквивалентных матриц. В связи с этим, возникает комбинаторная задача об оценке числа $N_{n,k}$ всех классов $\mathfrak{K}_{\mathsf{n},\mathsf{k}}$, матриц с фиксированными значениями $|\mathsf{n}|$ и $|\mathsf{k}| = k_1 + k_2 + ... + k_s$. Ясно, что, вследствие принципа умножения, эта задача имеет простое решение в терминах введенной выше функции N_m, а именно, $N_{n,k} = N_k N_{n-k}$ (см. по этому поводу доказательство теоремы 3).

Значение числа $N_{n,k}$ тесно связано с числом $\bar{N}_{n,k}$ спектральных типов линейных обратимых динамических систем. Линейную динамическую систему четной размерности $2n$, то есть систему обыкновенных дифференциальных уравнений для вектор-функции $X(t)$, $\in \mathbb{R}$ вида

$$\dot{X} = \mathcal{G} X$$

с постоянной матрицей $\mathcal{G} \in \mathfrak{M}_{2n}$ будем называть обратимой (см., [2-6]), если в спектральном разложении (1) для каждого значения $j \in \mathbb{N}$ с ненулевой компонентой n_j в наборе n выполняется: 1) число m_j всех составляющих спектрального разложения (1) с $\lambda_{j,k} \neq 0$ четно; 2) множество всех таких составляющих представимо в виде дизъюнктивного объединения двух множеств с числом $m_j/2$ элементов в каждом таким образом, что их элементы $(\lambda_{j,k'} \mathcal{I}_j + \mathcal{N}_j)$ и $(\lambda_{j,k''} \mathcal{I}_j + \mathcal{N}_j)$ находятся в таком биективном соответствии, что $\lambda_{j,k'} = -\lambda_{j,k''}$. Характеристика $\bar{N}_{n,k}$ линейных обратимых систем, введенная выше, равна числу спектральных типов матриц $\mathcal{G}$ порядка $2n$, у которых суммарный порядок клеток Жордана $(\lambda_{j,k} \mathcal{I}_j + \mathcal{N}_j)$ с $\lambda_{j,k} = 0$, равна $2k$.

2. Число спектральных типов N_n. Для решения задачи о вычислении (оценке) числа N_n введем в рассмотрение производящую функцию

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n N_n\,, \qquad N_0 = 1 \tag{2}$$

для $z \in \mathbb{C}$ так, что

$$N_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{d^n F(z)}{dz^n}\right)_{z=0}$$

Теорема 1. *Производящая функция является аналитической внутри единичного круга, в котором она представляется формулой*

$$F(z) = \prod_{j=1}^{\infty}(1 - z^j)^{-1} \tag{3}$$

□ Спектральный тип $\mathsf{n} = \langle n_1, n_2, ...\rangle$ матрицы $\mathcal{A}$ порядка n определяется ее каноническим жордановым представлением, к которому она приводится некоторым преобразованием $\mathfrak{U}\mathcal{A}\mathfrak{U}^{-1}$ с некоторой неособенной матрицей $\mathfrak{U}$ так, что n_j – числа клеток Жордана порядка j в этом представлении. Тогда для каждого фиксированного $n \in \mathbb{N}$ число N_n является числом решений уравнения $n_1 + 2n_2 + 3n_3 + ... = n$ так, что оно представляется следующей суммой

$$N_n = \sum_{\substack{n_1, n_2, ...: \\ n_1 + 2n_2 + 3n_3 + ... = n}} 1\,.$$

Подставим это выражение и представление

$$z^n = \prod_{j=1}^{\infty} z^{jn_j}$$

в определение (2) производящей функции $F(z)$,

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{n_1, n_2, ...: \\ n_1 + 2n_2 + 3n_3 + ... = n}} \prod_{j=1}^{\infty} z^{jn_j}$$

Переставим суммирования в этом разложении но правилу:

$$\sum_{n=0}^{N} \sum_{n_1, n_2, n_3 ...: = n} g(n_1, n_2, n_3, ...) = \sum_{\substack{n_1, n_2, ...: \\ n_1 + 2n_2 + 3n_3 + ... \le N}} g(n_1, n_2, n_3, ...),$$

выполняющемуся для любой функции $g(n_1, n_2, ...)$, с последующим переходом к пределу $N \to \infty$. Перестановка суммирований возможна в области сходимости степенного ряда (1). В результате, получаем

$$F(z) = \sum_{n_1, n_2, ... = 0}^{\infty} \prod_{j=1}^{\infty} z^{jn_j}\,.$$

Выражение в правой части факторизуется в бесконечное произведение рядов, что, опять же, допустимо в области сходимости степенного ряда

$$\sum_{n_1,n_2,\ldots=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{\infty} z^{jn_j} = \prod_{j=1}^{\infty}(1-z^j)^{-1}\,. \ \blacksquare$$

Число N_n при малых значениях n легко вычисляется. В частности, $N_1 = 1$, $N_2 = 2$, $N_3 = 3$ и $N_4 = 5$, где в последнем случае возможные спектральные типы даются следующими наборами $\langle 4,0,0,0\rangle$, $\langle 2,1,0,0\rangle$, $\langle 1,0,1,0\rangle$, $\langle 0,2,0,0\rangle$, $\langle 0,0,0,1\rangle$. Однако, комбинаторная функция N_n очень быстро возрастает и возникает задача о ее асимптотическом вычислении при $n\to\infty$, в простейшем случае, о получении для нее хорошей верхней оценки. Ниже мы даем подход к решению такой задачи, использующий формулу (3), и получении, в рамках этого метода, простой верхней оценки числа N_n.

Обозначим

$$G_n = \left[\frac{d^n}{dz^n}F(z)\right]_{z=0}.$$

Тогда справедливы следующие алгебраические преобразования

$$G_{n+1} = \left[\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{d}{dz}F(z)\right)\right]_{z=0} = \left[\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{d}{dz}\prod_{j=1}^{\infty}(1-z^j)^{-1}\right)\right]_{z=0} =$$

$$= \left[\frac{d^n}{dz^n}\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{d}{dz}(1-z^l)^{-1}\right)\prod_{j\neq 1}^{\infty}(1-z^j)^{-1}\right]_{z=0} = \left[\frac{d^n}{dz^n}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{lz^{l-1}}{(1-z^l)^2}\prod_{j\neq 1}^{\infty}(1-z^j)^{-1}\right]_{z=0} =$$

$$= \left[\frac{d^n}{dz^n}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{lz^{l-1}}{(1-z^l)}F(z)\right]_{z=0} = \sum_{l=1}^{\infty} l\left[\frac{d^n}{dz^n}\frac{z^{l-1}}{(1-z^l)}F(z)\right]_{z=0} =$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} l\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\left[\frac{d^m}{dz^m}\frac{z^{l-1}}{(1-z^l)}\right]_{z=0}\cdot\left[\frac{d^{n-m}}{dz^{n-m}}F(z)\right]_{z=0} =$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} l\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}G_{n-m}\left[\frac{d^m}{dz^m}\frac{z^{l-1}}{(1-z^l)}\right]_{z=0}$$

Вычисляя производную в правой части

$$\left[\frac{d^m}{dz^m}\frac{z^{l-1}}{(1-z^l)}\right]_{z=0} = \left[\frac{d^m}{dz^m}\sum_{k=1}^{\infty}z^{lk-1}\right]_{z=0} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(lk-1)!}{(lk-m-1)!}\cdot\theta(lk-m-1)\cdot\delta_{m,lk-1}\,,$$

где $\theta(m) = \{1, m\in N_+0; 0, m<0\}$ при $m\in\mathbb{Z}$. В результате, получаем рекуррентное соотношение для величин G_n, $n\in\mathbb{N}$,

$$G_{n+1} = \sum_{l=1}^{\infty} l\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}G_{n-m}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(lk-1)!}{(lk-m-1)!}\cdot\theta(lk-m-1)\cdot\delta_{m,lk-1}\,.$$

Так как $G_n/n! = N_n$, то из этой рекуррентной связи следует связь между числами N_n,

$$N_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{l=1}^{\infty} l \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} N_{n-m} \sum_{k=1}^{\infty} \cdot\theta(lk-m-1)\cdot\delta_{m,lk-1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k,l=1}^{\infty} l N_{n-lk+1}\theta(n-lk+1) =$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{\substack{k,l:\\ 1\le lk\le n+1}} l N_{n-lk+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{p=1}^{n+1} N_{n-p+1}\sum_{\substack{l\,:p/l,\\ p\ge l\ge 1}} l = \frac{1}{n+1}\sum_{p=1}^{n+1} N_{n-p+1} L_p\,.$$

Комбинаторная функция L_p, $p \in \mathbb{N}$ в правой части представима в виде

$$L_p = \sum_{\substack{l\,:\,p/l\\ 1\le l\le p}} l = \prod_{\substack{q-\text{простые:}\\ p=\prod q}} (1+q)\,. \tag{4}$$

Таким образом, нами доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Числа N_n, $n \in \mathbb{N}$ удовлетворяют системе рекуррентных соотношений*

$$N_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{p=1}^{n+1} N_{n-p+1} L_p\,, \tag{5}$$

где комбинаторная функция L_p, $p \in \mathbb{N}$ определяется равенством (4).

На основе полученного рекуррентного соотношения имеется возможность вычисления комбинаторной функции N_n, не прибегая к перебору возможных спектральных типов матрицы для каждого фиксированного значения n. В частности, на основе легко получается верхняя оценка числа N_n для больших значений n.

Следствие. *Имеет место следующая верхняя оценка*

$$N_n \le \frac{2n!}{n+2}(1+\ln(1+n))^{n+1}\,. \tag{5}$$

□ Заметим, что для значений $p = 1, 2, ..., n+1$ выполняется N_{n-p+1}, ввиду монотонного возрастания N_n. Тогда из (5) следует, что $N_{n+1} \le N_n \max\{L_p; p = 1 \div n+1\}$.

Получим эффективную верхнюю оценку для комбинаторной функции L_p. Пусть $\langle 1, n_1, ..., n_s = p\rangle$ – упорядоченный по возрастанию набор частных от деления числа p, на его делители. При этом $s \le p$ и $n_j \ge j$, $j = 1 \div s$. Тогда

$$L_p = p\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{n_j} \le p\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{j}\,.$$

Следовательно, $N_{n+1} \le N_n S_{n+1}$, где

$$S_n = \sum_{l=1}^{n}\frac{1}{l}\,.$$

Итерация последнего неравенства приводит к оценке

$$N_n \leq n! \prod_{l=1}^{n} S_l$$

так, что для получения нужного неравенства нужно оценить сверху произведение сумм S_l. Ввиду монотонного убывания функции x^{-1}, имеем

$$\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{l} \leq 1 + \int_{1}^{n} \frac{dx}{x} = 1 + \ln n\,.$$

Тогда справедлива оценка сверху произведения

$$\prod_{l=1}^{n} S_l \leq \exp \sum_{l=1}^{n} \ln(1 + \ln\, l)\,,$$

где сумма в показателе экспоненты, ввиду монотонного возрастания функции $\ln(1+\ln x)$ оценивается сверху интегралом

$$\sum_{l=1}^{n} \ln(1 + \ln\, l) \leq \int_{1}^{n+1} \ln(1 + \ln x)dx = (n+1)\ln(1 + \ln(n+1)) - \int_{1}^{n+1} \frac{dx}{1 + \ln x}\,,$$

и, так как $\ln x < x$ при $x \geq 1$, то последний интеграл оценивается снизу величиной $\ln(n+1)/2$. Следовательно,

$$\prod_{l=1}^{n} S_l \leq \frac{2}{n+2}(1 + \ln(1+n))^{n+1}\,. \blacksquare$$

Теорема 3. *Пусть $\bar{N}_{n,k}$ – число спектральных типов матриц $\mathcal{G}$ порядка $2n$ с суммарного порядка $2k$ клеток Жордана в каноническом представлении, имеющих нулевые собственные числа, с симметричным спектральным разложением. Тогда имеет место равенство*

$$\bar{N}_{n,k} = N_{2k} N_{n-k}\,.$$

□ Так как матрица $\mathcal{G}$ имеет симметричное спектральное разложение, то клетки Жордана с ненулевыми собственными числами в ее каноническом представлении, число которых равно $2(n-k)$, разбиваются на пары так, что матрицы в каждой паре имеют одинаковый порядок. Поэтому спектральный тип матрицы, составленной из клеток, которые являются первыми в каждой паре, полностью определяет спектральный тип всей матрицы, составленный из клеток с ненулевыми собственными числами. Число спектральных типов таких матриц равна N_{n-k}.

Далее, при при фиксации спектрального типа матрицы, составленной из таких клеток Жордана с ненулевыми собственными числами, спектральный тип всей матрицы $\mathcal{G}$ определяется выбором спектрального типа матрицы, составленной из клеток Жордана с нулевыми собственными числами. Число возможностей выбрать спектральный тип этой части матрицы $\mathcal{G}$ равно N_{2k}. Тогда, в силу принципа умножения, имеем $\bar{N}_{n,k} = N_{n-k}N_{2k}$. ■

Литература

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / М.: Наука, 1966. – 576 с.
2. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. Свойство локальной обратимости гамильтоновых динамических систем // Материалы Международной конференции «Комплексный анализ и его приложения в дифференциальных уравнениях и теории чисел» Белгород, 17-21 октября 2011 / С.37-38.
3. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. Симметричность спектра линейных гамильтоновых систем // Belgorod State University Scientific Bulletin. – 2011. – 17(112);24. – С.179-180.
4. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. Полностью вырожденные линейные гамильтоновы системы // Belgorod State University Scientific Bulletin. – 2012. – 23(142);29. – С.215-218.
5. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. Характеризация линейных гамильтоновых систем // Материалы международной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения» 26-31 мая 2013, Белгород / Белгород: Политерра, 2013. – С.180-181.
6. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. О спектральном разложении генераторов гамильтоновых систем // Belgorod State University Scientific Bulletin. – 2013. – 5(148);30. – С.135-141.

ABOUT CLASS OF HAMILTONIAN MATRICES

Yu.P. Virchenko, A.V. Subbotin

Belgorod State University,
Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail:virch@bsu.edu.ru

Abstract. The concept of spectral type of reversible dynamic systems having even dimension is introduced. The study of such a type systems has began by authors in previous papers. The problem of the number $\bar{N}_{2n}$ enumeration of dynamic systems spectral types is reduced to the enumeration of spectral types of matrices with even degrees which have the "symmetric"spectral decomposition. The combinatorial problem of evaluation the number $\bar{N}_{2n}$ is set. The solution of this problem is proposed in terms of the generation function of the spectral types number which may be realized when matrices have 2n degrees.

Key words: hamiltonian systems, reversible dynamic systems, tangential dynamic system, spectral type of matrix, generation function.